

무요소법과 경계요소법의 변분적 조합

A variationally coupled Element-Free Galerkin Method(EFGM) -Boundary Element Method(BEM)

이 상 호* 김 명 원**
Lee, Sang-Ho Kim, Myoung-Won

ABSTRACT

In this paper, a new algorithm of coupling Element-Free Galerkin Method(EFGM) and Boundary Element Method(BEM) using the variational formulation is presented. A global variational coupling formulation of EFGM-BEM is achieved by combining the variational form on each subregion. In the formulation, Lagrange multiplier method is introduced to satisfy the compatibility conditions between EFGM subregion and BEM subregion. Some numerical examples are studied to verify accuracy and efficiency of the proposed method, in which numerical performance of the method is compared with that of conventional method such as EFGM-BEM direct coupling method, EFGM and BEM. The proposed method incorporating the merits of EFGM and BEM is expected to be applied to special engineering problems such as the crack propagation problems in very large domain, and underground structures with joints.

1. 서 론

1990년대 중반부터 활발히 연구가 진행되어온 무요소법(Meshfree Method)은 요소를 사용하지 않고 절점과 경계조건만을 사용하여 수치해석을 수행하는 방법으로 높은 수치해의 정도를 유지할 수 있고 필요에 따라 절점의 추가, 삭제가 자유롭기 때문에 기하학적 형상이 계속적으로 변화하여 반복적인 remeshing이 필요한 균열전파문제나 mesh distortion으로 어려움을 겪는 대변형문제 등에 활발히 적용되고 있다. 그러나 이동최소제곱보간법(Moving Least Square Interpolant)을 근간으로 도출되는 무요소법의 형상함수는 kronecker delta condition을 정확히 만족시키지 못하기 때문에 주어진 문제의 필수경계조건을 만족시키기 위하여 추가적인 기법이 요구된다. 이러한 기법의 일환으로 경계조건을 효과적으로 처리할 수 있으며 특수한 공학적 문제에 활용성이 높은 조합방법론이 제시되었는데, Belytschko 등⁽¹⁾은 Element-Free Galerkin Method(EFGM)와 유한요소법(Finite Element Method, FEM)을 조합하는 방법론을, 이상호 등^{(2),(3)}은 EFG법과 경계요소법(Boundary Element Method)의 직접조합법과 EFG법과 무한요소법(Infinite Element Method)의 조합방법을 제시하였다. 이 중 본 연구와 관련있는 EFGM-BEM 직접조

* 정회원, 연세대학교 사회환경건축공학부 토목공학전공 부교수

** 정회원, 비티컨설팅(주) 기술연구팀 대리

합법⁽²⁾은 EFG 영역에서 계산된 강성도매트릭스와 BEM 영역에서 계산된 강성도매트릭스를 직접조합방식에 의해 결합시킨 것으로 조합경계면 주위에서 수치해의 정도가 보장되지 못하는 단점이 있다. 이에 본 연구에서는 두 해석기법의 조합시 정확도를 유지하면서 수치해의 정도를 향상시킬 수 있는 변분적 EFGM-BEM 조합방법을 제시하였다. 본 조합방법론은 실제 혹은 스케일 상에 있어 무한 또는 반무한 영역의 해석대상체에서 경계조건을 자연스럽게 만족시키며 필요한 일부 부분에서만 무요소법의 장점을 살려 해석을 수행할 수 있는 장점을 지니고 있다.

2. EFG 정식화

2.1. 이동최소제곱보간법을 사용한 형상함수의 도출

EFG법은 기준절점으로부터 일정한 거리의 영향영역 내에 포함되는 절점들을 대상으로 이동최소제곱법에 의해 상관관계를 이용하여 형상함수와 변위함수를 결정한다. 주어진 영역 Ω 내 임의의 점 \mathbf{x} 에서 변위함수의 이동최소제곱보간에 의한 근사변위함수 $u^h(\mathbf{x})$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) \quad (1)$$

여기서 $\{p_j(\mathbf{x})\}^T = \{1, \dots, x^k, x^{k-1}y, \dots, y^k\}$ 는 기저함수이고, $a_j(\mathbf{x})$ 는 다항식 $p_j(\mathbf{x})$ 에 대응되는 계수로서 u^h 를 결정해주는 미지값이다. $a_j(\mathbf{x})$ 를 구하기 위하여 임의의 점 \mathbf{x} 를 중심으로 영향영역 내에 포함되는 n 개의 절점들에 의한 식 (2)와 같은 weighted discrete L_2 -error를 생각하자.

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = \sum_{j=1}^M w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \left[\sum_{j=1}^n p_j(\mathbf{x}_I) a_j(\mathbf{x}) - u_I \right]^2 \quad (2)$$

이때, 식 (2)의 $J(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$ 를 최소화하기 위하여 $a_j(\mathbf{x})$ 에 대해서 미분하여 정리하면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$A(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (3)$$

여기서 $A(\mathbf{x}) = P^T(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}) P(\mathbf{x})$ 그리고 $B(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) P(\mathbf{x})$ 로 정의되는 매트릭스이다.

식 (3)를 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 에 대해서 정리한 후 식 (1)에 대입하면 EFGM에서의 형상함수를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^M \phi_I(\mathbf{x}) u_I, \quad \phi_I(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) A^{-1}(\mathbf{x}) B(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n p_j(\mathbf{x}) [A^{-1}(\mathbf{x}) B(\mathbf{x})]_{jI} \quad (4)$$

이때, 구해진 EFGM의 형상함수 ϕ_I 는 경계를 따라 필수경계조건을 만족시키지 못하므로 $H_0^1(\Omega)$ 에 속하지 않는다.

2.2. EFG 방법의 이산화

다음과 같은 이차원 선형탄성문제에 대해서 생각해 보자.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{or} \quad \sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

여기서 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 변위 \mathbf{u} 에 대응되는 응력텐서이고 \mathbf{b} 는 물체력 벡터이다. 자연경계조건과 필수경계조건은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (6a)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (6b)$$

여기서 \mathbf{n} 은 영역 Ω 에 대한 단위법선 벡터이다.

식 (7)의 평형방정식에 대한 약형식(weak form)은 필수경계조건을 만족시키기 위해 벌칙함수법(penalty method)을 사용할 때 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{\Omega} \delta(\nabla_s \mathbf{v}^T) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{v}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{v}^T \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad (7)$$

여기서, test function $\forall \delta \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1$ 이고 α 는 구속조건을 만족시키기 위한 벌칙계수(penalty parameter)이다. 약형식 (7)을 EFG법에 의해 이산화하면 다음과 같은 시스템방정식을 얻을 수 있다.

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^u)\mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^u \quad (8)$$

여기서

$$\mathbf{K}_I = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I d\Omega, \quad \mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} \phi_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_I \mathbf{b} d\Omega \quad (9a)$$

$$\mathbf{K}_I^u = \alpha \int_{\Gamma_u} \phi_I \phi_I d\Omega, \quad \mathbf{f}_I^u = \alpha \int_{\Gamma_u} \phi_I \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (9b)$$

3. 경계요소법의 정식화

식 (7)에 가상일의 원리를 적용하여 적분방정식을 형성하면 임의의 가상변위에 대해 다음과 같은 체적 적분방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} (\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \mathbf{u}^* d\Omega = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}^* d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{b} \mathbf{u}^* d\Omega \quad (10)$$

물체력 \mathbf{b} 의 영향을 무시하고 $\nabla(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}^*) = \nabla \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}^* + \boldsymbol{\sigma} \nabla \mathbf{u}^*$ 의 관계와 발산정리를 이용하면

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla \mathbf{u}^* d\Omega = \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (11)$$

를 얻고 Betti's reciprocal work 정리 (또는 Maxwell-Betti reciprocal relationship)에 의하여 식 (11)은 다음과 같은 방정식의 형태로 변환시킬 수 있다.

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}}^* \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (12)$$

기본해(fundamental solution)를 식 (12)에 적용하면 다음과 같은 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}}^* \mathbf{u} d\Gamma - \mathbf{u}_k = 0 \quad (13)$$

식 (13)을 BEM 이산화를 하기 위해 변위와 표면력을 형상함수와 절점에서의 값을 이용하여 표현하고, 즉 $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{u}^n$, $\bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\Psi}^T \bar{\mathbf{t}}^n$, 이를 원식에 대입하여 매트릭스 형태로 표시하면

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{P} \quad (14)$$

와 같고 식 (14)에 경계조건을 적용시키고 모든 미지의 값들을 왼편으로 위치시키고 기지의 값을 오른편으로 위치시키면 다음과 같은 최종의 시스템방정식을 얻을 수 있다.

$$AY = F \quad (15)$$

여기서 Y 는 미지의 값만으로 구성된 벡터로 변위항과 표면력항을 모두 포함한다.

4. EFG법과 경계요소법의 변분적 조합

4.1 EFGM-BEM의 직접조합법

EFG법의 단점 중 하나는 필수경계조건을 만족시키지 못하는 것이다. 이에 이상호 등⁽²⁾은 해석 대상체의 경계를 경계요소법으로 해석하고 해석 대상체의 내부는 EFG 절점을 사용하여 해석하는 EFGM-BEM 직접조합법을 사용하였다. 이 방법은 경계요소법에서 얻은 식 (14)를 강성도매트릭스를 가지고 있는 유한요소법의 형식을 가진 식으로 표현하여 조합하는 방법이다. 이때, 강성도매트릭스 K_{EFG} 나 K_{BEM} 은 모두 하중-변위의 관계를 갖고 있으므로 서로 직접적인 조합이 가능하므로 다음과 같은 시스템방정식을 얻을 수 있다.

$$(K_{EFG} + K_{BEM})(U_{EFG} + U_{BEM}) = (f_{EFG} + f_{BEM}) \quad (16)$$

그림 1은 EFGM-BEM 조합시 경계 절점에 대해서는 경계요소법을 적용하므로서 필수경계조건을 자동으로 만족시키도록 한 조합모형의 예를 보여준다.

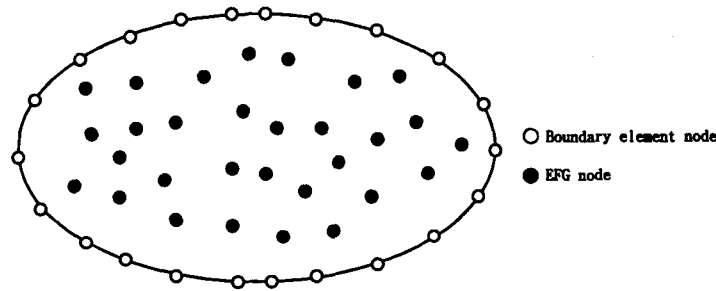


그림 1 해석 대상체의 경계를 모두 경계요소절점으로 사용한 조합모형

식 (16)으로부터 전체 강성도매트릭스와 하중벡터의 식을 나타내면 다음과 같다.

$$K_G U_G = F_G \quad (17)$$

여기서 K_G 는 조합된 전체 강성도매트릭스, U_G 는 조합된 전체 변위벡터, F_G 는 조합된 전체 하중벡터이다.

4.2 EFGM-BEM의 변분적 조합의 약형식

변분적 조합을 위하여 전체 영역 Ω 가 그림 2와 같이 각각 EFG법과 BEM의 영역 Ω_E 와 Ω_B 로 나누어져 있다고 하자. Ω_E 와 Ω_B 와 경계면은 Γ_I 이고 Ω_E 와 Ω_B 의 경계는 각각 Γ_E 와 Γ_B 이다.

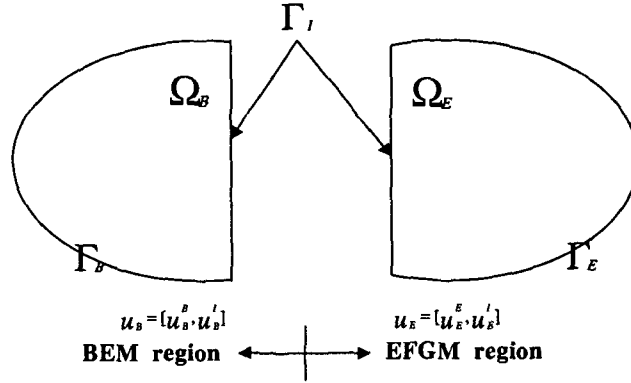


그림 2 Domain Decomposition

두 영역에 대한 지배 방정식을 약형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega_E} \sigma^u : \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Gamma_I^E} \bar{v} t d\Gamma + \int_{\Gamma_I} v \sigma^u \cdot n^E d\Gamma, \quad \forall v \in V_0 \text{ in } \Omega_E \quad (18)$$

$$\int_{\Gamma_{B+I}} (u \sigma^v \cdot n^B - v \sigma^u \cdot n^B) d\Gamma = \int_{\Omega_B} (u \nabla \sigma^v - v \nabla \sigma^u) d\Omega \text{ in } \Omega_B \quad (19)$$

이때, Γ_I 에서 $n^B = -n^E$ 이므로 식 (18)를 식 (19)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 약형식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_B} (u \sigma^v \cdot n^B - v \sigma^u \cdot n^B) d\Gamma + \int_{\Gamma_I} u \sigma^v \cdot n^B d\Gamma - \int_{\Gamma_I^E} \bar{v} t d\Gamma \\ = \int_{\Omega_B} (u \nabla \sigma^v - v \nabla \sigma^u) d\Omega - \int_{\Omega_E} \sigma^u : \varepsilon(v) d\Omega \end{aligned} \quad (20)$$

이때, 접속 경계 Γ_I 에서는 다음의 연속조건을 만족해야 한다.

$$(i) \quad u_I^E = u_I^B \text{ (적합성 조건)} \quad (21a)$$

$$(ii) \quad f_I^E + f_I^B = 0 \text{ (평형 조건)} \quad (21b)$$

여기서 u_I^E 와 u_I^B 는 각각 Γ_I 에서의 EFG법과 경계요소법에 의한 변위를, f_I^E 와 f_I^B 는 각각 Γ_I 에서의 EFG법과 경계요소법에 의한 하중벡터를 의미한다. 본 논문에서는 접속경계 Γ_I 에서의 적합성 조건인 식 (21a)를 만족하게 하기 위해 다음과 같은 Lagrange multiplier method의 추가 구속식을 도입하였다.

$$\int_{\Gamma_I} \gamma \cdot (u_I^E - u_I^B) d\Gamma = 0 \quad (22)$$

4.3 EFGM-BEM 변분적 조합의 이산화

각각의 영역 Ω_E 와 Ω_B 에 대한 약형식과 접속경계에서의 적합성 조건을 만족시키기 위하여 도입한 식 (22)를 이산화한다. Lagrange 승수 γ 는 보간함수 ψ_I 와 접속경계에서의 절점값 γ_I 로 나타낼 수 있다.

즉, $\gamma = \phi_I \gamma_I$ 이다. 따라서, 식 (8), (14), (20), (22)을 결합하면 다음과 같은 선형 시스템방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{EFG} & 0 & \mathbf{A} \\ 0 & \mathbf{K}_{BEM} - \mathbf{E} & \\ \mathbf{A}^T & -\mathbf{E}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{EFG} \\ \mathbf{u}_{BEM} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{EFG} \\ \mathbf{f}_{BEM} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서 \mathbf{K}_{EFG} , \mathbf{K}_{BEM} , \mathbf{f}_{EFG} 및 \mathbf{f}_{BEM} 은 4.1절의 식 (16)에 있는 것과 같은 형태이며, 특히

$$\mathbf{A}_{IJ} = \int_{\Gamma_I} \phi_I \phi_J^{EFG} d\Gamma, \quad \mathbf{E}_{IJ} = \int_{\Gamma_I} \phi_I \phi_J^{BEM} d\Gamma \quad (24)$$

이다. 본 연구에서 개발된 EFGM-BEM 변분적 조합 알고리즘의 흐름도는 그림 3에 나타나 있다.

5. 수치예제

5.1 Timshenko Beam 문제

무요소법과 경계요소법의 변분적 조합 알고리즘을 검증하기 위하여 대상모형을 Timoshenko와 Goodier⁽⁴⁾가 제안한 순수휨을 받는 보문제를 선정하였다. 해석대상의 모형의 기하학적 형상과 하중조건은 그림 4과 같으며 탄성계수 E는 30000000psi를, 포아송비 ν 는 0.3을 사용하였다.

본 알고리즘의 정확성 및 효율성을 검증하기 위하여 본 알고리즘 결과와 EFGM-BEM의 직접조합법, EFGM, BEM의 해석결과를 비교하였다. 본 알고리즘과 EFGM-BEM 직접조합법에서는 49개의 EFG 절점과 24개의 BEM 절점을 사용하였으며, EFGM 해석에서는 85개의 절점을 사용하였고 BEM에서는 56개의 절점을 사용하였다.

표 1은 그림 4의 A점에서의 수직 변위를 비교한 것이다. 상대적으로 가장 많은 절점을 가진 EFGM 해석결과가 가장 높은 정확성을 나타냈으며, 본 연구에서 개발한 변분적 조합은 같은 조건하에서 직접조합법보다 수치해가 약 20% 정도가 향상된 결과를, 비슷한 조건하에서 경계요소법보다 수치해가 약 13% 정도 향상된 결과를 얻을 수 있었다. EFGM 해석방법은 높은 해의 정도를 보장해 주지만 해석대상체가 무한히 커질 경우 EFG 절점만을 이용해서 해석을 수행하는 것은 매우 비효율적이므로 본 연구에서 제시한 변분적 조합방법의 사용이 효율적일 것으로 판단된다.

표 1 Timoshenko beam의 절점 A에서의 수직 변위 비교

해석방법	이론해(in)	수치해(in)	오차(%)
본연구	-0.00890	-0.009120	2.47
EFGM-BEM직접조합법	-0.00890	-0.008621	3.13
EFGM	-0.00890	-0.008897	0.03
BEM	-0.00890	-0.008647	2.84

5.2 원공을 가진 평판 문제

두 번째 수치예제는 x 방향으로 1.0의 단방향성 장력이 작용하는 원공을 가진 평판 문제를 대상으로 하였다. 평판의 크기는 20×20 in이고 대칭성을 고려하여 $\frac{1}{4}$ 크기만을 그림 5(a)와 같이 모형화하였다. 재료 물성치는 $E = 1.0 \times 10^3$ psi, $\nu = 0.3$ 이며 평면 변형률 조건으로 가정하였다.

그림 6은 정확성 및 효율성 검증을 위하여 본 연구방법, EFGM 및 BEM에 대해서 이론해 응력 $\sigma_x(x=0)$ 를 비교한 것이다. 그림 6에서 보듯이 본 연구에서의 EFGM-BEM 변분적 조합법(54 nodes)이 EFG 방법(260 nodes)과 경계요소법(24 nodes)보다 정확성 및 효율성이 뛰어난을 확인하였다.

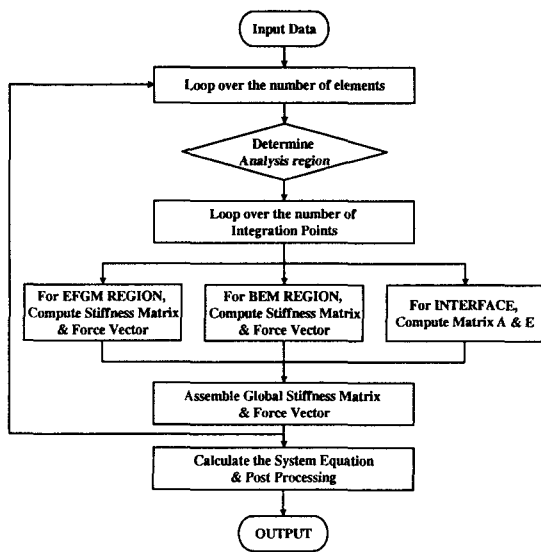
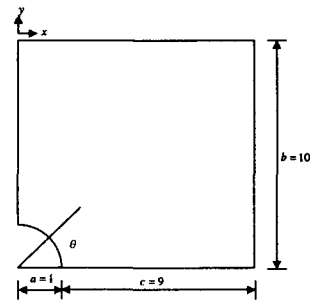
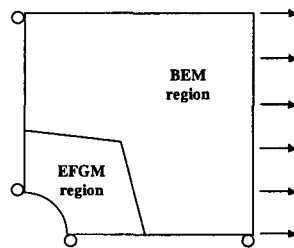


그림 3 해석 프로그램의 흐름도



(a) 유한판의 해석 모형



(b) 유한판의 영역 분할 모형

그림 5 원공을 가진 유한판의 모형화

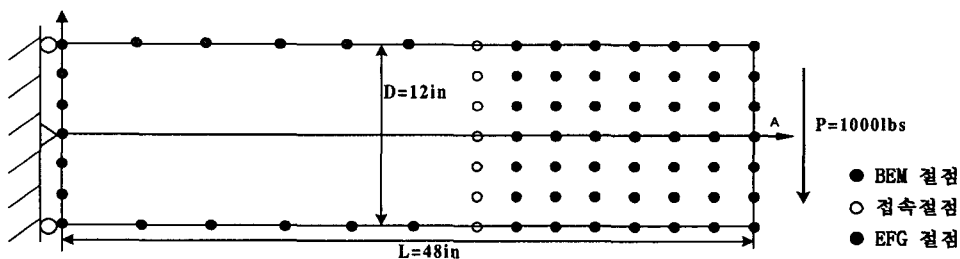


그림 4 Timshenko Beam 모형

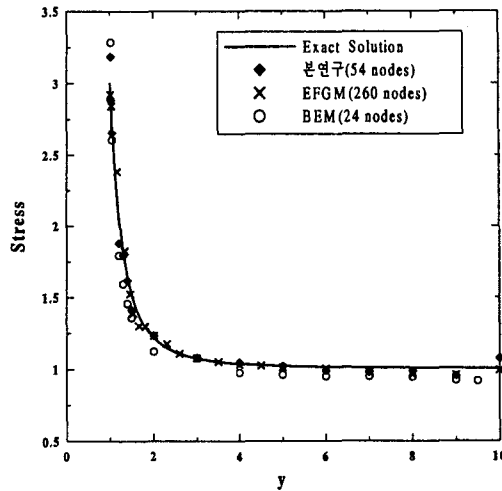


그림 5 EFGM-BEM 변분적조합, EFG 및 BEM을 이용한 응력 분포

6. 결론

EFGM과 BEM을 변분적 결합을 통하여 얻은 본 연구의 결과는 다음과 같다.

(1) 본 연구는 EFGM과 BEM의 장점을 살려 무한 또는 반무한 영역을 해석하기 위한 EFGM과 BEM의 변분적 조합 알고리즘을 개발하였다.

(2) 정확성 및 효율성을 검증하기 위하여 2차원 Cantelever beam 문제에 본 연구에서 개발된 수치해석방법을 적용한 결과 EFGM과 BEM의 직접조합법, 경계요소법에 의한 방법에 비해 해의 정도면에서 우월함을 알 수 있었다. 또한, 해석대상체가 무한히 커질 경우 EFGM을 이용하여 해석을 수행하는 것에 비해 본 연구의 알고리즘이 효율적일 것으로 판단된다.

(3) 두 번째 수치예제로서 원공을 가진 평판 문제에 적용한 결과 적은 절점을 사용하여 EFG 방법과 경계요소법에 비해 해의 정도가 떨어지지 않음을 확인하였다.

감사의 글

이 논문은 2001년도 두뇌한국21사업 핵심분야에 의하여 지원되었습니다.

참고 문헌

1. Belytschko, T., Organ, D. and Krongauz, Y. "A coupled finite element-element free Galerkin methods", *Computational Mechanics*, Vol.74, 1996, pp.186-195
2. 이상호, 김상효, 박철원, "무요소절점법과 경계요소법의 조합에 관한 연구", 대한토목학회 학술발표회 논문집, 제1권, 1997, pp.99-102
3. 이상호, 김태연, "무요소법과 무한요소의 결합에 관한 연구", 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 제14권 1집 제26호, 2001, pp.76-83
4. Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill. Company, New York, 1970