

열림 모드에 대한 형상 최적화

Shape Optimization for Opening Mode in Fracture Mechanics

한 석 영*(한양대), 송 시 엽(한국철도차량)

Seog Young Han(Hanyang univ.), See Yeob Song(Korean Rolling Stock Co.)

ABSTRACT : The relationship between structural geometry and number of life cycles to failure is investigated to improve the fatigue life of structural components. The linear elastic fracture mechanics(LEFM) approach is integrated with shape optimal design methodology. The primary objective of this study is to decide an optimal shape for enhancing the life of the structure. The results from LEFM analyses are used in the fatigue model to predict the life of the structure before failure is occurred. The shape of the structure is optimized by using the growth strain method. Relevant issues such as problem formulation, finite element modeling are explained. Three design examples are solved, and the results show that, with proper shape changes, the life of structural systems subjected to fatigue loads can be enhanced significantly.

Key words: Shape optimization(형상최적화), Fracture(파괴), Fatigue life(피로수명), Mode I(모드 I), Crack propagation(균열진전), Growth strain method(성장변형률법)

1. 서론

기계구조물의 파괴의 절반가량은 피로와 관련된 반복하중 때문에 발생한다. 그래서 피로문제는 구조설계를 하는데 있어서 주된 관심사가 되어 왔다.

기계구조물의 설계시 피로수명을 예측한다는 것은 매우 중요하다. 연구의 방법으로 크게 실험적 방법과 수치해석을 통한 시뮬레이션 방법이 있으며, 연구의 방향은 균열 성장과 관련되거나

균열 성장에 관련한 응력의 범위, 변형률의 범위, 평균응력에 대한 내용이다. 그러나 피로수명을 연장시킬 수 있는 형상에 대한 연구는 거의 전무한 실정이다.

따라서 본 연구에서는 모드 I에 관한 시뮬레이션을 통하여 세 가지 형상에 대하여 응력을 해석하고 그 결과를 이용하여 피로수명을 연장시킬 수 있는 최적화된 형상을 얻어내고자 한다.

2. 이론 해석

2.1 지배방정식

이 논문에서의 목적함수는 응력확대계수 K 로 이루어진 피로수명 N 을 최대화하는 것이다. 목적함수를 계산하기 위해서는 피로수명을 우선 표준 비선형 프로그래밍(standard nonlinear programming) 형식으로 바꾸어야 한다. 왜냐하면 목적함수가 균열이 존재하는 구조물의 수명을 연장시키는 것이기 때문이다.

$$N = N_0 + \sum_{i=1}^n \Delta N_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

여기서 N_0 는 초기에 균열이 있기 때문에 초기의 균열이 생성될 때까지의 초기 반복횟수, ΔN_i 는 i 번째 균열 전파시의 반복횟수, n 은 균열이 파괴에 이를 때의 숫자이다. 파괴란 균열로 인하여 구조물이 요구되는 수행능력을 상실할 때의 상태를 말한다. ΔN_i 의 계산은 혼합모드의 피로 균열 성장을 계산하기 위한 변형된 Paris law를 사용하며 균열 성장률은 다음과 같다.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_v)^m \quad (2)$$

여기서 C 와 m 은 실험적으로 얻어진 물질상

수이며, a 는 균열길이이다. 또한

$$\Delta K_v = \frac{1}{2} [\Delta K_I + \sqrt{(\Delta K_I^2 + \Delta K_{II}^2)}] \quad (3)$$

$$\Delta K_I = K_{I_{max}} - K_{I_{min}}, \quad \Delta K_{II} = K_{II_{max}} - K_{II_{min}}$$

$$\Delta K_I = \sqrt{2\pi} \frac{G}{1+k} \frac{|\Delta y|}{\sqrt{r}} \quad (4)$$

$$\Delta K_{II} = \sqrt{2\pi} \frac{G}{1+k} \frac{|\Delta y|}{\sqrt{r}} \quad (5)$$

$$k = 3 - 4\nu \quad (\text{평면변형률})$$

$$k = \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad (\text{평면응력})$$

여기서 G 는 전단계수, K_I 과 K_{II} 는 모드 I과 모드 II에 관련된 응력확대계수이며, 변형량을 통하여 ΔK 의 값을 구한다. 균열단합의 경우인 압축력이 작용할 경우엔 응력확대계수 K 의 값이 존재할 수 없다는 개념을 기본으로 하여 피로 균열성장 자료들은 인장력을 가한 상황에서 계산한다. 부연하면, 압축력은 균열성장 거동에 있어서 영향을 미치지 못한다.

$$\int dN = \Delta N = \int \frac{da}{c\Delta K_{vmax}^m} \quad (6)$$

식 (6)의 균열성장예에 따른 피로수명을 계산하기 위하여 도입한 가정은 다음과 같다.

- ① 균열 증가량 a 는 구조물의 크기에 비해 매우 작다.
- ② 응력확대계수는 선형함수인 $K = K(a)$ 로 근사화할 수 있다.

위의 가정을 이용하여 $K = K(a) = ma + b$ 라 하여 식 (6)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta N = \frac{1}{c} \int_{a_i}^{a_f} (ma + b)^{-m} \quad (7)$$

$$\Delta N = \frac{1}{c(1-m)y} [(ma + b)^{1-m}] \quad (8)$$

$$\Delta N = \frac{1}{c(1-m)y} (\Delta K_1^{1-m} - \Delta K_0^{1-m}) \quad (9)$$

여기서 ΔK_0 는 균열의 증가 시작부분에서의

ΔK_{vmax} 값, ΔK_1 는 균열의 증가 끝부분에서의 ΔK_{vmax} 값이며, y 는 다음과 같이 정의되는 기울기이다.

$$y = \frac{\Delta K_1 - \Delta K_0}{a_1 - a_0} = \frac{\Delta K_1 - \Delta K_0}{\Delta a} \quad (10)$$

위 식들을 이용하여 결과적으로 식 (1)을 계산할 수 있다.

2.2 성장-변형률법 (Growth-Strain Method)

성장-변형률법은 매개변수를 균일하게 분포시키는 과정에서 발생하는 체적변형으로 형상을 최적화 시키는 것으로 다음과 같은 2단계의 반복과정으로 구성되어 있다. 첫 단계는 역학적인 조건 하에서 매개변수를 계산하기 위한 응력 해석 단계이며, 두 번째 단계는 응력 해석을 바탕으로 계산된 결과에 의해 구조물의 형상을 최적 형상으로 변화 시켜 가는 성장해석(체적변형) 단계이다. 매개변수가 균일화된 형상을 만들기 위해서는 체적변형의 발생법칙이나 성장법칙인 식 (11)에 따라 매개변수의 함수로써 체적변형을 발생시키는 것이 합리적이다. 모든 요소에서 축소 체적변형은 σ 와 $\bar{\sigma}$ 의 편차에 비례해서 σ 가 $\bar{\sigma}$ 보다 작은 곳에서 발생하고, 팽창 체적변형은 σ 가 $\bar{\sigma}$ 보다 클 때 발생한다. 이를 그림으로 표현하면 다음 Fig. 1과 같다.

$$\epsilon_{ij}^B = \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{\sigma} \delta_{ij} h \quad (11)$$

식 (11)에서 ϵ_{ij}^B 는 체적변형, σ 는 매개변수(예를 들면, Mises 응력), $\bar{\sigma}$ 는 매개변수의 기준값(예를 들면 평균응력), δ_{ij} 는 Kronecker d

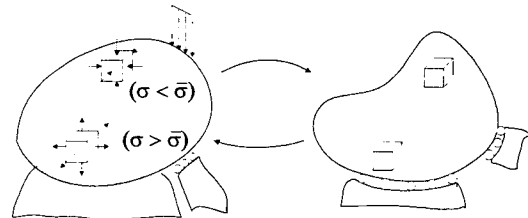


Fig. 1 The principle of the growth-strain method

그리고 h 는 성장변형의 크기를 조절하는 1보다 훨씬 작은 임의의 상수인 성장률이다.

$$\epsilon_{ij}^T = \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (12)$$

여기서 열응력 해석을 고려하면, 물체를 열등방성이라고 가정할 때 발생하는 열변형은 식 (12)와 같이 전단 성분이 없는 체적변형만을 발생시킨다. 그러므로 열변형은 성장해석에서의 방정식과 유사한 형태를 갖는다.

성장법칙(growth law)의 형태는 체적을 구속한 체 응력을 축소하는 방법(체적 제어)과 응력을 구속한 체 체적을 축소하는 방법(응력 제어)으로 나눌 수 있다. 위에서 언급한 두 단계의 과정을 반복함으로써 균일한 매개변수를 갖는 형상을 얻을 수 있으나 관심 있는 문제에 대해서 이 결과가 체적이 감소했는지 증가했는지 알 수 없다. 따라서 체적을 목표값으로 제어하기 위해 식 (11)을 개선하여 체적을 제어할 수 있는 개선된 성장법칙 식 (13)을 유도하였다. 각 반복에서 성장변형에 의한 체적의 변화량은 외란(disturbance)과 같이 간주되어질 수 있고 이 문제는 자동제어 이론에서 외란에 대한 자동조절 (automatic regulation)에 대응할 수 있다. 그러므로 체적제어는 PID 제어의 개념을 이용해 수행될 수 있으며, 식 (14)에서와 같이 평균 응력은 기본값으로 사용된다. 유사한 방법으로 응력을 제어할 수 있는 개선된 성장법칙 식 (15)를 유도하였다.

따라서, 체적 제어는 식 (13)와 (14)에 의해, 응력 제어는 식 (15)에 의해 PID 제어 개념을 이용하여 효율적으로 제어할 수 있다.

$$\epsilon_{ij}^{B(n)} = \frac{\sigma^{(n-1)} - \bar{\sigma}^{(n-1)}}{\sigma^{(n-1)}} \delta_{ij} h - \left\{ K_P \frac{V^{(n-1)} - V_{obj}}{V_{obj}} + K_I \sum_{k=1}^{n-1} \frac{V^{(k)} - V_{obj}}{V_{obj}} + K_D \frac{V^{(n-1)} - V^{(n-2)}}{V_{obj}} \right\} \quad (13)$$

$$\bar{\sigma}^{(n-1)} = \sum_e \frac{\sigma_e v_e}{V^{(n)}} \quad (14)$$

$$\epsilon_{ij}^{B(n)} = \frac{\sigma^{(n-1)} - \sigma_{obj}}{\sigma_{obj}} \delta_{ij} h + \left\{ K_P \frac{\sigma_{max}^{(n-1)} - \sigma_{obj}}{\sigma_{obj}} \right.$$

$$\left. + K_I \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sigma_{max}^{(k)} - \sigma_{obj}}{\sigma_{obj}} + K_D \frac{\sigma_{max}^{(n-1)} - \sigma_{max}^{(n-2)}}{\sigma_{obj}} \right\} \quad (15)$$

여기서 (n) 은 n 번째 반복횟수, K_P , K_I , K_D 는 비례상수, v_e 는 각 요소의 체적, σ_e 는 각 요소의 대표응력, V_{obj} 는 목표하는 총 체적, $V^{(n)}$ 는 n 번째 반복횟수에서의 총 체적을 의미한다. σ_{obj} 는 목표 응력값이며 $\sigma_{max}^{(n)}$ 는 n 번째 반복횟수에서의 응력의 최대값이다.

3. 결과 및 고찰

해석 결과는 Mises응력, 응력확대계수, 체적의 변화와 피로수명을 나타내었다.

3.1 모드 I 양식에 대한 형상최적화

3.1.1 Single Edge Crack Specimen

Fig. 2와 같은 single Edge Crack 시편에 대하여 체적 제어를 수행하여 체적의 목표값을 초기 체적의 100%로 설정하고, h 값을 0.05로, K_P , K_I , K_D 값을 각각 2.7, 2.7, 0으로 설정하여 형상 최적화를 수행하였다.

이 때 최적화 된 형상을 Fig. 3에 나타내었으며 초기 체적값에 대한 체적과 최대 Mises 응력에 대한 응력비와 모드 I에 대한 응력확대계수에

Table 1 Data for Single Edge Crack Specimen

Item	Value
E Modulus of Elasticity	71 GPa
σ maximum load	28.220 Pa
σ minimum load	28.018 Pa
ν Poisson ratio	0.33
t Thickness	2.54 mm
K_{ic} Material toughness	29 MPa \sqrt{m}
σ_Y Yielding stress	523 MPa
a Initial crack length	25.4 mm

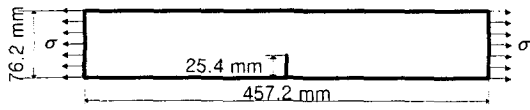


Fig. 2 Model of a Single Edge Crack Specimen

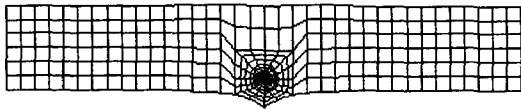


Fig. 3 Optimized shape of a Single Edge Crack Specimen

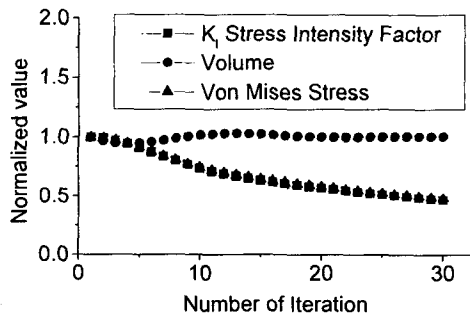


Fig. 4 Change of volume, stress, and K_I Stress Intensity Factor of optimized shape of a Single Edge Crack Specimen due to number of iteration by volume control

대한 계수비를 Fig. 4에 나타내었다.

최적화 된 형상의 체적은 초기값의 100%이고 최대 Mises 응력값과 모드 I에 대한 응력확대계수의 값은 초기값의 48.2%, 46.8%로 감소하였다.

피로수명의 계산은 식 (1)에서 N_0 를 0이라 두고서 c값은 $2.71 \times 10^{-8} \frac{mm/cycle}{(MPa\sqrt{m})^m}$, m값은 3.70로 계산하였을 때, 원래의 모델은 6회였으나 최적화 된 모델의 경우 105회로 크게 증가하였다.

3.1.2 Center Crack Tension Specimen

Fig. 5와 같은 Center Crack Tension 시편에

대하여 체적 제어를 수행하여 체적의 목표값을 초기 체적의 100%로 설정하고, h값을 0.05로, K_P, K_I, K_D 값을 각각 5.4, 5.4, 0으로 설정하여 형상 최적화를 수행하였다.

이 때 최적화 된 형상을 Fig. 6에 나타내었으며 초기 체적값에 대한 체적과 최대 Mises 응력에

Table 2 Data for Center Crack Tension Specimen

Item	Value
E Modulus of Elasticity	71 GPa
σ maximum load	59.411 Pa
σ minimum load	59.073 Pa
ν Poisson ratio	0.33
t Thickness	2.54 mm
K_{Ic} Material toughness	29 MPa \sqrt{m}
σ_Y Yielding stress	523 MPa
a Initial crack length	50.8 mm

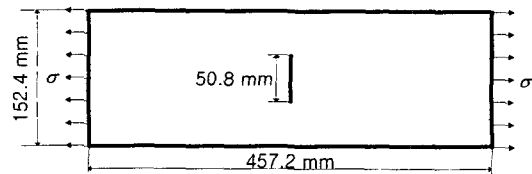


Fig. 5 Model of Center Crack Tension Specimen

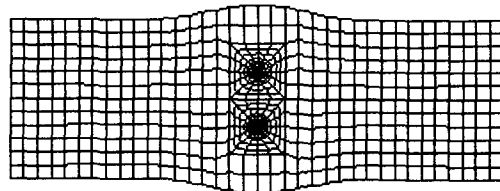


Fig. 6 Optimized shape of a Center Crack Tension Specimen

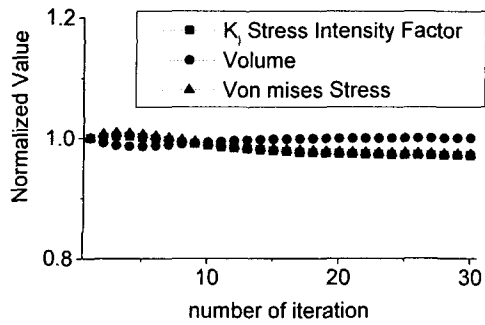


Fig. 7 Change of volume, stress, and K_I Stress Intensity Factor of optimized shape of a Center Crack Tension Specimen due to number of iteration by volume control

Table 3 Data for Compact Tension Specimen

Item	Value
E Modulus of Elasticity	71 GPa
P maximum force	4880 N
P minimum force	4870 N
ν Poisson ratio	0.33
t Thickness	25 mm
K_{ic} Material toughness	29 MPa \sqrt{m}
σ_Y Yielding stress	523 MPa
a Initial crack length	10 mm

대한 응력비와 모드 I에 대한 응력확대계수에 대한 계수비를 Fig. 7에 나타내었다.

최적화 된 형상의 체적은 초기값의 100%이고 최대 Mises 응력값과 모드 I에 대한 응력확대계수의 값은 초기값의 97.1%, 97.3%로 감소하였다.

피로수명의 계산은 식 (1)에서 N_0 를 0이라 두고서 c값은 $2.71 \times 10^{-8} \frac{mm/cycle}{(MPa\sqrt{m})^m}$, m값은 3.70로 계산하였을 때, 원래의 모델은 10회였으나 최적화 된 모델의 경우 12회로 증가하였다.

3.1.3 Compact Tension Specimen

Fig. 8과 같은 Compact Tension 시편에 대하여 체적 제어를 수행하여 체적의 목표값을 초기 체

적의 100%로 설정하고, h값을 0.05로, K_P, K_I, K_D 값을 각각 15, 2, 0으로 설정하여 형상 최적화를 수행하였다.

이 때 최적화 된 형상을 Fig. 9에 나타내었으며 초기 체적값에 대한 체적과 최대 Mises 응력에 대한 응력비와 모드 I에 대한 응력확대계수에 대한 계수비를 Fig. 10에 나타내었다.

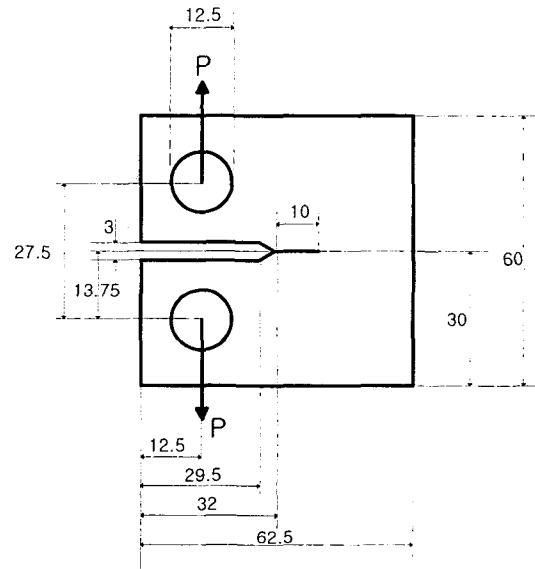


Fig. 8 Model of Compact Tension Specimen

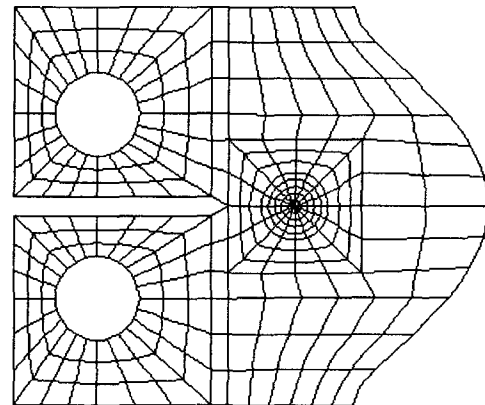


Fig. 9 Optimized shape of a Compact Tension Specimen

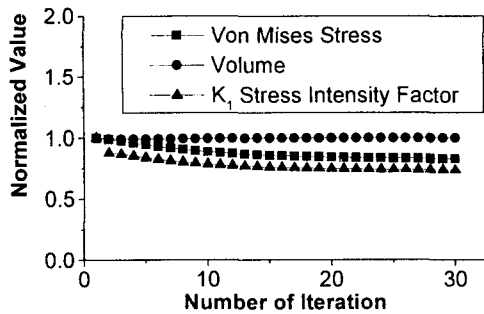


Fig. 10 Change of volume, stress, and K_I Stress Intensity Factor of optimized shape of a Compact Tension Specimen due to number of iteration by volume control

최적화 된 형상의 체적은 초기값의 100%이고 최대 Mises 응력값과 모드 I에 대한 응력확대계수의 값은 초기값의 82.81%, 73.6%로 감소하였다.

피로수명의 계산은 식 (1)에서 N_0 를 0이라 두 고서 c 값은 $2.71 \times 10^{-8} \frac{mm/cycle}{(MPa\sqrt{m})^m}$, m 값은 3.70로 계산하였을 때, 원래의 모델은 66회였으나 최적화 된 모델의 경우 245회로 크게 증가하였다.

4. 결론

본 논문에서는 수치해석을 이용하여 초기균열이 존재하는 시편의 형상을 최적화하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- ① 형상최적화기법인 성장변형률법과 LEFM 계산을 통하여 구조물의 피로수명을 연장시킬 수 있었다.
- ② 형상최적화 된 Single Edge Crack 시편과 Compact Tension 시편의 피로수명을 계산해 본 결과 각각 105회, 245회로 1750%, 371.2% 증가하였다.
- ③ 형상최적화 된 Center Crack Tension 시편의 경우 피로수명을 계산한 결과 초기의 10회에서 12회로 120% 증가에 그쳐 균열이 시편의 중앙에 위치한 경우엔 형상최적화를 통한 피로수명 연장의 효과가 적게 나타났다.

참고문헌

1. L. Gani and S. D. Rajan, 1999, Use of Fracture Mechanics and Shape Optimization for Component Designs, AIAA JOURNAL, Vol. 37, No. 2, pp. 255-260
2. Shimoda, m., Sajura, T., Kondo, Y. and Azegami, H., 1993, Shape Optimization of Solid Structures Using the Growth Strain Method (Application to Chassis Components), SAE 1992 Transactions, Vol. 101, Section 6, pp. 1136-1145
3. Barry, D., Fehl Kevin Z. Truman, 1999, An evaluation of fracture mechanics quarter-point displacement techniques used for computing stress intensity factors, Engineering Structures 21, pp406-415
4. I. L. Kim, L. W. Johnston and S. K. Choi, 1992, Comparison between various displacement-based stress intensity factor computation techniques, International Journal of Fracture, Vol. 58, pp. 193-210
5. H. L. J. PANG, 1993, Linear elastic fracture mechanics benchmarks: 2D finite element test cases, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 44, No. 5, pp. 741-751
6. Kaihong Wei and Jean-Claude de Bremaecker, 1993, Fracture under compression: the direction of initiation, International Journal of Fracture, Vol. 61, pp. 267-294
7. Klaus-Juergen Bathe, 1996, Finite Element Procedures, International ed., Prentice-Hall, Inc.
8. Hiroshi Tada, Paul C. Paris and George R. Irwin, 1973, The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corporation.
9. Norman E. Dowling, 1999, Mechanical Behavior of Materials (Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue), 2nd ed., Prentice-Hall, Inc.