중등학교 수학 영재교육을 위한 프로그램 및 교수-학습 자료 개발에 관한 연구

한 인 기 (경상대학교)

Ⅰ. 서 론

최근 들어, 수학 영재교육에 대한 국민적 관심이 크게 증대되고, 이에 따라 효율적인 수학 영재교육을 위해 국가적 차원에서의 정책적 지원과 함께 이를 위한 다양한 방법들이 모색되고 있는 것은 매우 바람직하다고 할 수 있다. 특히, 2000년 1월에 영재교육진흥법이 제정되어, 2002년 3월부터는 이 법을 시행하도록 되어 있는데, 이것은 영재교육의 활성화를 위한 중요한 바탕이 될 수 있을 것으로 기대된다.

영재교육 기관으로는 초・중학교 수준에서는 과학기술부에서 1998년부터 지원하고 있는 각 시・도별 대학 부설의 과학 영재교육 센터가 있는데, 이 센터에서는 초・중학교 학생들을 대상으로 수학, 과학, 정보과학 분야의 영재교육이 실시하고 있다. 그리고, 고등학교 수준에서는 1983년부터 설립된 각 시・도별 과학고등학교나 민족사관 고등학교에서의 영재교육을 들 수 있다. 최근 수학교육학계에서는 이러한 영재교육 기관에서의 성공적인 영재교육을 위한 학술적인 연구들이 진행되고 있다(신현용・류익승・한인기, 2000; 김주봉, 1999; 방승진, 1999; 최원, 1999 외 다수).

한편, 영재교육에 관련하여 최근의 주목할 만한 것으로는 국가적인 지원을 받아 영재 교육과정의 시안이 개발되었다는 점이다. 한국교육개발원에서는 과학기술부의 지원을 받아 대학교 부설 과학영재교육센터의 과학 영재교육을 위한 교육과정 개발 연구를 수행했는데, 이 연구에는 수학과 과학 교과의 영재교육과정 개발을 위한 기초 연구들과 수학과 과학 분야의 영재교육을 위한 몇몇 구체적인 주제들이 나열되어 있다.

1999~2000년에 걸쳐서는 교육부의 지원을 받아 한국교육개발원에서 국어, 영어, 수학, 과학, 사회 분야의 영재 교육과정 개발 연구를 수행하여, 초・중・고

등학교 수준의 영재 교육과정 시안이 개발되어 발표되었다. 이 영재 교육과정 시안에는 외국의 영재 교육과정을 분석하여, 초·중·고등학교 수준의 영재학교에서 수학 영재교육을 위한 구체적인 프로그램이 제시되어 있다. 이러한 영재 교육과정이 좀더 구체적이고 개선된 형태로 정교화되기 위해선 상응하는 교수-학습 자료의 개발이 필수적이라 할 수 있다. 그러나, 우리 나라에서는 아직 영재아들을 위한 교재의 연구·개발이 거의 이루어지지 못하고 있는 실정이다.

국내 전문가들에 의한 중등학교 수학 영재교육을 위한 프로그램이나 교수-학습 자료 개발에 관련된 연구들이 최근 들어 활발하게 진행되고 있는데, 중등학교 수준에서의 수학 영재교육 프로그램 개발에 관련된 연구로는 신현용·한인기·이종욱·김희선(1999)의 연구, 한인기(1999a, 2001a)의 연구, 방승진(2000)의 연구, 신현용·류익승·한인기(2000)의 연구, 최원(1999)의 연구 등을 들 수 있으며, 수학 영재교육을 위한 교수-학습 자료 개발에 관련된 연구로는 신현용·한인기(2001)의 연구, 박종률·김인수(1999)의 연구, 신현용·최은주(2000)의 연구, 한인기·이상근(2000)의 연구, 한인기(2000c)의 연구 등을 들 수 있다. 이러한 연구들은 외국의 영재교육 사례 분석 연구나 과학 고등학교에서의 영재교육 사례, 과학 영재교육 센터에서의 영재교육 사례, 문헌 연구를 통한 수학 영재들의 인지적 특성에 상응하는 수학 교수-학습 자료 개발 등에 관련된 연구들로써, 우리 나라 수학 영재교육의 정체성 확립을 위해 중요한 기초 연구 자료들이다. 그러나, 이러한 연구들이 아직 체계적으로 이루어지지 못하고 있기 때문에, 효율적인 영재교육을 위한 체계적인 접근 방법이 형성되어 있지 못한 실정이다.

본 연구에서는 수학 영재교육을 위한 프로그램 개발 및 교수-학습 자료 개발에 관련된 다양한 문헌들을 분석함으로써, 수학 분야에서 효율적인 영재교육을 위한 프로그램 개발 및 교수-학습 자료 개발을 위한 바람직한 방향을 도출하고, 이러한 방향에 상응하는 구체적인 수학 교수-학습 자료의 개발을 예시할 것이다.

Ⅱ. 중등학교 수학 영재교육 프로그램

국내외의 몇몇 수학 영재교육 프로그램들을 개략적으로 살펴보기로 하자. 이러한 영재교육 프로그램에 포함된 주제들을 통해 '영재아들에게 무엇을 가르칠 것인가?'에 대한 방향을 설정할 수 있을 것으로 기대된다.

(7) 컴퓨터
2단계: 프랙탈과 카오스; 컴퓨터와 수학 1
3단계: 컴퓨터와 수학 2

(8) 자연 과학
3단계: 생명 수학

(9) 경영·경제 수학
3단계: 보험과 수학; 경제 수학의 기초

3. 한국교육개발원(1999a)의 과학 영재교육을 위한 교육과정 개발 연구

과학 영재교육을 위한 교육과정 개발 연구는 과학기술부에서 지원하는 시·도별 과학 영재교육 센터의 교육과정 개발을 목적으로 하였다. 이 연구에서는 영재교육 프로그램의 주제 선정에서, 첫째 영재교육 프로그램에 포함되는 주제들은 다양한 유형의 사고 활동을 개발, 육성할 수 있는 것들이며, 둘째 수학 영재 프로그램에 포함되는 주제들은 수학적으로도 그 내용의 질적 수준이 높은 것이어야 하며, 셋째 주제에 포함된 하위 학습 과제들이 체계화될 수 있는 주제들이어야 하며, 넷째 풍부한 수학적 사고 활동의 습관을 개발시킬 수 있는 주제들이어야 하며, 다섯째 학생들이 조작물과 학습 도구를 통해 실험, 실측, 조작, 관찰 등 구체적인 활동을 할 수 있는, 그리고 이를 통한 창의적 사고의 경험을 제공할 수 있는 주제들이어야 하며, 여섯째 학습 주제에서 수업과 평가는 상호 보완적인 관계를 유지하면서 통합적으로 이루어져야 한다는 측면 등을 고려하였다.

이 연구를 통해 제시된 중학교 학생용 심화 학습 과정을 학년별로 살펴보면,

1학년: 사칙 연산과 게임; 약수와 배수; 합동을 이용한 도형의 성질 탐구; GSP를 이용한 동적 기하

2학년: 비둘기 집의 원리; 인수분해; 피보나치 수열과 황금분할; 삼각형의 닮음과 작도

3학년: 증명에서의 오류들; 도형의 절단; 피타고라스의 정리; 확률과 통계.

이때, 심화 학습 과정은 각 과목별로 12시간을 기준으로 하는 과목 단위의 운영을 기본으로 하며, 수학과 과학 교과의 과정별 연간 수업 시간수의 총합이 240시간을 기준으로 구성되어 있다.

4. 러시아의 수학 심화 선택 교육과정

러시아 연방 교육부에서 1990년에 발간한 교육과정에서 수학 심화 선택 교육과정을 자세히 살펴보기로 하자. 수학 심화 선택은 기본 교육과정에서 제시되는 수학적 지식을 심화하고, 좀더 어렵고 다양한 문제의 해결 능력을 획득하며, 수학에 대한 흥미를 육성하고, 수학에 대한 식견을 쌓고, 수학에 대한 자신의 견해를 넓히며, 수학의 응용 측면과 깊이 있게 접하게 되고, 전문적으로 수학을 연구할 수 있는 기반을 다진다.

선택 수학은 성격상 크게 두 과정으로 나눌 수 있다: 7-9학년 과정과 10-11학년 과정. 7-9학년 과정에서는 개별적인 주제들(서로 간에 꼭 연결되어야 하는 것은 아닌)을 학습한다. 이 주제들의 선택에 있어서는 ① 각 주제들이 수학 내적인, 그리고 응용적인 측면에서 어떤 의미를 가지는가? ② 기본 교육과정의 내용들을 고려한 학습 양의 수준, ③ 학생들이 흥미를 가지고 접근할 수 있으면서 심화학습을 할 수 있는 가능성과 그에 상응하는 수학 문제들을 준비할 수 있는가의 가능성을 고려하게 된다.

10-11학년 과정은 기본 교육과정에 대한 체계적인 심화의 성격을 강하게 띄며 계속적으로 수학을 공부하는 것에 대한 준비와 대학 입학 시험을 준비하는 기능을 가진다. 뿐만 아니라, 선택 수학은 기본 교육과정의 내용들을 현대 수학의 내용들과 연결시키는 역할도 한다. 7-9학년의 선택 수학이 실제적인 경향이 강한 반면, 10-11학년 과정은 수학의 이론적인 측면이 강하다.

본 논문에서는 수학 심화 선택의 학습 내용들 중에서 7-9학년의 내용들과 주제별 시간 계획을 구체적으로 살펴보기로 하자.

(1) 7학년

(가) 수와 도형에 대해 흥미있고 재미있는 것들. 잘못된 결론과 그 밖의 다른 오류들. 시각적으로 속이기. 빠진 숫자들을 다시 넣기. 규칙성의 발견과 그들의 확인. (6시간)

(나) 다양한 기수법 체계에 대한 이해. 2진법. 2진법 체계로 수를 쓰는 것과 관련된 수학적 놀이들. 컴퓨터에 대한 토론. (6시간)

(다) 집합과 원소. 집합을 표현하는 방법들. 부분집합. 공집합. 집합에서의 연산. 수 집합. (8시간)

(라) 함수의 그래프: $y=f(x)$꼴의 함수에 대한 그래프가 주어졌을 때, $y = f(x)+b$, $y = -f(x)$, $y = kf(x)$, $y = (f(x))^2$, $y = \frac{1}{f(x)}$, $y = f(x)+\varphi(x)$, $y = |f(x)|$와 방정식 $|y| = f(x)$의 그래프 그리기. (12시간)

(마) 지수가 자연수인 거듭제곱의 식을 간단히 하기. 삼각형의 합동 조건(도형들이 그림으로 제시된 상황에서 문제들을 풀기). 절대값을 포함한 방정식을 풀기(예를 들어, $|2x+1| = 2$; $|\frac{x}{2}-3| = 5$; $x+|x| = 5$; $x+|x-2| = 3$ 등등). (10시간)

(바) 다항식을 다항식으로 나누고, 곱셈을 이용해 검증하기. 다항식 $M(x)$가 이항식 $x-a$로 나누어 떨어지는 성질. 다항식을 다항식으로 인수분해 하기(난이도가 있는 문제들에 대해). 기하 증명 문제의 풀이. (10시간)

(사) 작도 문제의 풀이. 궤변들: '원이 두 개의 중심을 가진다', '한 점으로부터 직선에 수직인 두 수선', '세 번째 직선에 평행이고 만나는 두 직선들' 등등. (8시간)

(아) 난이도 있는 문제들의 풀이. (10-12시간).

(2) 8 학년

(가) 작도 문제. 특이한 작도들. (6시간)

(나) 무한 집합. 가산집합. 유리수 집합의 가산성. '다른' 무한성. 실수 집합의 비가산성. (6시간)

(다) 주어진 세 선분에 비례하는 네 번째 선분의 작도. 삼각형의 각의 이등분선의 성질. 피타고라스 정리의 다양한 증명들. 산술 평균과 기하 평균의 작도. 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. $n \in N$일 때, $\sqrt{n}$의 작도. 페르마의 대 정리. 황금 분할과 예술 분야에서의 의의. (8시간)

(마) 정리와 그 역. 정리와 그 역의 관계. 필요 조건과 충분 조건. 문제 풀이. (6시간)

(바) 그래프 $y=f(x)$에 의한 $y=\sqrt{f(x)}$의 작도. 좌표 평면에 주어진 조건을 만족시키는 점들의 작도(예를 들면, $y+|y| = x+|x|$, $x^2+y^2 = 9\frac{|x|}{x}$, $(x^2+y^2-16)y - |x^2+y^2-16|x = 0$ 등등). (6시간)

(사) 이차방정식의 풀이와 관계된 재미있는 내용의 대수 문제 풀이. 근과 계수의 관계(비에타의 정리)와 그 활용. 이차방정식을 암산으로 풀기. 구간 방법에 의해 부등식 풀기. 절대값을 포함하는 부등식. 부등식의 증명. (14시간)

(아) 좌표를 도입해 평면기하 문제를 풀기. 삼각형의 닮음. 삼각형의 요소를 계산하는 문제들. 증명 문제들. (10시간)

(자) 난이도 있는 문제들의 풀이. (10-12시간)

(3) 9학년

(가) 수학적 귀납법. 다항식의 제곱. 순열과 조합. 파스칼의 삼각형. 이항정리. (10시간)

(나) 함수 그래프들의 이동: 평행이동, 좌표축을 따라. 그래프를 보고 함수의 성질을 알기. 다양한 절대값을 가진 함수의 그래프를 작도하기. 방정식 $ax^2+bx+c = 0$, $ax^2 = \frac{k}{x}$ 등등의 그래프. (14시간)

(다) 유리 방정식의 풀이 방법(인수분해, 새로운 변수의 도입). 연립방정식의 풀이 방법들. 절대값을 포함한 부등식들. (12시간)

(라) 벡터 방법에 의한 평면 기하 문제의 풀이. 삼각함수를 이용한 문제 풀이 (12시간)

(마) 난이도 있는 문제들의 풀이. (16-18시간)

5. 러시아의 수학 통신 영재교육의 교육과정

러시아에서는 다양한 수학 통신 영재교육이 이루어지고 있는데, 본 연구에서는 그러한 통신 영재교육 기관의 하나인 상뻬쩨르부르그 수학 영재 통신학교의 교육과정을 신현용・한인기・이종욱・김희선(1999)의 연구를 중심으로 살펴보기로 하자.

상뻬쩨르부르그 국립대학교의 수학영재 통신학교의 교육과정은 두 가지 종류로 나눌 수 있는데, 개별적인 학습자를 위한 교육과정과 수학 동아리를 위한 교육과정이다. 수학 동아리는 일반 학교의 수학 교사들이 지도하는데, 이때 사용되는 학습 프로그램과 자료들을 상뻬쩨르부르그 국립대학교의 수학영재 통신학교에서 제공한다.

개별적인 학생들(9 - 11학년)을 위한 교육과정은

(1) 문제풀이: 각종 수학 통신학교 입학 시험 문제 풀이(잡지 "끄반트"에 게재됨)

(2) 재미있는 논리: 세 가지 유형의 논리 문제들

(3) 정수-1: 나누어 떨어짐의 정의와 간단한 성질들; 나머지를 가지는 나누기; 나누어 떨어지는 조건; 최대공약수; 유클리드 호제법

(4) 조합과 확률-1: 세는 방법들

(5) 게임이론: 승리 전략 '대칭에 의한 탐색'과 '끝에서부터 분석'

(6) 선형 함수: 크로넥커의 델타; 가우스 기호

(7) 그래프 이론-1: 그래프의 개념; 꼭지점의 차수와 변의 수를 헤아리기; 경로; 순환

(8) 비둘기 집의 원리: 비둘기 집의 원리를 문제 풀이에 사용하기

(9) 정수-2: 서로소; 이원 일차 방정식들; 소수; 비교

(10) 이차함수: 포물선; 이차 방정식; 이차 방정식의 그래프 해법; 이차 방정식의 탐구; 이차 방정식의 근의 위치; 근과 계수의 관계; 이차 함수.

(11) 조합과 확률-2: 수 $_nC_k$; 파스칼의 삼각형; 구와 그 경계

(12) 삼각 방정식과 부등식-1: 삼각 함수

(13) 다항식-1: 기본 개념들; 다항식의 나눗셈; 나머지가 있는 다항식의 나눗셈; 나머지 정리; 조립제법

(14) 도함수와 접선: 접선의 방정식; 원, 포물선, 타원에서의 접선

(15) 복소수: 복소수에서의 연산; 복소평면; 복소수의 크기; 편각; 복소수의 극형식; 드무아브르의 정리; 복소수 방정식에서 근을 구하기; 비에타의 공식(근과 계수의 관계)

(16) 함수의 최대값과 최소값: 개본 개념들; 함수의 최대값과 최소값을 구하는 일반적인 방법들; 도함수를 이용한 탐구

(17) 지수와 로그 방정식과 부등식: 지수 방정식; 로그화; 변수를 바꾸기; 단조성의 이용; 로그 방정식; 로그의 밑을 바꾸기; 지수와 로그 부등식

(18) 벡터-1: 점에서 평면까지의 거리; 직선과 평면 사이의 각; 교차하는 직선 사이의 각; 평면 사이의 각

(19) 넓이와 적분: 넓이의 계산; 가법성(additivity); 불변성

(20) 삼각 방정식과 부등식-3: 평이한 삼각 방정식; 삼각 방정식의 풀이; 삼

각 부등식의 풀이

(21) 대학 입시 문제들

동아리들(8 - 11학년)을 위한 통신학교 교육과정은

(1) 문제의 풀이

(2) 재미있는 논리: 세 가지 유형의 논리 문제들

(3) 선형 함수: 선형함수; 수의 절대값

(4) 게임이론: 승리 전략 '대칭에 의한 탐색'과 '끝에서부터 분석'

(5) 조합과 확률-1: 세는 방법들

(6) 정수-1: 나누어 떨어짐의 정의와 간단한 성질들; 나머지를 가지는 나누기; 나누어 떨어지는 조건; 최대공약수; 유클리드 호제법

(7) 그래프 이론-1: 그래프의 개념; 꼭지점의 차수와 변의 수를 헤아리기; 경로; 순환

(8) 비둘기 집의 원리: 비둘기 집의 원리를 문제 풀이에 사용하기

(9) 정수-2: 서로소; 이원 일차 방정식들; 소수; 비교

(10) 부등식-1: 수의 비교; 기하학적 부등식; 코시의 부등식

(11) 선형함수-2: 크로넥커의 델타; 가우스 기호

(12) 조합과 확률-2: 수 $_nC_k$; 파스칼의 삼각형; 구와 그 경계

(13) 부등식-2: 항등 변환; 부등식에서 연역; 모든 유형의 부등식

(14) 그래프 이론-2: 오일러의 그래프; 나무들; 오일러의 공식

(15) 이차함수: 포물선; 이차 방정식; 이차 방정식의 그래프 해법; 이차 방정식의 탐구; 이차 방정식의 근의 위치; 근과 계수의 관계; 이차 함수

(16) 벡터-1: 선분들의 관계와 평행성; 점들의 무게중심; 각들과 거리의 계산; 점 직선사이의 거리

(17) 삼각방정식과 부등식-2: 역삼각함수; 삼각변환

(18) 다항식-1: 기본 개념들; 다항식들의 나눗셈; 나머지가 있는 다항식의 나눗셈; 나머지 정리; 조립제법

(19) 통신 수학올림피아드-1: 기하학에서의 작도; 평면과 공간에서의 작도; 작도의 특이한 예들

(20) 도함수. 접선: 접선의 방정식; 원, 포물선, 타원에서의 접선

(21) 복소수: 복소수에서의 연산; 복소평면; 복소수의 크기; 편각; 복소수의 극형식; 드무아브르의 정리; 복소수 방정식에서 근을 구하기; 비에타의 공식(근과 계수의 관계)

(22) 함수의 최대값과 최소값: 개본 개념들; 함수의 최대값과 최소값을 구하는 일반적인 방법들; 도함수를 이용한 탐구

(23) 다항식-2: 다항식의 근들; 정수인 계수를 가지는 다항식의 유리근; 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^k$로 나누어질 때, 최대 양수 k에 관한 성질; 근과 계수의 관계; 대수학의 기본 정리와 그것의 활용

(24) 삼각방정식과 부등식-3: 간단한 삼각방정식; 삼각방정식의 풀이; 삼각부등식의 풀이

(25) 벡터-2: 점에서 평면까지의 거리; 직선과 평면 사이의 각; 같은 평면에 있지 않는 직선들 사이의 각; 평면들 사이의 각

(26) 넓이와 적분: 넓이의 계산; 가법성; 불변성

(27) 지수와 로그 방정식과 부등식: 지수방정식; 로그화; 변수의 변환; 단조성의 이용; 로그방정식; 주어진 로그에 대하여 수를 찾는데 관련된 조작들; 밑수의 변환; 지수와 로그 부등식

(28) 대학입시 문제들

6. 딘낀 교수의 강의록

한인기(1999a)의 연구를 중심으로 딘낀 교수의 강의 요목 일부를 살펴보기로 하자. 소개되는 강의 요목은 딘낀 교수가 모스크바 №2 학교에서 주당 2시간씩의 강의와 5시간씩의 세미나를 통해 10학년 수학 영재 학생들에게 '해석과 선형 대수' 강좌에서 강의했던 내용들의 일부이다. '해석과 선형 대수' 강좌는 한 학기(9월 - 1월)에 걸쳐 개설된 것인데, 그 안에는 'n차원 벡터 공간에서 유클리드 계량'(9월에서 10월 중순까지), '길이, 넓이와 부피'(10월 하순에서 11월), '선형 연산자(linear operator), 곡선들, 이차 곡선의 표면과 초곡면(hypersurface)'(12월에서 1월) 등이 포함되었다. 본 논문에서는 '선형 연산자, 곡선들, 이차 곡선의 표면과 초곡면'의 내용들을 구체적으로 살펴보기로 하자.

(1) 선형 범함수(linear functional), 초평면.

주어진 기저에서 선형 범함수 l의 표현: 만약, $x = \sum_i x^i e_i$이면, $l(x) = \sum_i a_i x^i$, 이때 $a_i = l(e_i)$. 일차 형식(linear forms). 기저가 변할 때, 주어진 선형 범함수에 의해 표현된 일차 형식의 변화: 만약, $f_i = \sum_j c_i^j e_i$이면, $l(f_i) = \sum_j C_i^j l(e_j)$. 초평면. 쌍대 공간과 그 차원. 유클리드 공간에서 선형 범함수. 이것들을 벡터와 동일시.

(2) 선형 연산자

예들: 동형 사상, 직교 변환, projectors. 연산자 A의 상(Im A)과 핵(Ker A). 연산자의 rank. 연산자들의 대수. 연산자로써 $P^2 = P$인 projectors(문제로). 역 연산자. 좌표에서 연산자를 표현: 만약, $\sum_i y^i e_i = A(\sum_j x^j e_j)$이면, $y^i = \sum_j a_j^i x^j$ $(i=1,2,\cdots,n)$; (a_j^i)는 기저 e_1, $\cdots$, e_n에 대한 연산자 A의 행렬. 행렬의 대수. 기저가 변할 때, 연산자의 행렬의 변화(문제로). 불변 부분 공간. 연산자의 제한(restriction). 고유 벡터와 고유치.

(3) 겹선형 범함수(bilinear functional)

예: 내적. 겹선형 범함수를 좌표에 표현. 겹선형 형식(bilinear forms). 그들의 행렬. 예: Gram의 행렬. 겹선형 범함수들, 겹선형 형식들, 행렬들 사이의 일대일 대응. 기저가 변할 때, 겹선형 범함수의 행렬의 변화(문제로). 대칭인, 그리고 반대칭(skew-symmetic)인 겹선형 범함수들과 행렬. 임의의 겹선형 범함수를 대칭인, 그리고 반대칭인 범함수들로 분해.

(4) 이차 범함수(quadratic functional). 극 범함수(polar functioal)

$B(x,y)$가 겹선형 범함수일 때, $Q(x) = B(x,x)$이면, 함수 $Q(x)$를 이차 범함수라고 부른다. 만약, 겹선형 범함수 $B(x,y)$가 대칭적이면, 이 겹선형 범함수는 이차 범함수 $Q(x)$에 대한 극 범함수라고 부른다. 만약, $Q(x) = B(x,x)$이고, $A(x,y)$가 범함수 $B(x,y)$의 대칭적인 부분이라고 하면, $Q(x) = A(x,x)$이다. 그러므로, 임의의 이차 범함수에 대해 극 범함수가 존재한다. 이 범함수는 $Q(x)$에 의해 유일하게 정의된다.

이차 범함수를 좌표에 표현. 이차 형식. 이차 범함수들, 이차 형식들, 그리고 대칭인 행렬들 사이의 일대일 대응.

(5) 유클리드 공간에서 겹선형 범함수. 수반 작용소들(adjoint operators)와 자기수반 작용소들(self-adjoint operators)

유클리드 공간에서 모든 겹선형 범함수는 (Ax, y)꼴로 유일하게 표현되고, 또한 $(x, A'y)$로도 유일하게 표현된다. 이때, 선형 연산자 A, A'을 수반 작용소들이라 한다. 자기수반 작용소들, 대칭인 겹선형 범함수들과 이차 범함수들. 자기수반 작용소들의 고유 벡터의 직교성. 자기수반 작용소의 직교 보 불변 부분공간.

(6) 주축으로 축소

보조 정리. 임의의 자기수반 작용소 A에 대해 고유 벡터가 존재한다.

따름 정리. 임의의 자기수반 작용소에 대해 고유 벡터들로 만들어지는 정규화된 기저가 존재한다. 이 기저에서 작용소의 행렬은 대각선 행렬이다.

주축으로의 축소에 관한 정리. 임의의 이차 범함수에 대해 정규화된 기저가 존재하여, 이차 범함수는 다음과 같은 이차 형식으로 표현된다:

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

(7) 이차 초평면

A가 자기수반 작용소이고, l은 벡터, c가 수일 때, 일반적인 비동질 이차 범함수는 다음과 같이 표현된다: $\Phi(x) = (Ax, x) + (l, x) + c$.

방정식 $\Phi(x) = 0$을 만족시키는 모든 점들의 집합을 이차 초평면이라고 부른다.

정리. 만약, 작용소 A가 가역적이면, 중심을 가지는 중심 초평면이다.

보조 정리. 임의의 자기수반 작용소에 대해,

$$V = ImA + KerA.$$

따름 정리. $l \in KerA$.

정리. 임의의 비중심 초평면의 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$(Ax, x) = (l, x), \text{ 이때, } l \perp ImA.$$

7. 한인기(2001a)의 통신 영재교육 학습 교재 개발

이 연구에서는 과학 영재교육 센터에서 한 학기 동안 통신 영재교육을 할 수 있는 학습 교재가 개발되었다. 학습 교재는 8개의 주제로 구성되어 있으며, 수의 성질과 관련된 주제들(소수, 나누어 떨어짐과 그 조건), 조합론과 관련된 주제들(비둘기 집의 원리 활용, 조합수학), 수학적 귀납법과 그 활용, 기하학 탐구와 관련된 문제해결 방법들(다각형의 넓이, 기하 문제해결 방법들), 그리고 경시대회 수준의 비정형적인 문제해결 탐구 등으로 이루어졌다. 개발된 수학 영재 통신 교재의 주제 및 그 구체적인 내용들을 살펴보면, 다음과 같다.

제 1주제: 소수

repunit수와 소수, 합성수; 소수와 합성수의 판정; 페르마의 인수분해 방법; 메르센 소수; 페르마 수; 페르마 소수와 정다각형 작도 문제; 합성수의 분포; 소수의 무한성과 그 증명의 활용; 쌍둥이 소수; 소수를 생성하는 몇몇 다항식들; 에라스토테네스의 체

제 2주제: 나누어 떨어짐과 그 조건

수 7, 19, 37, 57, 91을 포함한 몇몇 수들로 나누어 떨어짐에 관련된 문제들; 공배수를 활용한 문제 탐구; 나누어 떨어짐을 이용한 방정식 풀이; 나누어 떨어짐을 활용한 자연수의 성질 탐구; 합성수 판정; 나누어 떨어짐을 활용한 퍼즐 문제 탐구; 7, 11, 13으로 나누어 떨어지는 조건들

제 3주제: 비둘기 집의 원리 활용

비둘기 집의 원리 증명; 비둘기와 비둘기 집이 명확하게 주어진 문제의 해결 탐구; 비둘기나 비둘기 집이 명시되지 않은 문제에서 필요한 조건들을 만들어 문제해결; 비둘기 집의 원리를 활용한 기하학 탐구; 비둘기 집의 원리를 이용한 대수의 탐구; 비둘기 집의 원리를 이용한 존재성 증명

제 4주제: 조합수학

색칠을 이용한 문제해결 탐구; 비둘기 집의 원리를 이용한 조합론의 문제해결; Tromino를 이용한 바닥 채우기 및 논증 활동; Tetramino를 이용한 활동과 논증

제 5주제: 수학적 귀납법과 그 활용

수학적 귀납법의 원리; 수학적 귀납법을 이용한 도형의 성질 탐구; 수학적 귀납법을 이용한 분할의 성질 탐구; 수학적 귀납법과 하노이 탑 문제; 수학적 귀납법을 이용한 수의 성질 탐구; 수학적 귀납법을 이용한 부등식의 성질 탐구; 수학적 귀납법과 문제해결

제 6주제: 기하 문제해결 방법들

선대칭을 이용한 문제해결; 회전을 이용한 문제해결; 점대칭을 이용한 문제해결; 넓이를 활용한 문제해결; 기하 문제해결 방법들을 이용한 사각형의 다양한 성질 탐구

제 7주제: 다각형의 넓이

다각형 넓이의 정의; 넓이의 성질과 그 활용; 변의 길이가 실수인 정사각형의 넓이 공식 증명; 직사각형의 넓이 공식 유도; 삼각형의 넓이 공식 유도; 넓이를 활용한 도형의 성질 탐구; 다각형의 넓이를 활용한 문제해결

제 8주제: 경시대회 수준의 문제해결

다양한 수준과 유형의 경시대회에 출제된 대수, 기하, 조합, 수학 게임 등의 문제들과 유사한 수준의 다양한 비정형적인 문제들을 해결하는 활동

Ⅲ. 중등학교 수학 영재교육 프로그램의 분석

1. 한국교육개발원의 수학과 영재 교육과정 시안

한국교육개발원에서 초・중・고등학교 수준에서 수학과 영재 교육과정 시안을 마련하여 보고서 형식을 빌어 공식적으로 발표했다는 것은 우리 나라 수학 영재교육의 정체성 확립을 위해 매우 중요한 첫 걸음이라 할 수 있다.

수학과 영재 교육과정 시안의 내용을 보면, 중학교 교육과정과 고등학교 교육과정의 성격이 다르다는 것을 알 수 있다. 중학교 영재 교육과정에서는 속진과 심화가 병행되고 있지만, 심화에 더 큰 비중을 두고 있음을 알 수 있다. 즉, 중학

교 수준의 수학 영재아들에게 고등학교의 교육과정 내용을 가르치는 것이 아니라, 중학교 교육과정에 관련된 학습 내용을 좀더 깊이 있게 심화하여 제시하고 있다. 이를 통해, 학생들은 수학적 기초를 튼튼히 다지며 수학에 대한 홍미를 육성하고, 한정된 주제에 대해 심도 있는 이해를 하며, 수학에 대한 심미적인 성향을 개발·육성할 수 있을 것이다.

이것은 러시아의 7~9학년 수학 심화 학습의 성격과도 유사한데, 러시아 교육부(1994)에 의하면, '7~9학년 수학 심화 학습은 방향 제시 및 설정의 성격이 강하며, 이 단계에서는 학습자들이 자신의 수학에 대한 홍미(관심)의 수준을 인식하고, 자신의 가능성에 대해 스스로 평가할 수 있도록 도와주어야 한다. 그리고, 학생들의 수학에 대한 홍미나 수학적 지향성은 다각적인 방면에서 확고해지고 육성되어야 한다'고 했다.

한편, 고등학교 영재 교육과정에서는 초등 수학과 고등 수학을 매끄럽게 연결시키려는 시도를 볼 수 있다. 수학의 근간이 되는 대수, 해석, 기하 분야에 대한 심도있는 탐구를 통해 순수 수학 분야, 응용 수학 분야, 그리고 컴퓨터에 관련된 분야까지 연구 영역이 확대되고 있음을 알 수 있다.

고등학교 수학 영재 교육과정의 교과목들 중에서 주목할 만한 것으로 수학사 분야, 기하학 분야, 생명 수학, 그리고 경영·경제 수학을 들 수 있다. 수학사를 통해서 수학의 흐름과 수학 분야의 연구 방법들에 대한 다양한 경험을 가질 수 있기 때문에, 수학 영재 학생들에게 있어서는 꼭 필요한 교과라 할 수 있다. 한편, 기하학 분야는 학문으로써 수학의 발생부터 지금까지 수학의 중심에 위치했던 영역이고, 많은 수학적 아이디어의 寶庫라고 할 수 있기 때문에 학생들에게 꼭 필요한 분야이다. 특히, 공간에 대한 논증 기하나 벡터를 활용한 기하학 탐구 등은 현행 고등학교나 대학교 수학교육에서 간과되어온 영역으로, 이러한 내용을 고등학교 영재 교육과정에 포함시킨 것은 의미심장한 일이라 할 수 있다. 한편, 생명 수학이나 경영·경제 수학에서는 間學問적 접근이 강조되며, 미래에 이들 분야에 대한 수요가 매우 클 것이라는 예측을 감안하면, 한국교육개발원에서 개발한 수학 영재 교육과정 시안은 미래를 대비한 교육과정이라 할 수 있다.

한국교육개발원에서 제시한 수학 영재 교육과정의 단점으로는 아직 상응하는 교재들이 개발되지 않았다는 것이다. 많은 사람들은 수학 영재 교육과정 시안에 상응하는 교재들을 개발할 수 있을 것인가에 대해 의구심을 가지고 있다. 그렇기

때문에, 영재 교육과정 시안에 제시된 내용들이 타당한 것인가? 만약, 수정이 필요하다면, 어떤 내용을 어떤 방향으로 수정해야 하는가에 대한 진지한 논의도 이루어지지 못하고 있는 실정이다. 특히, 이제껏 국내에서 수학 영재아들을 위한 교재 개발 연구가 거의 없었다는 사실은 영재 교육과정 시안의 타당성에 커다란 의문을 던져주고 있다.

2. 러시아의 수학 영재 교육과정

러시아에는 살펴본 수학 통신 영재교육의 교육과정, 심화 선택 교육과정 이외에도 많은 유형의 수학 심화 학습을 위한 교육과정들이 개발되어 운영되고 있다. 예를 들어, 수학-물리 학교의 수학 영재 교육과정, 수학 동아리 활동을 위한 교육과정, 심화 교육과정, 수학 계절 학교의 영재 교육과정 등등. 이러한 교육과정들을 분석해 보면, 러시아의 수학 영재 교육과정은 적당한 속진을 바탕으로 하는 심화 중심의 교육과정임을 알 수 있다.

러시아 수학 영재 교육과정에서 특히 주목할 만한 것은 교육과정의 영역이 크게 수론, 대수, 해석, 기하, 조합론으로 구성되어 있다는 것이다. 즉, 확률이나 통계 분야는 포함되어 있지 않는데, 이것은 국제 수학 경시대회나 다양한 경시대회에서 확률·통계 분야에 관련된 문제가 없다는 것과 일치한다.

3. 딘낀 교수의 강의 요목

딘낀 교수의 강의 요목을 살펴보면, 우리 나라의 일반 대학교에서 수학을 전공하는 학생들에게 다루어지는 내용들이 많다. 이러한 내용들을 통해, 수학 자체의 구조와 의미에 대해 경험하고, 더 넓은 수학의 세계로 나가기 위한 준비를 할 수 있다.

그러나, 우리가 수학 영재교육을 계획할 때 범하기 쉬운 오류들 중의 하나는, 확장된 수학 내용에 대한 무리한 강조이다. 딘낀 교수의 강의록을 보면, 수학적 수준이 매우 높기 때문에, '수학 영재 교육이라면 그 정도는 되어야지'라고도 생각할 수도 있다. 그 결과, 확장된 수학 내용에 대한 특별한 준비없이 도입하려는 시도를 고려할 수도 있지만, 이것은 매우 위험한 일일 것이다. 러시아에서는 다양한 내용과 수준의 영재 교육 체계를 가지고 있고, 이러한 바탕 위에서 확장된 수학 내용을 도입하고 있다.

4. 한인기의 과학 영재교육 센터 통신교육 교재 개발 방향

한인기(2001a)에 의하면, 수학 영재 통신 교육의 교과 내용을 선정하는 과정에서, 첫째 통신 학습의 내용들, 즉 각각의 주제들은 중학교 교육과정과 관련되면서, 통신 학습의 대상이 영재아동임을 감안하여 중학교 교육과정의 내용을 심화, 발전시킬 수 있도록 하였다. 소수, 나누어 떨어짐과 그 조건, 기하 문제해결 방법들, 다각형의 넓이 등은 중학교 교육과정과 직접적으로 관련되면서, 그 내용이 중학교 교육과정의 내용을 바탕으로 제시된 학습 내용들이 심화될 수 있도록 개발하였다.

둘째, 수학의 다양한 분야로 더 깊게 탐구해 갈 수 있는 가능성을 제시할 수 있는 주제들이어야 한다. 영재 학생들이 앞으로 수학의 다양한 분야에 자기 주도적 탐구를 할 수 있는 바탕을 마련해 주기 위해, 본 교재에서는 수학적 지식보다는 수학 탐구 방법을 익힐 수 있는 주제들을 선정하였다. 예를 들면, 비둘기 집의 원리 활용, 수학적 귀납법과 그 활용, 기하 문제해결 방법들.

수학적 귀납법의 원리는 우리 나라의 교육과정에서는 고등학교의 내용에 속하기 때문에, 심화보다는 속진이라는 생각을 가질 수 있을 것이다. 그러나, 수학적 귀납법의 원리가 수학의 다양한 분야, 예를 들어 대수나 기하학 분야의 탐구에서 중요한 도구가 되며, 중학교 수준에서도 수학적 귀납법과 관련된 다양한 소재들을 찾을 수 있기 때문에, 교재의 개발에서 한 주제로 선정하였다. 특히, 한인기(2001b)의 연구에 의하면, 꼴모고로프는 수학의 천재성을 구성하는 측면으로 알고리즘적 측면, 기하학적 측면, 논리적 측면을 꼽았는데, 이때 수학적 귀납법은 학생들의 논리적인 성숙도를 가름할 수 있는 중요한 도구가 될 수 있음을 강조하였다는 사실은 흥미롭다.

셋째, 다양한 수준의 난이도를 가진 문제들을 제시할 수 있는 주제들이어야 한다. 수학 학습의 많은 부분이 수학 문제풀이와 연결되기 때문에, 학습자의 수학적 재능을 개발시킬 수 있는 기회를 제공하기 위해서는, 다양한 수준의 많은 수학 문제를 제시해 주어야 한다. 즉, 기존의 수학적 지식을 간단히 활용하여 해결할 수 있는 문제에서 많은 노력을 통해 새로운 결과를 얻을 수 있는 문제들을 포함하는 수학적 주제를 선정하였다.

이 연구에서는 탐구 중심으로 교재를 구성하기 위해, 수학 교과 내용에 대한 다양한 설명보다는 학생들이 스스로 문제해결 활동을 통해 수학적 탐구 활동을

할 수 있도록 다양한 수준의 예제와 문제를 제시하였다.

넷째, 학습자의 가능성과 다양한 흥미를 고려하여 주제를 선정하였다. 영재아동들은 왜? 라는 질문을 자주 하게 되지만, 이에 상응하는 교수-학습 자료들은 그리 충분하지 않은 것이 현실이다. 예를 들면, 한 변의 길이가 a인 정사각형의 넓이가 왜 a^2일까? 혹은 다섯 마리의 비둘기가 네 개의 집에 들어갔는데, 적어도 두 마리의 비둘기가 같은 집에 있다는 것을 어떻게 증명할 수 있을까? 등등. 본 교재에서는 이러한 물음에 대한 대답을 찾을 수 있도록 주제를 선정하였다.

그리고, 이 교재에서 대상으로 하는 학생들이 영재아들임을 고려하여 기존의 지식이나 통신 교재를 통해 알게되는 수학적 사실들을 활용하여, 깊이 있는 탐구활동을 수행할 수 있는 문제들을 함께 제시하였다. 특히, 이 학생들이 수학 경시대회에 매우 큰 관심을 가지고 있는 것을 감안하여, 경시대회 수준의 다양한 문제를 해결할 수 있는 기회를 폭넓게 제공하였다.

다섯째, 수학사와 관련된 내용들을 포함하도록 하였다. 수학사를 통해 학생들은 수학자들의 노력과 아름다운 결실을 알고 느낄 수 있고, 이를 통해 수학에 대한 심미감과 탐구 의욕을 고취할 수 있다. 이 교재에서는 각 주제별로 수학사와 관련된 내용들을 적극적으로 포함하도록 배려하였다.

Ⅳ. 중등학교 수학 영재교육을 위한 교수-학습 자료 개발 방향

한국교육개발원의 수학 영재 교육과정 시안의 분석에서도 언급했듯이, 영재 교육과정과 교수-학습 자료 개발은 동전의 앞뒷면과 같은 관계에 있다. 교육과정은 개발된 학습 자료를 통해 수정 ; 보완되며, 교수-학습 자료의 개발은 교육과정의 의도와 목적에 최대한 부합되도록 개발되어야 한다. 본 연구에서는 수학과 교수-학습 자료 개발에 관련된 몇몇 연구들을 분석하여, 중등학교 수학 영재교육을 위한 교수-학습 자료 개발의 방향에 대해서 논의하도록 하자.

1. 영재교육에서 창의성 신장을 위한 수학 수업 모형 개발 연구

신현용 · 김원경 · 신인선 · 한인기(2001)는 수학 영재의 창의성 신장을 위한 교수-학습 자료 개발에 관련하여 자기 주도적 학습을 위해 체계화된 학습 자료,

기본적인 인지 조작들을 활성화시키는 학습 자료, 창의성을 구성하는 요인들을 개발·육성할 수 있는 학습 자료 등의 개발을 강조하였다.

수학 영재아들은 독립심과 자기 표현 의욕이 강하기 때문에, 이들에게 적합한 교육의 형태들 중의 하나가 자기 주도적인 학습이다. 자기 주도적 학습이 효과적으로 이루어지기 위해 교사는 적절한 프로그램을 준비하여 학습자가 독립적으로, 그리고 스스로의 힘으로 문제 상황을 극복할 수 있도록 해야 한다.

이를 위해선 무엇보다도, 학습과제를 체계화시켜 제시해야 한다. 학습자의 수준을 고려하면서 학습과제는 도입 단계에서는 조작을 통하여 주어진 대상이나 대상들 사이의 관계들에 대한 새로운 결합을 할 수 있는 과제로 구성되어야 한다. 전개 단계에서는 기존의 지식을 이용하면서 새로운 아이디어를 필요로 하는 활동으로 다양한 행동의 원인과 결과를 예측할 수 있는 과제를 제시해야 한다. 정리 단계에서는 비정형문제를 포함하여 반성적 사고를 경험할 수 있는 학습과제로서 자신의 독창적인 해결 방법으로 충분한 반성이 이루어진 다음 아이디어를 정교화할 수 있는 과제를 제시해야 한다.

한편, 인간의 사고 활동을 구성하는 기본적인 인지 조작의 본질에 관련해서, 루빈슈타인 S.L.(1989)은 '사고 과정은 무엇보다도, 분석과 분석하여 얻어진 것들의 종합이며; 그리고 나서 분석과 종합의 산물인 추상화와 일반화이다. 이 과정들의 규칙성과 이들의 상호 관계는 사고의 바탕이 되는 내적인 규칙성들'이라고 했다. 분석과 종합에 근거한 바탕이 되는 인지 조작들로 분석과 종합, 비교와 유추, 일반화와 유목화, 추상화와 구체화가 있으며, 영재아를 위한 교수-학습 자료의 개발 과정에서 이러한 인지 조작들을 활성화시킬 수 있는 자료의 개발이 중요하다.

한편, 창의성을 구성하는 대표적인 변인들인 유창성, 융통성, 독창성, 그리고 정교성을 들 수 있으며, 이러한 변인들을 개발·육성하고 활성화시킬 수 있는 교수-학습 자료를 개발해야 한다.

2. 공간 도형의 조작적 활동을 위한 학습 자료 개발 연구

신현용·한인기(2001)는 중학교 학생들이 공간 도형에 대한 상상력, 그리고 공간 도형에서의 추론 활동을 경험할 수 있는 학습 자료의 개발에 있어 다음과 같은 준거를 제시하였다. 첫째, 개발된 학습 자료들은 다양한 수준의 활동을 포함

해야 하며, 이를 통해 학습자들의 개별적인 접근이 가능하도록 해야 한다. 둘째, 개발된 학습 자료들과 정규 교육과정의 관련성을 고려해야 하며, 정규 교육과정을 심화·확장할 수 있도록 해야 한다. 셋째, 공간 도형에 대한 조작적 활동을 강조해야 한다. 예를 들면, 주어진 공간 도형들의 분할이나 결합, 빨대를 활용한 정다면체의 제작, 뫼비우스 띠의 제작 및 절단 등의 활동은 정적인 형태의 관찰을 통한 학습이 아니라, 동적인 형태의 스스로 만들어 보는 활동이 강조된 학습 자료들이다. 넷째, 종합적 사고 활동과 분석적 사고 활동이 강조해야 한다.

3. "유추"를 활용한 기하 심화학습 자료 개발

한인기·이상근(2000)은 수학 영재아들이 수학 교수-학습 과정에서 유추 활동을 경험하고, 이를 통해 새로운 수학적 사실들을 추측하고 논증을 통해 증명하는 기회를 가질 수 있는 기하 학습 자료를 개발하는 연구를 수행하였다.

이 연구에서는 유추의 유형, 유추와 다른 사고 조작들과의 관계를 밝혔으며, 학생들이 구체적으로 유추 활동을 경험할 수 있는 기하 학습 자료를 개발하였으며, 학습자들이 자기 주도적으로 탐구 활동을 진행해 갈 수 있도록 학습 자료들을 체계화하였다. 특히, 이 연구에서는 학생들의 인지 활동의 기본 조작들 중의 하나인 "유추" 활동을 개발·육성시킬 수 있는 교수-학습 자료를 기하학 분야의 예들을 통해 구체적인 형태로 개발하였다.

4. 작도 문제를 활용한 심화학습 교재 개발에 관한 연구

한인기(2000c)는 1999년 한국교육개발원에서 개발된 중학교 수학 영재 교육과정 시안 중에서 중학교 수학의 '작도 문제'에 상응하는 수학과 교수-학습 교재 및 교사용 지도서를 개발하였다.

심화 학습 교재의 개발에서 고려했던 사항들을 살펴보면, 첫째, '작도 문제'가 중학교 영재 교육과정의 2단계에서 다루는 내용이므로, 이전에 배운 다양한 주제들과 긴밀히 관련되도록 하였다. 개발된 작도 문제들은 도형 분야 뿐만 이차 방정식의 풀이, 무리수, 삼각 함수, 최대 최소 문제 등과 관련되는 다양한 수학 분야에 관련된 내용을 포함하고 있다.

둘째, 문제를 통한 탐구 활동 중심의 교재를 개발하였다. 교사와 학생의 교수-학습 활동에서 가중 기본적이고 중요한 매개체가 되는 것들 중의 하나가 수학 문

제들이다. 특히, 이 연구에서 개발한 심화 학습 자료에서는 학생들에게 새로운 개념을 지도하기보다는 이미 획득된 수학적 지식이나 능력들을 활용하여 다양한 문제 상황에 대해 탐구하고, 수학의 여러 분야들 사이의 관계에 대해 인식하는 것이 강조되기 때문에, 이 연구의 학습 자료 개발의 주된 접근 방법은 수학 문제를 통한 접근이다. 특히, 학생들이 수학 문제를 풀어가면서 수학적 대상들 사이의 관계나 규칙성을 찾고, 이미 알고 있는 수학적 지식을 새로운 문제 상황에 적용하는 탐구 활동 중심의 자료를 개발하였다.

셋째, 다양한 수준의 난이도를 가진 작도 문제들을 개발하였다. 이 연구에서 개발된 교재에는 평이한 난이도의 자료들, 다양한 사고 능력과 기능의 육성을 돕는 문제들, 그리고 새롭고 다양한 아이디어를 탐색하고, 새로운 수학적 아이디어를 발견하도록 하는 비정형문제들을 모두 포함되었다.

넷째, 자료 개발에 수학사의 내용들을 활용하여, 영재아들이 주어진 자료들을 공부해 가면서 자신의 탐구가 수학 역사의 일부임을 인식할 수 있도록 하였다. 예를 들어, 고대로부터 유명한 3대 작도 문제의 해결을 위한 다양한 시도들 중에서 도구를 이용한 해결 방법 탐구의 경험을 제공하였으며, 컴퍼스 기하학, 즉 작도 문제의 해결에 자와 컴퍼스 대신에 컴퍼스만을 이용하는 작도 방법에 대한 심도있는 고찰 기회를 제공하였다.

다섯째, 학습 과제들을 체계화하였다. 이 연구에서는 학습 과제를 체계화하기 위해, 우선 주제에 관련된 다양한 문제들을 선별하여 이를 조직화하였는데, 이때 연속되는 문제들에 대해 문제해결 과정에 사용되는 수학적 아이디어나 지식에서 지나치게 넓은 갭이 발생하지 않도록 하였다. 그리하여, 이전의 문제해결에서 경험했던 수학적 활동을 확장시켜 다음 문제의 해결을 위한 접근 방법을 모색할 수 있도록 하였다.

여섯째, 개별적 접근을 가능하도록 하였다. 영재 아동들의 개인차가 일반 학생들의 그것보다 훨씬 크다는 것을 감안하여, 학습자들의 수준에 적합한 개별학습이 가능하도록 학습 내용의 양을 충분하게 제시하였다. 즉, 학생에 따라서는 50분에 제시된 활동 내용을 모두 소화하지 못할 수도 있는데, 이것이 이상한 일은 아니다. 왜냐 하면, 개발된 자료에 포함된 학습 내용의 양은 매우 뛰어나게 빨리 학습을 진행하는 학생에게 부족하지 않을 정도의 양을 기준으로 제시되어 있기 때문에, 주어진 시간에 완성하지 못한 활동은 개인 과제로 남겨두면 된다.

5. 성공적인 수학 영재교육을 위한 교수-학습 자료 개발 방향

수학 영재교육이 성공적으로 이루어지기 위해서는 타당한 교육과정 개발과 함께 상응하는 교수-학습 자료의 개발에 있어 다음과 같은 측면들이 고려되어야 한다.

첫째, 인지 활동의 활성화를 통한 수학적 재능을 개발·육성할 수 있는 교수-학습 자료이어야 한다. 한인기(1999b)는 수학적 재능을 일반적 재능과 특수한 재능으로 나누고, 수학적 재능을 구성하는 변인들을 추출하였다. 이러한 변인들 중에서 많은 요소들은 앞에서 기술한 바탕이 되는 인지 활동 조작 유형인 분석과 종합, 비교와 유추, 일반화와 유목화, 추상화와 구체화에 관련된다. 이러한 바탕이 되는 인지 활동 유형들을 활성화시킴과 동시에 수학적 재능을 구성하는 다양한 변인들을 활성화시킬 수 있는 학습 자료들이 개발되어야 한다.

둘째, 다양한 난이도 수준의 문제들을 포함하는 자료들이 개발되어야 하며, 이를 통해 학생들의 개별적 학습 활동이 보장되어야 한다. 즉, 평이한 난이도의 자료들, 다양한 사고 능력과 기능의 육성을 돕는 문제들, 그리고 새롭고 다양한 아이디어를 탐색하고, 새로운 수학적 아이디어를 발견하도록 하는 비정형문제들을 모두 포함되어야 한다.

셋째, 학습 과제들은 체계화된 형태로 개발되어야 한다. 학습 과제를 체계화하기 위해, 우선 주제에 관련된 다양한 문제들을 선별하여 이를 조직하는데, 이때 연속되는 문제들에 대해 문제해결 과정에 사용되는 수학적 아이디어나 지식에서 지나치게 넓은 갭이 발생하지 않도록 해야 한다. 그리하여, 이전의 문제해결에서 경험했던 수학적 활동을 확장시켜 다음 문제의 해결을 위한 접근 방법을 모색할 수 있도록 해야 한다.

넷째, 문제를 통한 탐구 중심으로 교수-학습 자료들을 개발해야 한다. 교사와 학생의 교수-학습 활동에서 가중 기본적이고 중요한 매개체가 되는 것이 수학 문제들이다. 특히, 영재아들은 독립적인 자발성이 강하기 때문에, 이미 획득된 수학적 지식이나 능력들을 활용하여 다양한 문제 상황에 대해 탐구하고, 수학의 여러 분야들 사이의 관계에 대해 인식하는 경험이 강조된 교수-학습 자료가 개발되어야 한다. 그리고, 학생들이 수학 문제를 풀어가면서 수학적 대상들 사이의 관계나 규칙성을 찾고, 이미 알고 있는 수학적 지식을 새로운 문제 상황에 적용하는 탐구 활동 중심의 자료를 개발해야 한다.

다섯째, 수학사의 내용들을 적극적으로 활용해야 한다. 영재아들이 주어진 자

료들을 공부해 가면서 자신의 탐구가 수학 역사의 일부임을 인식할 수 있도록 해야 한다. 수학사에 관련된 교수-학습 자료를 통한 탐구 과정에서, 학생들은 새로운 수학적 사실이나 수학적 방법들, 그리고 새로운 수학적 개념의 발생에 관련된 다양한 사실들을 알게 되고, 자신의 탐구가 수학의 발전에 커다란 의미를 가질 수도 있음을 인식하게 된다.

여섯째, 수학에 대한 홍미를 개발하고, 심미적인 견해를 가질 수 있는 교수-학습 자료들이 개발되어야 한다. 수학 문제해결 과정에서 학생들은 서로 다른 방법으로 문제를 해결하면서, 한 문제를 다른 유형의 문제들을 해결하는데 사용하면서, 복잡한 문제를 이전에 배운 간단한 문제들의 결합을 통해 해결하면서 수학에 대한 홍미를 육성할 수 있으며, 수학의 아름다움을 느낄 수 있다. 그리고, 수학 문제 자체에 홍미로운 사실이 포함되거나 아름다운 풀이를 가지고 있을 때, 수학의 아름다움을 느낄 수 있다. 보통, 아름다운 풀이는 문제의 풀이가 시각적이고, 예상치 못했던 것이고, 단순하면, 이 풀이를 보통 아름답다고 말한다. 이 조건을 만족시키는 문제들은 당연히 학생들의 홍미를 불러일으키며, 좀더 간단 명료하고, 좀더 평이한 풀이 방법을 찾도록 학생들을 고무시킨다.

V. 수학 영재교육을 위한 교수-학습 자료 개발의 실제

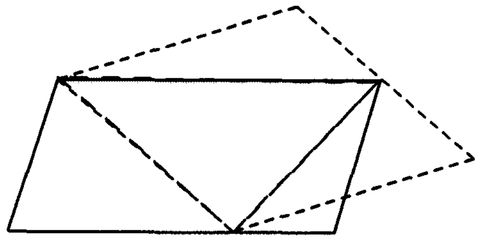
수학적으로 아름다운 문제들과 체계화된 학습 자료의 예들을 살펴보기로 하자.

1. 아름다운 수학 문제들

살펴볼 몇몇 문제들은 아름다운 풀이를 가지는 문제들이다. 기술한 것과 같이, 아름다운 풀이는 문제의 풀이가 시각적이고, 예상치 못했던 것이고, 단순하다. 이러한 문제의 해결 경험을 통해 학생들은 수학에 홍미를 키우고, 좀더 간단 명료하고, 좀더 평이한 풀이 방법을 찾으려고 노력한다.

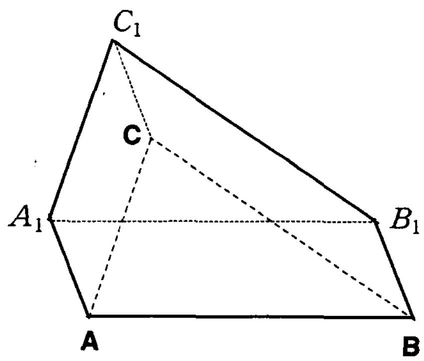
문제 1. 두 평행사변형이 공통의 꼭지점을 가지며, 각각의 평행사변형에서 꼭지점 하나씩은 다른 평행사변형의 변 위에 놓여있도록 하였다. 이때, 두 평행사변형의 넓이가 같다는 것을 증명하여라.

풀이. 주어진 그림에서 빗금을 칠한 삼각형은 각 평행사변형 넓이의 절반이므로, 이로부터 두 평행사변형의 넓이가 같다는 것이 증명된다. □



문제 2(파푸스의 문제). 임의의 삼각형 ABC를 삼각형 $A_1B_1C_1$로 평행이동하였다. 이때, 평행 사변형 ACC_1A_1과 CBB_1C_1이 삼각형 ABC의 밖에 있으면, 평행 사변형 ABB_1A_1의 넓이는 두 평행 사변형 ACC_1A_1, CBB_1C_1 넓이의 합과 같다는 것을 증명하여라.

증명. 삼각형 ABC를 평행 사변형 ACC_1A_1과 CBB_1C_1이 삼각형 ABC의 밖에 놓이도록 평행이동 하였다고 하자. 이때, 오각형 $AA_1C_1B_1B$를 보자. 평행 사변형 ACC_1A_1, CBB_1C_1 넓이의 합은 오각형에서 삼각형 ABC를 뺀 부분의 넓이를 뺀 것과 같다. 한편, 평행 사변형 ABB_1A_1의 넓이는 오각형에서 삼각형 $A_1B_1C_1$을 뺀 부분의 넓이와 같다.

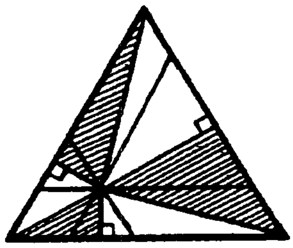


그런데, 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$은 합동이므로 넓이가 같고, 평행 사변형 ABB_1A_1의 넓이는 두 평행 사변형 ACC_1A_1, CBB_1C_1 넓이의 합과 같다는 것이 증명된다. □

특히, 문제 2는 그리스 시대의 유명한 주석가였던 파푸스가 제시한 문제로써, 피타고라스 정리의 한 일반화가 되며, 그리고 수학사의 내용을 정규 수학 교육과정의 교과 내용과 연결시키는 한 예로 매우 흥미있는 문제이다.

문제 3. 정삼각형의 내부에 한 점을 잡아, 이 점을 각 꼭지점들과 연결하고, 다시 이 점으로부터 삼각형의 각 변에 수선을 내렸다. 이와 같이 만들어진 6개의 삼각형들 중에서 번갈아 세 개의 삼각형에 빗금을 그었다. 이때, 빗금 친 삼각형의 넓이의 합은 빗금이 없는 삼각형의 넓이의 합과 같다는 것을 증명하여라.

풀이. 6개 삼각형의 공통 꼭지점을 지나며 삼각형의 변들에 평행한 직선을 긋자.



그러면, 정삼각형은 12개의 각각 합동인 삼각형들로 분할되며, 각각의 쌍에서 한 삼각형은 빗금이 있고, 다른 삼각형에는 빗금이 없다. □

2. 수학 문제의 체계화의 실제

수학 문제 체계화의 전형적인 예를 한인기 · 이상근(2000)의 연구에서 찾아볼 수 있는데, 본 연구에서는 사되호프 S.N.(1982)의 연구에 포함된 내용을 참조하여 작도 문제에 관련된 수학문제들을 체계화하였다.

문제 4. 점 A를 지나는 반지름이 r인 원을 작도하여라.

풀이. 구하는 원의 중심은 원 $(A,\ r)$에 속한다. □

문제 5. 원 $(O,\ r)$에 외접하는 반지름이 a인 원을 작도하여라.

풀이. 구하는 원의 중심은 원 $(O,\ r+a)$에 속한다. □

문제 6. 다음에 접하는 원을 작도하여라.

(1) 평행인 직선 m과 n (2) 교차하는 직선 m과 n

(3) 동심원 (O, R), (O, r) 단, $R > r$.

풀이. (1)의 경우에 원의 중심은 두 직선 m, n과 평행하고, 같은 거리만큼 떨어진 직선 l에 속한다. 만약, d를 두 직선 m, n사이의 거리라 하면, 구하는 원은 $(A, ½d)$가 된다.

(2)의 경우에 원의 중심은 두 직선 m, n에 의해 만들어진 각의 이등분선에 속하는 임의의 점이 된다. 그리고, 반지름은 부등식 $0 < R < \infty$을 만족시키는 모든 선분이 될 수 있다.

(3)의 경우에 원의 중심은 원 $(O, ½(R+r))$에 속하며, 반지름은 $½(R-r)$인 선분이다. □

앞에서 해결한 문제들의 조합을 통해, 다음과 같은 수학 문제의 chain을 얻을 수 있다.

문제 7. 직선 m, n $(m \,//\, n)$에 접하고, $K \not\in m$, $K \not\in n$인 점 K를 지나는 원을 작도하여라.

풀이 방법 1. 문제 6의 (1)로부터 구하는 원이 $(A, ½d)$임을 알 수 있다 (단, d는 m, n사이의 거리임). 그리고, 이 원의 중심은 문제 4에 의해 결정될 수 있다. □

풀이 방법 2. 문제 6의 (1)에 의해, 구하는 원들의 중심 X_1, X_2를 구하기 위해, 직선 m, n에 접하는 원들의 중심을 지나는 직선 l을 작도하자(그림 1).

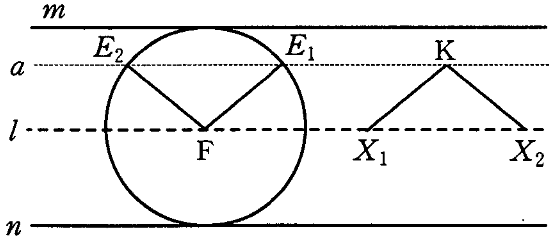


그림 1

이제, 원 $(E,\ \frac{1}{2}d)$, $E \in l$을 작도하고, 점 K를 지나 l에 평행한 직선 a를 작도하면, $a \cap (E,\ \frac{1}{2}d)$인 점 E_1과 E_2를 얻을 수 있다. 그리고 나서, 점 K를 지나며 $\overline{E_1E}$, $\overline{E_2E}$에 평행한 직선들을 작도한다. 이 직선들과 직선 l의 교점이 구하는 원의 중심이 된다. □

문제 8. 직선 m, $n\ (m \parallel n)$에 접하고, 주어진 직선들 사이에 놓인 원 $(K,\ r)$에 접하는 원을 작도하여라.

풀이. 문제 6의 (1)에 의해, 직선 m, n에 접하는 원의 중심이 놓인 직선 l을 작도할 수 있다. 그리고, 문제 5에 의해, 구하는 원의 중심은 원 $(K,\ r+\frac{1}{2}d)$에 속한다는 것을 알 수 있다. 그리고 나면, 구하는 원의 중심은 직선 l과 원 $(K,\ r+\frac{1}{2}d)$의 교점이라는 것을 쉽게 알 수 있다. □

이 문제에서 원을 직선으로 바꾸면, 다음과 같은 문제를 얻을 수 있다.

문제 9. 직선 m, $n\ (m \parallel n)$에 접하고, 직선 m, n과 점 K, L에서 만나는 직선 c에 접하는 원을 작도하여라.

풀이 방법 1. 문제 6의 (1)과 (2)에 의해, 구하는 원들의 중심 X_1, X_2를 찾을 수 있다(그림 2).

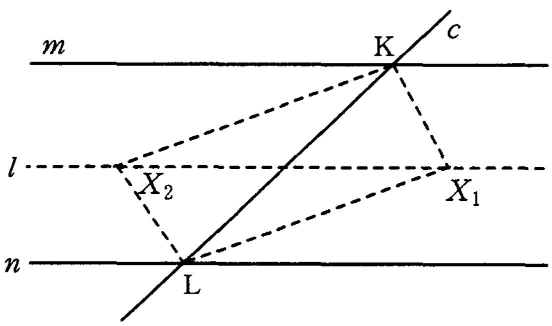


그림 2

풀이 방법 2. 문제 6의 (1)에 의해, 직선 m, n에 접하는 구하는 원의 중심은 직선 m, n에서 $\frac{1}{2}d$만큼 떨어져 있는 직선 $l\ (l \parallel m)$에 속한다. 직선 c에 접하고, 반지름이 $\frac{1}{2}d$인 원들의 중심은 직선 c의 다른 쪽에 속하고 거리가 $\frac{1}{2}d$

만큼 떨어진 평행한 직선들 b, d에 속한다(그림 3). 결국, $X_1 = l \cap b$, $X_2 = l \cap d$. □

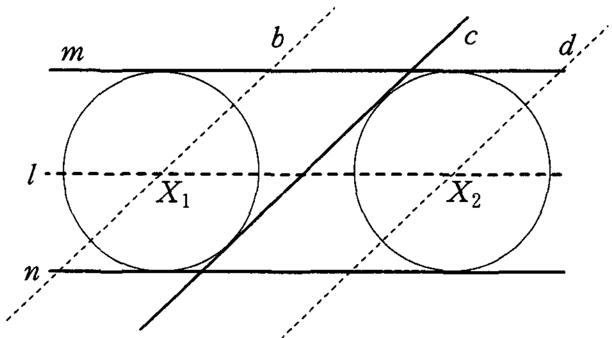


그림 3

문제 10. 교차하는 직선 m, n에 접하고, $K \not\in m$, $K \not\in n$인 점 K를 지나는 원을 작도하여라.

풀이. 가령, $A = m \cap n$이라 하자(그림 4). 문제 6의 (2)에 의해, 구하는 원의 중심은 직선 m, n에 의해 만들어진 각의 이등분선에 속할 것이다.

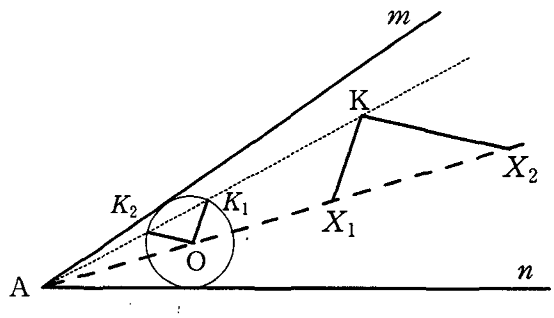


그림 4

문제의 첫 번째 조건을 만족시키는 임의의 원을 작도하고, 이 원의 중심을 O라 하자. 작도된 원과 직선 KA의 교점을 K_1, K_2라 하자. 점 K를 지나 직선 K_1O와 K_2O에 평행한 직선을 작도하면, 이 직선들과 각의 이등분선의 교점 X_1, X_2가 원의 중심이 된다. □

문제에서 점 K를 직선 m, n과 만나는 직선으로 바꾸면, 다음 문제를 얻는다.

문제 11. 교차하는 직선 m, n에 접하고, 직선 m, n과 점 B, C에서 만나는 직선 c와 접하는 원을 작도하여라.

풀이. 가령, $A = m \cap n$이라 하자(그림 5). 구하는 원들의 중심 X_1, X_2는 문제 6의 (2)에 의해 구할 수 있다. □

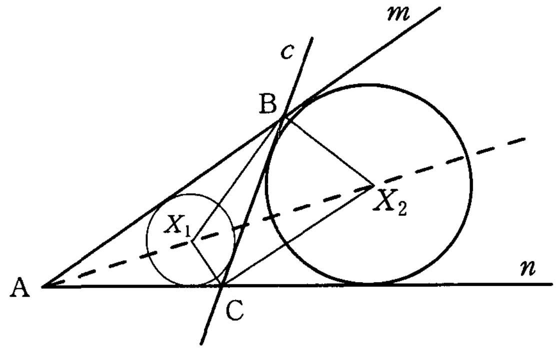


그림 5

문제 7에서 직선을 동심원으로 바꾸면, 다음 문제를 얻을 수 있다.

문제 12. 동심원 (O, R), (O, r), $R > r$에 접하고, 점 K(K는 동심원들 사이에 있음)를 지나는 원을 작도하여라.

풀이. 문제 6의 (3)에 의해, 구하는 원의 중심은 원 $(O, \frac{1}{2}(R+r))$에 속하는 점이고, 점 K를 지나는 원들의 중심 X_1, X_2는 다음과 같다(그림 6):

$X_1, X_2 = (O, \frac{1}{2}(R+r)) \cap (K, \frac{1}{2}(R-r))$. □

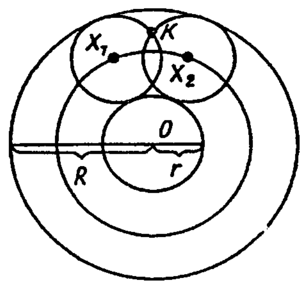


그림 6

이 문제에서 점 K를 원으로 바꾸면, 다음 문제를 얻을 수 있다.

문제 13. 동심원 $(O,\ R)$, $(O,\ r)$, $R > r$에 접하고, 동심원들 사이에 놓여 있는 원 $(K,\ r_1)$과 접하는 원을 작도하여라.

풀이. 문제 6의 (3)에 의해, 동심원 $(O,\ R)$, $(O,\ r)$에 접하는 원의 중심은 원 $(O,\ ½(R+r))$에 속한다(그림 7).

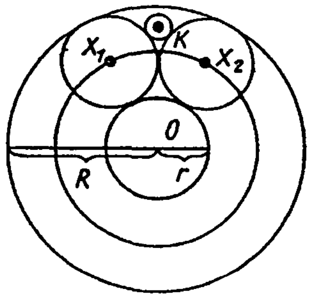


그림 7

문제 5를 이용하면, 구하는 원의 중심 X_1, X_2를 다음과 같이 구할 수 있다:

$X_1,\ X_2\ =\ (O,\ ½(R+r))\ \cap\ (K,\ r_1+½(R-r))$. □

V. 결론

본 연구에서는 수학 영재교육을 위한 프로그램 개발 및 교수-학습 자료 개발에 관련된 다양한 문헌들을 분석하여, 수학 분야에서 효율적인 영재교육을 위한 프로그램 개발 및 교수-학습 자료 개발을 위한 바람직한 방향을 도출하고, 이러한 방향에 상응하는 구체적인 수학 교수-학습 자료의 개발을 예시하였다.

본 연구에서는 중등학교 수학 영재교육 프로그램으로 한국교육개발원(1999b)의 수학과 영재 교육과정 시안(중학교 수준), 한국교육개발원(2000)의 수학과 영재 교육과정 시안(고등학교 수준), 한국교육개발원(1999a)의 과학 영재교육을 위한 교육과정 개발 연구, 러시아 연방 교육부(1990)의 수학 심화 선택 교육과정, 신현용·한인기·이종욱·김희선(1999)의 연구에 소개된 러시아의 수학 통신 영재교육 교육과정, 한인기(1999a)의 연구에 소개된 딘킨 교수의 강의록, 한인기(2001a)의 통신 영재교육 학습 교재의 프로그램 등의 내용을 구체적으로 소

개하였다. 이러한 연구들 속에 '중 · 고등학교 수준에서 수학 영재아들에게 수학의 어떤 주제들을 가르쳐야 하는가?'에 대한 가능한 해답들이 포함되어 있다.

이때, 구체적인 수학 학습 내용의 선정에서는 중학교 수준과 고등학교 수준의 영재교육 성격 규명을 통해, 속진과 심화의 비중에 대한 심도있는 고찰이 필요하다. 본 연구를 통해서는, 중학교 수준에서는 특히 속진과 심화를 병행하되 심화에 더 큰 비중을 두어야 한다는 결론을 얻었다. 심화 학습을 통해, 학생들은 수학적 기초를 튼튼히 다지며 수학적 재능 개발 · 육성 및 수학에 대한 심미적 성향을 개발 · 육성할 수 있을 것으로 기대된다. 한편, 고등학교 수준에서 수학 영재교육의 특징들 중의 하나로 초등 수학과 고등 수학의 공고한 연계성을 강조하는 것을 들 수 있다. 이를 위해 수학의 근간이 되는 대수, 해석, 기하 분야에서는 속진을 병행하는 심화를 바탕으로 교과 내용 선정에 대한 접근 방향을 모색한다. 그리고, 수학 영재교육을 위한 교과 내용으로 수학사 분야를 강조와 다양한 학문 영역간의 간학문적 접근이 강조되어야 한다는 결론을 얻을 수 있다.

한편, 러시아의 영재 교육과정 분석을 통해, 수학 영재교육에서 강조되어야 할 수학 영역으로 수론, 대수, 해석, 기하, 조합론 영역을 들 수 있다. 이러한 교과 영역의 선정은 꼴모고로프가 주장한 수학적 천재성을 구성하는 바탕 요소들과도 일맥 상통한다. 특히, 이러한 분야들이 수학사에서 보면 전통적으로 매우 오랫동안 연구되었거나 많은 흥미로운 탐구 문제들이 포함된 분야이기 때문에, 다양한 수준의 난이도를 가진 문제들을 학생들에게 제시할 수 있는 가능성이 많다.

한편, 중등학교 수학 영재교육을 위한 교수-학습 자료 개발 방향 설정을 위해, 신현용 · 김원경 · 신인선 · 한인기(2001)의 영재교육에서 창의성 신장을 위한 수학 수업 모형 개발 연구, 신현용 · 한인기(2001)의 공간 도형의 조작적 활동을 위한 학습 자료 개발 연구, 한인기 · 이상근(2000)의 유추를 활용한 기하 심화학습 자료 개발 연구, 한인기(2000c)의 작도 문제를 활용한 심화학습 교재 개발에 관한 연구를 분석하였다. 이를 통해, 성공적인 수학 영재교육을 위한 교수-학습 자료 개발 방향에 대한 몇 가지 방향을 제시했다. 첫째, 인지 활동의 활성화를 통한 수학적 재능을 개발 · 육성할 수 있는 교수-학습 자료이어야 한다. 둘째 다양한 난이도 수준의 문제들을 포함하는 자료들이 개발되어야 하며, 이를 통해 학생들의 개별적 학습 활동이 보장되어야 한다. 셋째, 학습 과제들은 체계화된 형태로 개발되어야 하며, 넷째 문제를 통한 탐구 중심으로 교수-학습 자료들을 개발해야

하며, 다섯째 수학사의 내용들을 적극적으로 활용해야 하며, 여섯째 수학에 대한 흥미를 개발하고, 심미적인 견해를 가질 수 있는 교수-학습 자료들이 개발되어야 한다는 결론을 얻었다.

한편, 본 연구에서는 수학 영재교육을 위한 교수-학습 자료 개발의 실제로 아름다운 수학 문제들과 수학 문제 체계화의 예를 구체적으로 제시하였다.

참 고 문 헌

김주봉 (1999). 청주교대 과학 영재교육 센터의 '99 수학 영재 캠프 활동. 수학교육 학술지 제 4집. 서울: 한국수학교육학회.

박종률 · 김인수 (1999). 수학 영재교육 교재 분석: 전남대학교 과학 영재교육센터 수학반 교재를 중심으로. 수학교육 학술지 제 4집. 서울: 한국수학교육학회.

방승진 (1999). 주제 탐구 중심의 수학과 영재 교육과정 개발. 수학교육 학술지 제 4집. 서울: 한국수학교육학회.

방승진 (2000). 주제 탐구 중심 수학 영재교육. 수학교육학술지 제 5집. 서울: 한국수학교육학회.

신현용 · 김원경 · 신인선 · 한인기 (2001). 영재교육에서 창의성 신장을 위한 수학 수업 모형. 청람수학교육 제 9집. 충북: 한국교원대학교 수학교육연구소.

신현용 · 류익승 · 한인기 (2000). 과학 고등학교 수학 특별반의 영재교육에 관한 연구. 수학교육 학술지 제 5집. 서울: 한국수학교육학회.

신현용 · 최은주 (2000). 인지 갈등에 의한 수학 영재교육. 수학교육 학술지 제 5집. 서울: 한국수학교육학회.

신현용 · 한인기 (2000). Mathematics Education for Gifted Students in Korea. Research in Mathematical Education Vol. 4 No. 2. Seoul: Korea Society of Mathematical Education.

신현용 · 한인기 (2001). 공간 도형의 조작적 활동을 위한 학습 자료 개발 연구. 수학교육논문집 제 11집. 서울: 한국수학교육학회.

신현용 · 한인기 · 이종욱 · 김희선 (1999). 러시아의 수학 영재 통신교육. 수학교육 제 38권 제 2호. 서울: 한국수학교육학회.

최원 (1999). 인천 지역 수학 영재교육의 현황과 운영 실태. 수학교육 학술지 제 4집. 서울: 한국수학교육학회.

한국교육개발원 (1999a). 과학 영재교육을 위한 교육과정 개발 연구(수탁연구 CR 99-15). 서울: 방문사.

한국교육개발원 (1999b). 수학과 영재 교육과정 시안 -초·중학교 수학과 영재 교육과정 시안 개발을 위한 기초 연구-(수탁연구 CR 99-20-3). 서울: 유진문화사.

한국교육개발원 (2000). 수학과 영재교육과정 시안 -고등학교 수학과 영재 교육과정 시안 개발을 위한 기초 연구-(수탁연구 CR 2000-14-3). 서울: 선우인쇄사.

한인기 (2001a). 중학교 수학 영재아들을 위한 통신 학습 교재 개발에 관한 연구. 수학교육 학술지 제 6집. 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (2001b). 꼴모고로프와 수학적 재능에 관한 그의 이론. 한국수학사학회지 제 14권 제 1호. 서울: 한국수학사학회.

한인기 (1999a). 러시아의 수학 영재 교육과정. 학교 수학 제 1권 제 2호. 서울: 대한수학교육학회.

한인기 (1999b). 수학적 재능에 관한 이론적 기초. 수학교육 학술지 제 4집. 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (2000c). 작도 문제를 활용한 심화 학습 교재 개발에 관한 연구. 수학교육 학술지 제 5집. 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (2000d). 러시아 수학 영재교육에 관한 실제적 고찰. 수학교육논총 제 18집. 서울: 대한수학회.

한인기 · 이상근 (2000). "유추"를 활용한 기하 심화학습 자료 개발. 수학교육 학술지 제 5집. 서울: 한국수학교육학회.

〈러시아어 참고 문헌〉

러시아 연방 교육부 (1990). 심화 선택 교육과정. 모스크바: "교육"출판사.

러시아 연방 교육부 (1994). 중등학교(5-11학년) 교육과정. 모스크바: "교육"출판사.

루빈슈타인 L.S. (1981). 사고의 본질과 그 요소에 대해. Eds. 기뻰레이테르 Yu.B. & 뻬뚜호바 V.V. 일반 심리학 논문 선집. 모스크바: 모스크바대학교 출판부.

사딕호프 S.N. (1982). 8학년 학생들의 수학에 대한 흥미 향상의 도구로써 작도 문제. Ed. 보꼬프네프 O.A. 학교에서 기하와 대수의 지도. 모스크바: 교육 출판사.