

서보 모터의 가감속을 고려한 2·3 차원 원호의 실시간 직선 보간

이제필*(전남대학교 산업공학과 대학원)·이철수(전남대학교 산업공학과)

Real-time Line Interpolation of a 2·3D Circular Arc based on the Acceleration and Deceleration of a Servo Motor

Je-Phil Lee*(Chonnam Univ., Graduate School)·Cheol-Soo Lee(Chonnam Univ.)·

ABSTRACT

In CNC machining, a 3D(3-dimension) linear segment and a 2D(2-dimension) circular arc are general forms given by CAD/CAM system. Generally, the 2D circular arc machining is processed using dividing into some linear segments. A 3D circular arc also don't exist in the standard form of NC data.

This paper present a algorithm and method for real-time machining of a circular arc(not only the 2D one, but also the 3D one). The 3D circular arc machining is based on the 2D circular arc machining. It only needs making a new coordinate system, converting given 3D points(a start point, a end point, and a center point of a 3D circular arc) into points of the new coordinate system, and processing a inverse transformation about a interpolated point.

The proposed algorithm was implemented and simulated on PC system. It was confirmed to give a good result.

Key Words : Circular Arc Machining(원호 가공), Real-time Line Interpolation(실시간 직선 보간), Acceleration and Deceleration(가감속), CNC controller(CNC 컨트롤러).

1. 서론

3축 CNC 공작기계는 일반적으로 3차원 직선과 2차원 원호 형상만을 가공할 수 있다(1-5). 2차원 원호 가공(circular arc machining)도 보통은 CNC 컨트롤러에서 허용 오차를 고려한 직선 세그먼트로 나누어 가공된다. 하지만 원호를 미소 직선으로 보간하여 가공을 수행하면, 지령한 이송속도에 도달하지 못할 뿐만 아니라 미소 직선으로 인한 이송속도가 단속적으로 됨으로써 가공 면의 표면 조

도도 나빠진다. CNC 컨트롤러의 서보 모터를 제어하는 모션 제어기(motion controller)(6)에서 원호 가공 시에 가감속을 고려하여 실시간으로 원호를 직선 보간하면 원호를 직선 세그먼트로 분할함으로써 생기는 문제를 모두 제거할 수 있으며, 많은 장점을 갖는다(4, 5).

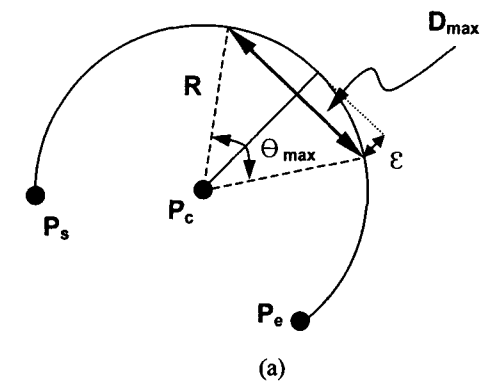
3차원 유클리드 공간상의 원호는 구와 구의 중심점을 지나는 임의의 평면으로써 정의할 수 있다(4-5). 2차원 원호는 3차원 원호의 특수한 경우로 각 축에 대하여 매개변수 식으로 주어진다. 따라서 2차원 원호는 주어진 식으로 서보 모터의 가감속만을 고려하여 직선 보간을 수행할 수 있다. 3차원 원호의 경우는 특별한 매개변수 식을 구하기 어려우므로 NC 데이터의 공통된 표준도 마련되어 있지 않다. 하지만 선두적인 CNC 컨트롤러 제작사에서 자체의 특수 기능으로 제공하고 있다. 이는 기존의 3차원 원호는 모두 미소 직선으로 보간하여 처리하던 것을 단 한 개의 원호로 가공을 가능하게 한다.

본 논문에서는 매개변수 식으로 주어지는 2차원 원호의 실시간 가공은 물론 3차원 원호를 새로운 좌표 평면으로 변환시키고 2차원 원호의 직선 보간 방법을 적용하여 실시간 직선 보간 방법을 제시한다. 실시간 원호의 직선 보간은 알고리즘의 수행 시간이 중요한데, 제시한 3차원 원호의 직선 보간 알고리즘은 2차원 원호의 직선 보간 알고리즘을 그대로 사용하며, 단지 새로운 좌표 평면의 보간점을 간단한 역변환(inverse transformation)만을 수행하여 3차원 좌표값을 생성함으로써 2차원 원호의 직선 보간과 비슷한 시간이 소요된다.

2. 2 차원 원호의 직선 보간

2.1 2 차원 원호의 직선 세그먼트 생성

허용된 오차를 만족하면서 2 차원 원호를 직선 세그먼트로 분할하는 방법은 크게 3 가지로 나누어 볼 수 있다(1-3).



$$\theta_{\max} = 2 \cos^{-1} \left(\frac{R}{R + \epsilon} \right) \quad (3)$$

$$D_{\max} = 2 (R + \epsilon) \sin \left(\frac{\theta_{\max}}{2} \right) \quad (4)$$

$$\theta_{\max} = 2 \cos^{-1} \left(\frac{R}{R + \epsilon} \right) \quad (5)$$

$$D_{\max} = 2 (R + \epsilon) \sin \left(\frac{\theta_{\max}}{2} \right) \quad (6)$$

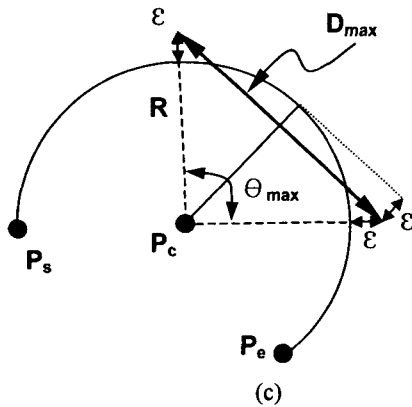
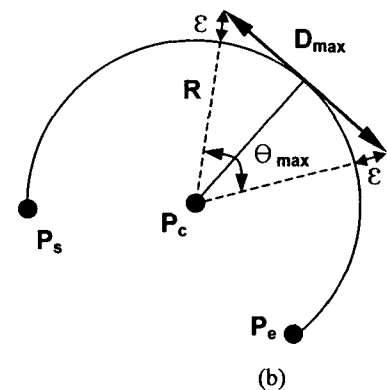


Fig. 1 methods for line interpolation of 2D Circular Arc: (a) case inside (b) case outside (c) case inside and outside

Fig. 1에서 볼 수 있는 것처럼 원호는 허용 오차를 만족하면서 직선 보간할 수 있는 최대 사이각을 구하면 쉽게 직선 보간을 할 수 있다. 식 (1)과 (2)는 Fig. 1의 (a), 식 (3)과 (4)는 Fig. 1의 (b), 식 (5)와 (6)은 Fig. 1의 (c)에 대한 사이각과 직선 세그먼트의 길이를 나타내고 있다. Fig. 1의 (a)는 (b)보다는 직선 보간 시에 최대 사이각은 미소하게 크지만 보간된 직선 세그먼트의 길이는 반대로 더 작다. 그리고 Fig. 1의 (c)는 Fig. 1의 (a)와 (b)보다 최대 사이각과 직선 세그먼트의 길이에 있어서 효과적임을 알 수 있다.

원호를 보간할 때 가장 중요한 것은 보간할 최대 사이각 보다는 보간된 직선 세그먼트의 길이이다. 왜냐하면 모션 제어기에서 원호를 직선 보간하기 때문에 보간한 직선 세그먼트의 길이는 한 실행주기당 이송할 거리가 되므로 바로 최대 이송 속도가 결정되기 때문이다.

2.2 가감속을 고려한 2차원 원호의 직선 보간

CNC 컨트롤러의 모션 제어기에서 원호를 실시간으로 직선 보간하기 위해서는 먼저 허용된 오차 내에서 보간된 직선 세그먼트를 얻어야 한다. 본 논문에서는 앞에서 Fig. 1의 (c)의 방법을 채택하여 원호의 직선 보간을 수행하였다.

2차원 원은 시간 t 에 대한 매개 변수 식으로 표현하면 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다. 각속도 (ω)는 선속도(F)와 원의 반지름(R)으로 구해진다. 그리고 원 상의 어떤 한 지점에서의 각 축의 속도 성분은 각속도를 이용하여 식 (8)의 $V_x(t), V_y(t)$ 를 구할 수 있다.

$$\theta_{\max} = 2 \cos^{-1} \left(\frac{R - \epsilon}{R} \right) \quad (1)$$

$$D_{\max} = 2 R \sin \left(\frac{\theta_{\max}}{2} \right) \quad (2)$$

$$x(t) = R \cos(\omega t) \quad (7)$$

$$y(t) = R \sin(\omega t)$$

$$\omega = \frac{F}{R}$$

$$V_x(t) = -R \omega \sin(\omega t) \quad (8)$$

$$V_y(t) = R \omega \cos(\omega t)$$

원 또는 원호를 가공할 때 모션 제어기에 보간후 가감속을 사용하여 가공을 수행하면 지령상의 가공 오차가 발생하므로 보간전 가감속을 사용하여 원 또는 원호를 가공한다⁽⁷⁾. 지령된 원 또는 원호의 길이를 구하여 이송할 거리로 사용하고 주어진 각 축의 가감속을 적용하여 보간전 가감속 프로파일을 생성한다. 그리고 이를 바탕으로 하여 원 또는 원호를 실시간으로 직선 보간한다. 그 절차를 정리하면 다음과 같다.

- Step 1.** 시작점과 종료점의 이송속도를 선후 블록과 비교하여 각 축의 가감속 내에서 허용되는 이송속도를 설정한다.
- Step 2.** 주어진 원 또는 원호의 최대 직선 보간 길이를 구하여 가공할 수 있는 새로운 최대 이송속도를 구한다.
- Step 3.** 원 또는 원호의 이송할 거리를 구한다.
- Step 4.** 이송할 거리와 가감속을 바탕으로 보간전 가감속 프로파일을 생성한다.
- Step 5.** 각 실행주기별로 이송 거리를 구하여 이를 각 축별로 분해하여 지령한다.
- Step 6.** 이송할 거리를 모두 처리하면 종료한다.

3.3 차원 원호의 직선 보간

3.1.3 차원 원호의 직선 세그먼트 생성

3차원 유클리드 공간에서의 원호의 직선 보간은 2차원 원호의 직선 보간과 동일한 방법을 적용하여 처리된다. 단지 3차원 유클리드 공간에 존재하는 원호는 Fig. 2와 같이 3점(시작점, 종료점, 원호의 중심점)이 3축에 대하여 주어지는데, 이 점들을 이용하여 새로운 좌표 평면을 만드는 것 외에는 다른 차이가 없다. 따라서 여기서는 주어진 3차원 원호 정보를 이용하여 좌표 평면을 만들고, 새로운 좌표 평면에서 보간된 각 점을 원래의 3차원 공간 상으로 변환시키는 과정만을 설명한다.

3 차원 원호는 현재 CNC 컨트롤러에서 이에 대한 형식이 정해지지 않았으므로 본 논문에서는 2 차원 원호와 통일성을 위하여 3 차원 좌표로 구성된 시작점 (x_s, y_s, z_s) 과 종료점 (x_e, y_e, z_e) , 중심점 (i, j, k) 을 입력으로 한다. 이렇게 3 개의 점이 주어지면 유일한 한 개의 평면을 만들 수 있으며, 생성된 평면 상에 새로운 좌표계를 만들 수 있다.

Fig. 2 는 본 논문에서 3 차원 원호를 정의하기 위한 NC 데이터에서의 입력 형식을 나타낸 것이다. 이 3 차원 원호는 원점을 중심으로 X 축 선상에서 시작한 원호의 형태이다. 2 차원 원호에 비교하면 단지 한 축이 더 증가했을 뿐이다.

```
G00X50.Y0.Z0.
G03X0.Y-47.246Z-16.366I-50J0.K0.
G00X0.Y0.Z0.
```

Fig. 2 Example of NC code for a 3D circular arc

3.2 가감속을 고려한 3 차원 원호의 직선 보간

3차원 원호의 직선 보간은 3차원 원호를 좌표 평면으로 변환한 후에, 2차원 상에서 직선 보간을 수행하여 다시 3차원 공간상으로 역변환함으로써 이루어진다. 그 방법은 다음과 같은 절차에 의해 수행된다.

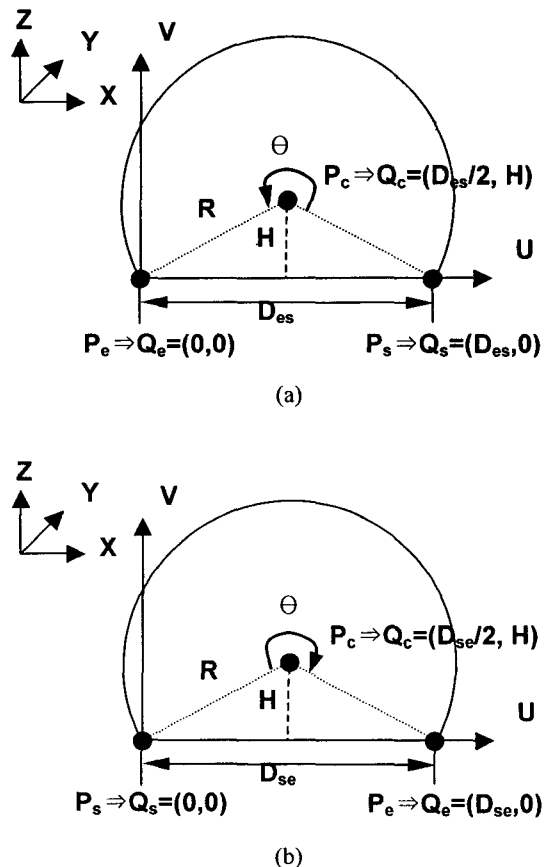


Fig. 3 Generating a new 2D coordinate system for a 3D circular arc: (a) in case of CCW (b) in case of CW

Step 1. 새로운 좌표계는 원호의 직선 보간을 용이하게 하기 위하여 원호의 이송 방향이 반시계 방향(CCW)인 경우 종료점을 기준점으로 하여 시작점으로 향하는 벡터 $\overline{(P_e P_s)}$ 를 U 축으로 결정한다(Fig. 3의 (a) 참조). 반대로 시계 방향(CW)의 원호는 U 축을 결정하는 과정에서 기준점이 시작점 P_s 가 되어 $\overline{(P_s P_e)}$ 를 U 축으로 설정한다(Fig. 3의 (b) 참조).

Step 2. 종료점을 기준으로 U 축을 반시계 방향으로 $\pi/2$ 만큼 회전한 축을 V 축이라고 가정한다. 이로써 3차원 상에 주어진 세 점을 새로 결정된 UV 좌표 평면 상으로 변환시킬 수 있다. 시계 방향의 경우에는 V 축도 U 축을 시작점 P_s 를 기준으로 하여 반시계 방향으로 $\pi/2$ 만큼 회전축을 설정한다

Step 3. P_e 점은 UV 좌표 평면에서는 $Q_e=(0, 0)$ 으로, P_s 점은 $Q_s=(\overline{P_e P_s}, 0)$ 로, P_c 점은 $Q_c=(\overline{P_e P_s}/2, H)$ 로 설정할 수 있다.

Step 4. $|H|=\sqrt{R^2 - (\overline{P_e P_s}/2)^2}$ 로 구할수 있고, 부호는 θ 값에 따라 π 보다 작으면 음(-)의 부호를 설정하고, 크거나 같은면 양(+)의 부호를 적용한다.

Step 5. 3차원 원호의 새로운 2차원 좌표 평면으로 변환이 끝나면, 2차원 원호의 보간 방법을 이용하여 원호를 U, V 축에 대하여 직선 보간한다.

Step 6. 생성된 보간점은 간단한 벡터 연산을 통하여 3차원 좌표값으로 변환할 수 있다(Fig. 4와 식 (9) 참조).

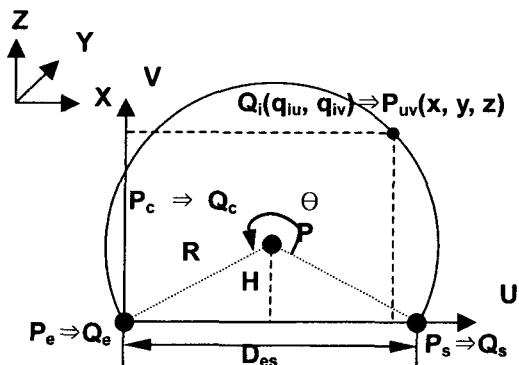


Fig. 4 Inverse transformation in case of a CCW circular arc

$$P_u = P_e + q_{iu} \hat{u} \quad (9)$$

$$P_{uv} = P_u + q_{iv} \hat{v}$$

Fig. 4는 반시계 방향(CCW)의 원호 보간점을 3차원 공간 상의 좌표값으로 나타낸 것이다. 식 (9)는 UV 좌표 평면 상의 점을 3차원 공간 상의 좌표값으로 변환하는 것을 정리한 것이다. 즉, U 축과 V 축에 대한 3차원 공간에서의 단위 벡터 \hat{u}, \hat{v} 를 생성하여 UV 좌표 평면에서 생성된 보간점을 3차원 공간 상의 점으로 변환한다. 이때 반시계 방향의 경우는 종료점을 시계 방향의 경우는 시작점을 기준으로 보간점의 U 축과 V 축의 좌표값을 U 와 V 의 단위 벡터(\hat{u}, \hat{v})를 곱하여 3차원 상의 보간점을 구한다.

만약 원의 경우는 가공 방향이 반시계 방향이면 시작점에서 중심점으로 향하는 벡터 $\overline{(P_s P_c)}$ 를 생성하여 V 축으로 설정하고, V 축을 시작점을 기준으로 시계 방향으로 $\pi/2$ 만큼 회전한 축을 U 축으로 설정하면 된다. 가공 방향이 시계 방향이면 U 축으로 설정할 때 시작점을 기준으로 반시계 방향으로 $\pi/2$ 만큼 회전하면 된다.

4. 실험 결과 및 분석

4.1.2 차원 원호의 직선 보간 결과 및 분석

2차원 원호의 실시간 직선 보간은 반지름 50 mm인 원을 (50, 0)을 시작점으로 하여 반시계 방향으로 이송속도는 6000 mm/min으로 이송하였다. 이때 각 축의 가감속은 모두 $0.1g (= 3528000 \text{ mm/min}^2)$ 를 사용하고, 가감속 형태는 직선형 가감속을 사용하였다. 모션 제어기의 실행주기는 1 msec를 설정하고, 실행주기당 허용오차는 $0.02\mu\text{m}$ 를 설정하였다.

Fig. 5를 보면, 처음 시작점 근처에서는 Y 축의 이송량이 많으므로 급격한 가속과 감속이 일어나고, X 축은 전체적으로 부드러운 가속이 일어나는데, 이는 처음 시작을 X 축 선상에서 하였기 때문이다. Y 축 선상에 시작하면 가감속 프로파일이 이와 반대의 경우로 생성된다. Fig. 6은 Fig. 5의 가감속 프로파일에 의해 생성된 궤적을 표시한 것으로 전혀 오차를 발생하기 않고 원을 이루고 있음을 알 수 있다.

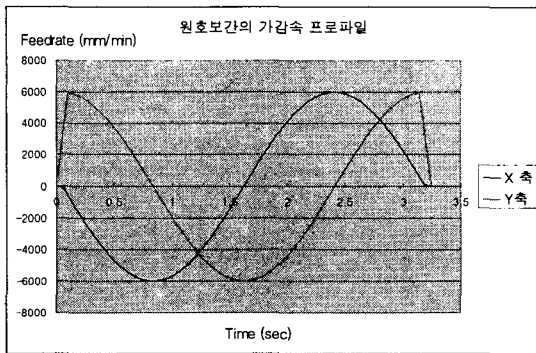


Fig. 5 Acceleration/deceleration profile of a 2D circular arc

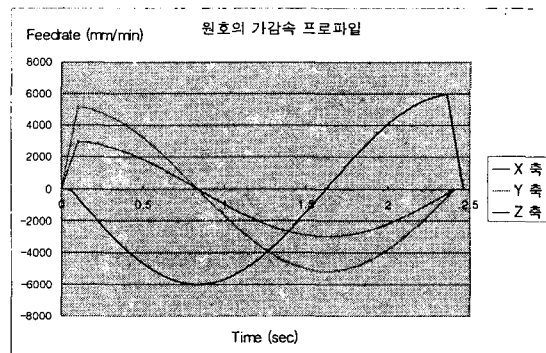


Fig. 7 Acceleration/deceleration profile of a 3D circular arc

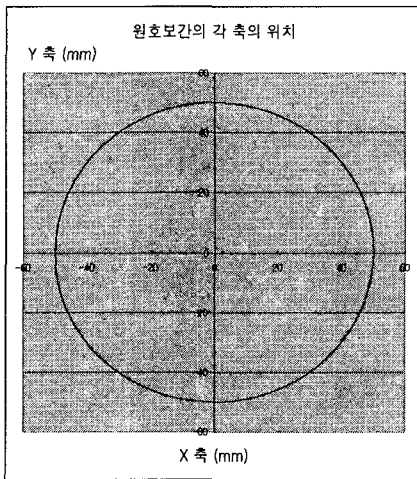


Fig. 6 Trajectory of the real-time line interpolation of a 2D circular arc

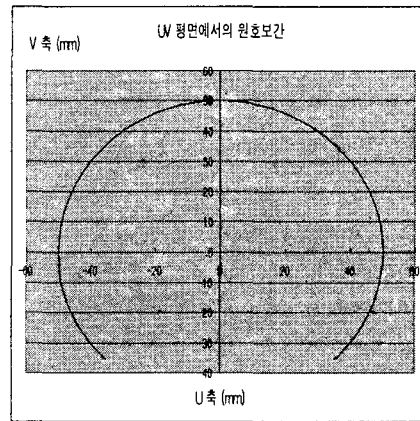


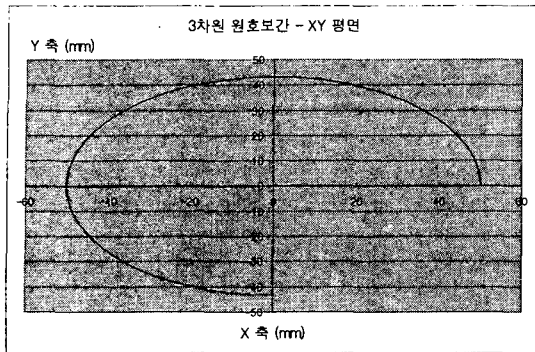
Fig. 8 Trajectory of the real-time line interpolation of a 2D circular arc in the UV coordinate system

4.2.3 차원 원호의 직선 보간 결과 및 분석

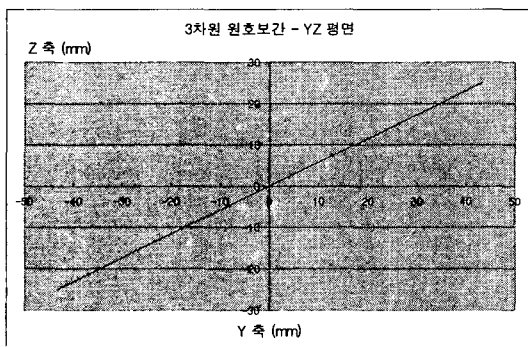
실험 조건은 2차원 원호와 동일하게 하였으며, 단지 시작점(50, 0, 0)과 종료점(0, -47.246, -16.366), 중심점(0, 0, 0)인 $3\pi/2$ 인 원호에 대하여 실시간 직선 보간을 수행하였다. 3차원 원호는 원점을 기준으로 XY 평면에 X축의 (50, 0, 0)을 시작점으로 하여 $3\pi/2$ 인 원호를 작성한 후, XY 평면에 대하여 $\pi/6$ 회전하여 3차원 원호를 얻었다.

$3\pi/2$ 인 원호를 6000 mm/min의 이송속도로 수행하는데 2.46 초가 걸렸으며, Fig. 7을 보면 X축의 이송량이 가장 많고, Y축, Z축 순으로 이송량이 많음을 알 수 있다. UV 좌표 평면에서 원호를 보면 $\pi/4$ 가량 틀어진 걸 볼 수 있는데, 이것은 U축을 종료점에서 시작점으로 가는 벡터로 설정하였기 때문이다. UV 좌표 평면에서도 $3\pi/2$ 의 원호를 직선 보간한 것을 알 수 있다 (Fig. 8 참조).

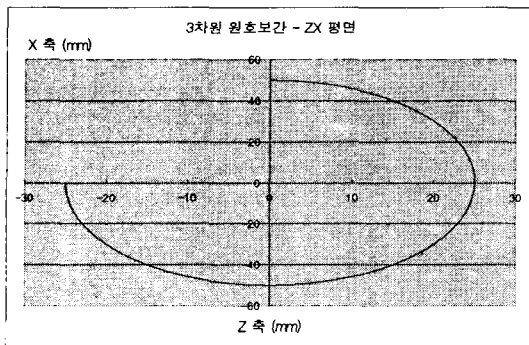
Fig. 9는 2개의 축간의 이송궤적을 비교한 것이다. X축은 반경(50 mm) 만큼 변하지만 Y축은 약 43.3 mm 정도 변하고 Z축은 25 mm 변하는 것을 알 수 있다. Fig. 9의 (a)와 (c)에서 볼 수 있듯이 X, Y축과 Y, Z축은 상호 타원의 형상을 이루고, Fig. 9의 (b)에서와 같이 Y축과 Z축은 선형 관계를 갖고 있다. 물론 이것은 원호의 형상에 따라 달라질 수 있다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 9 Trajectory of the real-time line interpolation of a 3D circular arc: (a) XY plane (b) YZ plane (c) ZX plane

5. 결론

NC 가공에 있어서 3차원 원호는 표준 NC 데이터에서 지원하지 않기 때문에 직선 세그먼트로 나누어져 NC 데이터로 입력되며, 2차원 원호도 보통 직선 세그먼트로 나누어져 CNC 컨트롤러의

모션 제어기에 들어온다. 이것은 NC 데이터의 증가 뿐만 아니라 모션 제어기에도 부담이 된다. 가공상에 있어서도 절삭속도는 직선 세그먼트들로 제한이 되며, 미소 직선 세그먼트들로인하여 가공면의 조도에도 나쁜 영향을 미친다.

본 논문에서는 2차원 원호는 물론 3차원 원호까지 모션 제어기에서 실시간으로 보간할 수 있는 방법을 제안하고 시뮬레이션을 수행하였다. 2차원 또는 3차원 원호의 보간은 보간전 가감속과 모션 제어기의 허용오차를 설정함으로써 지령상의 오차를 배제하였으며, 3차원 원호의 직선 보간 시에는 새로운 2차원 UV 좌표 평면을 생성하고, 주어진 시작점과 종료점, 중심점을 UV 평면 상의 좌표로 변환하여 2차원 직선 보간을 행한 후, 3차원 상의 점으로 역변환하는 방법을 사용하였다. 따라서 2차원 원호 보간의 알고리즘을 그대로 사용하였으며, 간단한 역변환을 통하여 3차원 좌표값을 얻으므로써 실시간 직선 보간을 가능케 하였다.

참고문헌

1. Bresenham, J. E., "A linear algorithm for incremental digital display of circular arcs", *Commun. ACM*, Vol. 20, No. 2, pp. 100~106, 1977.
2. Suenaga, Y., Kamae, T., and Kobayashi, T., "A high-speed algorithm for the generation of straight lines and circular arcs", *IEEE Transactions on Computers*, Vol. C-28, No. 10, pp. 728~736, 1979.
3. Koren, Y., and Masory, O., "Reference-pulse circular interpolators for CNC systems", *ASME Journal of Engineering of Industry*, Vol. 103, pp. 131~136, Feb., 1981.
4. 양민양, 홍원표, "CNC 공작기계의 3 차원 직선 및 원호 보간 알고리즘에 관한 연구", *한국정밀공학회지*, 제 16 권 제 9 호, pp. 172~178, 1999.
5. 양민양, 홍원표, "Reference-Pulse 방식 3 축 동시 제어 PC-NC 밀링 시스템 개발에 관한 연구", *한국정밀공학회지*, 제 16 권 제 11 호, pp. 197~203, 1999.
6. 이철수, 이재필, "실시간 제어에 의한 개방형 CNC 소프트웨어 모듈의 설계 및 구현", *한국공작기계학회지* 제 8 권 제 5 호, pp.54~62, 1999
7. 이철수, 이재필, "고속가공을 위한 2 단계 모션 제어 루프와 선독 알고리즘의 구현", *한국공작기계학회지*, 제 9 권, 제 6 호, pp. 71-81, 12 월, 2000.