무작위 초(超) 보유 자원을 이용한 신뢰성 모델

Songkyoo Kim
Florida Institute of Technology, Department of Operations Research
150 W. University Blvd., Melbourne, FL32901, U. S. A.
E-mail: songkyoo@fit.edu

Abstract

This article deals with stochastic reliability systems that include a repair facility and unreliable machines: the main facility of working and an auxiliary facility of "super-reserve" machines. The number of super-reserve machines are random number with a arbitrarily distribution and working machines break down exponentially. Defective machines line up for repair, whose durations are arbitrarily distributed. Refurbished machines return to the main facility. If the main facility is restored to its original quantity, the repair facility leaves on routine maintenance until all of super-reserve machines are exhausted. Then, the busy period is regenerated. The whole system also falls into the category of closed queues, with more options than those of basic models. The techniques include two-variate Markov and semi-regenerative processes, and a duality principle, to find the probability distribution of the number of intact machines. Explicit formulas obtained demonstrate a relatively effortless use of functionals of the main stochastic characteristics (such as expenses due to repair, maintenance, waiting, and rewards for higher reliability) and optimization of their objective function. Applications include computer networking, human resources, and manufacturing processes.

1. Introduction (서론)

이번 주제는 m+1 의 동작하는 혹은 동작이 가능한 불안정한 기계와 특별한 경우-즉, 수선공(repairman)이 휴가를 떠난 경우- 무작위(혹은 random) S 로 지원되는 보유 자원(혹은 기계)을 포함한 추계적 신뢰성 시스템 (stochastic reliability systems)을 다룬다. 이러한 특수한 보유 자원을 우리는 초(超)보유 (super-reserve) 자원이라고 칭하며, 이러한 초 보유 자원은 동작중인 기계가 고장났을 시, 바로 대체되는 보유 자원(reserve machine)과는 용도를 달리 한다. 현재 동작 중 인 기계는 익스포넨셜(Exponential) 분포로 고장이 날수 있으며, 한 명의 수선공 (repairman)이 이러한 고장난 (failure) 기계를 단계적으로 고친다 (FIFO형식). 이렇게 한정된 자원과 한 명의 수선공으로 구성된 모델은 "폐쇄된 단일 큐잉 모델 (Closed queueing model)"으로 칭하기도 한다. 수선공이 한 대의 기계를 고치는 시간은 일반적인 확률분포를 가지고 있다. 모든 동작하는 기계의 대수가 원래 시작인 때와 동일할 경우, 수선공은 자체 보수를 위한 휴가(vacation)를 떠나며, 초(超) 보유 기계가 지원되기 시작한다. 이렇게 지원되는 초 보유 기계의 대수는 지원되기 시작하는 순간 무작위로 결정된다. 이 시기동안 고장난 기계들은 큐 (queue)에 대기하게 되고, 다음의 고장이 있을 경우, 초 보유 자원이 고장난 기계들을 대신한다. 모든 초 보유 자원들이 고갈되고, 한 대의 동작하는 기계가 고장이 나면, 수선공은 고장난 기계를 고치기 시작하고, 작업(busy period)에 들어간다.

이러한 보유 자원을 가진 신뢰성 모의 최근 접근 방법 (초 보유 자원은 없는 상태)은 참고 문헌 [2]-[4]에서 찾아 볼 수 있으며, 이번에 다룰 초 보유 자원은 보유 자원 가지는 신뢰성 모델을 보다 다양하고, 실질적으로 응용 할 수 있는 방법이 많을 것으로 판단된다. 가장 대표적인 응용 분야는 인력관리나 컴퓨터 시스템, 그리고, 인터넷 등이다.

고전적인 연구에 있어서, 우리는 동작중인 기계의 추계적 과정을 다루며, 시스템의 평형 상태 (equilibrium)가 그 목적이다. 이러한 관점에서 "이중적 (dual)"인 면이 나타나며, 이러한 개념은 다 채널 큐잉 시스템과 한정된 입력의 폐쇄된 단일 큐잉 시스템의 관계를 표현 할 수 있다. 이러한 이중성 (Duality)은 복잡한 폐쇄형 큐잉 모델을 다 채널 개방형 큐잉 모델을 이용해서 풀어 낼 수 있는 방법을 제공한다. 최근의 경향을 보면, 폐쇄형 큐잉 모델을 연구는 상당히 한정적 것으로 나타날 뿐만 아니라 (참고 서적 [5]), 상당수의 보유 자원을 포함한 신뢰성 모델들의 풀이는 그 풀이가 매우 어려운 관계로, 모든 추계 과정을 익스포넨셜로 단정 짓거나, 단순히 평균 값(mean)을 구하는 정도에서 그치고 있다. 이 제한적인 방법은 확률론 적인 (Stochastic) 모델을 결정론적인 (Deterministic) 모델로 그 유용성을 제한한다.

가장 고전적이며, 해석적으로 이러한 폐쇄형 큐잉 모델을 풀이한 것은 바로 Tak cs이며 (참고문헌 [6]). 그 모델에서는 보유 자원 (reserve)은 포함되지 않는다. 보유자원을 포함한 폐쇄형 큐잉 모델을 해석한 Dshalalow의 경우 보유자원이 추가된 형태의 모델을 해석했으며 (참고문헌 [5]), 이 모델의 경우 보유 자원은 수선공과는 관계없이, 현재 동작 중인 기계 (main machines)에 관계되어 대체된다. 이번에 다룰 "무작위 초(超) 보유 자원 규칙

(probabilistic super-reserve replacement policy)은 이중성 (Duality)을 이용하여 폐쇄형 큐잉 모델의 복잡성을 크게 줄일 수 있을 뿐 아니라, 수선공이 가는 휴가를 모델에 추가시킬 수 있다. 이러한 이중성 이론 (Duality Principle) 외에도 이번 모델을 해석적으로 풀기 위해서는 마코브 과정 (Markov)과 semi-regenerative 과정의 해석이 필요하며, 여기서 얻어진 정확한 수식 (explicit formulas)들을 통해 수선비용, 대기 시간, 신뢰성 향상을 위한 추가 비용과 같은 추계과정의 수학적인 해석이 가능해 진다.

2. Duality Principle (이중성 이론)

2.1 Stochastically Congruent Models
(확률적으로 합동인 모델들)

이중성 이론 (Duality Principle)을 소개하기 위해서 우리는 현재 다루고 있는 모델 (모델-1) 보다 간단한 또 하나의 신뢰성 모델을 언급하고자 한다. - 이 새로운 모델을 모델-2라 칭한다. 모델-2는 모델-1과 아주 비슷하지만, 수선공이 휴가를 갈 수 없으며, 초 보유 자원을 포함하지 않은 인위적인 모델을 말한다. 다시 말해서, 수선공은 고장난 기계를 계속해서 수리를 하여야 하며, 설사 고장난 기계가 없다 하더라도 작업을 계속 한다. 그렇지만, 모델-2의 경우 휴가와 비슷한 성격을 가진 것이 있는데, 그것은 바로 수선공이 휴가를 가야 할 시기에 고장나지 않은 새로운 기계를 가지고 오는 것이다. 이렇게 가져온 새로운 기계는 수리를 위해 대기하고 있는 고장난 기계와 맞바꾸거나, 고쳐야할 기계가 없을 경우 그냥 버린다. 이렇게 되면 이 시스템 내에 있는 기계의 대수는 m 이 된다. 모델-2는 다 채널 개방 큐잉 시스템과 이중성(Dual)을 가지는데, 보다 정확하게는 G/M/m/0 의 형태를 가지는 큐잉 시스템과 이중성을 이룬다 -이러한 다 채널 시스템을 모델-3라고 칭한다.- 이중성 이론을 통해 모델-2와 모델-3이 합동 (congruent) 이 됨을 알 수 있다. tau_0 (=0),tau_1`,` ...

2.2 Connection between Models
(모델들 사이의 연관성)

이번에는 위에 언급한 모델을 보다 형식적으로 표현하고자 한다. 모델-1에서 Z_{t}^{1} 는 시간t 에 작동중인 기계들의 총 대수라고 하자. R 은 무작위로 제공되는 초(超) 보유 자원의 대수를 뜻한다. 이러한 초 보유 자원의 대수는 확률적으로 결정되며, 확률분포를 확률 질량 함수(probability mass function)로 표현하면,

r(n):=P Left {R=n Right}

이 되고, r``=``E[R] 의 평균값을 가진다. 만약, 수리공이 모든 기계들의 수리가 끝나면, 모든 동작하는 기계의 수는 m+1 가 된다. 이 때, 수리공은 자체 수리를 위한 휴가를 떠나고, R+1 의 기계가 동작이 불가능하게 되는 순간 수리공은 작업을 시작하게 된다. 즉, 휴가를 다녀 온 수리공은 대기하고 있는 고장난 기계들을 고치기 시작한다. 초 보유 자원은 수리공이 휴가를 간 동안 고장난 기계들을 대신한다. tau_0 (=0),tau_1`,` ... 는 수리공이 고장난 기계를 수리하는 순간이다. 고장난 기계 한 대를 고치는 시간을 확률 분포로 표현하면,

A(x) ``:=``P` Left{tau_n+1` - `tau_n`<=`x `Right}

이 되고, 평균 시간은 a``=``E`[tau_n+1 - tau_n] 이 된다.

모델-2의 경우, 동작 가능한 고장난 기계를 하나의 수리공이 수선한다. 시간 t 에 동작중인 기계의 수는{Z}_t`` 로 표현한다. 그러나, 모델-1과는 달리 모델-2의 경우는 모든 기계들이 동작을 제대로 하더라도 수리공은 휴가를 가지 않는다. T_n 은 n번째의 수리 완료를 나타낸다. 동작하는 기계의 수가 m 이 되었을 때, 수리공은 작업을 중단하고, T_n+1 일 때 새로운 기계를 가지고 돌아온다.

xi_n```:=```{Z_{tau_n -}^{1} } and X_n`:=`{{Z}_{T_n -} }

n=0,1,...

이와 상응하여,

(Omega_1 , U_1 , (P^x)_{x IN E} , ({xi_n} ; n=1,2,..)``)``->``E_1

그리고,

(Omega , U , (P^x)_{x IN E} , ({X_n} ; n=1,2,..)``)``->``E .

두 가지 과정 (process)은 모두 마코브 체인(Markov chain)이며, 확률적으로 동일하고, ergodic이다. 이들의 확률 분포를 일반적인 불변 확률로 표현하면 boldP`=`Left{`P_0`,`...`,P_m `Right} 이 된다. 또한 (`X_n`) 와 (`xi_n`) 이 동일하므로 (equivalent) 두 과정중 한 가지만 다루도록 한다. 모델-1 과 모델-2에 있는 또 다른 추계 과정 (stochastic process) 은

(Omega , U_1 , (P^x)_{x IN E} , (Y_{t}^{1} ; t``>=``0)``)``->``E) 와

(Omega , U , (P^x)_{x IN E} , ({Y}_t ; t``>=``0)``)``->``E) 이며, 이들은 위의 순간과 관련된 최소 세미 마코브 과정 (minimal semi-Markov processes)이 된다. 보다 진전된 과정을 위해 다음 같이,

M_k``:=`` E^k [`T_1{bold]} ,{boldM} ``=``Left{M_0`,`...`,`M_m Right}

&boldPM```=```a`+`P_m `Left(`aR`+`{(R+1) over mu(m+1)}`Right)``` 를 정의한다. 그리고, 추계과정 Z_t 와 Z_{t}^{1} 은 수리공이 작업을 하는 기간 동안 동일한 프로세스를 가지고, 이를 수학적으로 표현하면,

P^x Left{Z_{t} = k`` Right}`=`P^x Left{`Z_{t}^{1}`=k ``|`` t NOTIN {Idle~Period} `Right}

이 된다. 다음을 계산하면,

&lim from { t -> inf }``P^x Left{`t IN {Idle} ``|`` Y_{t}^{1}`= m ``Right} `=`{1 over{ 1 + a mu (m+1)}} ,

그리고,

&lim from { t -> inf }``P^x` Left{Y_{t}^{1}`= m ``Right}``` =```{P_m``M_m} over {boldPM}```
&~~~~=``E` left[{P_m (S+1) Left[ 1+mu (m+1) a `Right]} over {a mu(1+S`P_m)(m+1) + P_m (S+1)}} Right] .

pi_{k}^{1}``:=`` lim from { t```-> `inf } P^x Left{ Z_{t}^{1} `=`k`` Right} 로 선언 할 경우, 다음과 같은 수식으로 표현이 가능하다.

&pi_{m+1}^{1}```=``` lim from { t```-> ``inf }`` P^x Left{`Z_{t}^{1}`=`m+1``Right}```## &~~~``~=```E` Left[ {P_m (R+1) }over {a mu(1+P_m`R)(m+1) + P_m (R+1)} Right]} 그리고,

&pi_{k}^{1}```=```(1-pi_{m+1}^{1})`pi_{k}~,~~k=0,1,...,m .

또한 pi_{k}^{1}`:=` lim from { t```-> `inf } P^x Left{ Z_{t}^{1} `=`k`` Right} 으로 표현되며, 이 확률 분포는 4장에 다루어 질 것이다.

3. Embedded Process of Model 3 (다 채널 큐)

모델-3의 경우, 우리가 언급한 것처럼, GI/M/m/0의 다 채널(multi-channel) 큐로 표현되며, 이러한 모델은 고전적인 것으로 Tak cs 에 의해 풀렸다. 시간에 따라 변화하지 않는 마코브 체인 (Markov chain)의 확률 분포 (stationary probabilities)인 boldP`=`Left{`P_0`,`...`,P_m `Right} 는 다음과 같이 풀이된다. (참고 문헌 [6])

P_k``=``Left{ MATRIX { {SUM from { { r}=k} to m B_r``PMATRIX {{r~}#{k~}} (-1)^r-k ,}& {k``=``0,.,m-1, }## {Left[a_0 SUM from { {r}=0} to m PMATRIX {{m~}#{r~}} over a_r Right]^-1 ,}& {k=m } }
where
B_n`=` {a_n SUM from { {r}=n} to m{ Left(MATRIX { {m }# {r } } Right)} over a_r } over {a_0 SUM from { {r}=0} to m{ Left(MATRIX { {m }# {r } } Right)} over a_r } ,
a_i```:=``` Left{MATRIX {&1~~~~{,~~~~~~r`=`0,}# & {PROD_{i=0}^r {alpha_i over{1-alpha_i}}}{,~r`>=`1,} }
alpha(theta)``=`` INT _{ 0}^{inf } e^{-{theta``u}}`` A(du)`,
alpha_r``=``alpha(r mu).

4. Stochastic Process w/ Continuous Time (시간인자를 포함한 추계 과정론)

이번 장에서는 모델-3에 있어 연속되는 시간인자를 포함하는 추계과정을 알아본다. 아래의 해석 과정은 Dshalalow과 제시한 이론을 따르며 (참고문헌 [4]), 일관적인 표현을 위해 자세한 과정을 Dshalalow의 과정을 자세히 보다 자세히 살펴보기로 한다. N(t`) 는 (T_n) 과 V_t``:= T_{N(t`)+1} - t , t`>=`0 에 관련하는 카운트 프로세스 (counting process)를 말한다. V_t` 는 다음의 수리 완료시간 (T_n+1) 까지의 남은 시간들을 나타낸다. 이 경우, (Z_t , V_t`) 는 약한 마코브 과정이 되고, 그 확률 분포는

&pi_k (t , u){rm du}```=``` P Left{Z_t``=``k , V_t IN [u,u+du}] ``Right}`,
&i,k`` IN {rm E}`,```u,t`` >= R_+

이다. 우리가 다루고자 하는 것은 평형 상태 (equilibrium)이기 때문에 우리는 초기 조건을 생략할 수 있다. 즉, boldpi 에 있는 색인 (i) 을 생략 할 수 있다. (Z_t , V_t`) 는 T_0`,`T_1`,`.. 와 상응하는 semi- regenerative 관계를 가지고 있으며, 그것의 확률분포를 정의 할 수 있다. 이를 위해 다음을 선언한다.

&pi_k (u)`:=` lim from {t` ->`inf } pi_k (t,u) ,
&{TILDEpi}_{k} (theta)```:=``` INT _{ _+ } pi_{k}(u) {rm e}^{-theta u} du,#
&,``{Rm e}(theta)`>=`0`,```k` IN `{rm E},

그리고,

{pi}_k ```:=``` lim from { theta`` downarrow ``0 } {TILDEpi}_k (theta) .

단계적인 계산과정을 거친 후 우리는 다음 해를 구할 수 있다.

&``pi_k`````=```{pi_k-1`(0)} OVER {k`mu`}`,````k=1,...m+1 ,
&pi_0```=```1 - SUM from { { k}=1} to m pi_k`.

그러나, k=0,.,m 일 때 pi_k (0) 를 구하기 위해서는 Dshalalow의 해석법이 필요하다. (참고문헌 [2].[3]). 이를 위해 다음을 정의한다.

p_{j`k}(t)``:=```P^j Left{Z_t`=`k`,`Y_t`=`j`|`T_1`>t` Right} ,
INT _{ 0}^{inf } p_{j`k}(t)``A(dt)``=``p_jk`,```j,k` INE

는 마코브 체인(X_n) 의 변환 확률 (transition probabilities)을 나타낸다. 그리고, 다음과 같은 가정을 한다.

P^j Left{Z_t =k | T_1 >t`Right}=P^j Left{Z_t =k |T_1 > t+y`Right}`,``` y >=`0.

또한,

K_{t}^{j} (k×[0,y])`:=`P^j Left{Z^t =k, V IN [0,y], T_1 >t Right} 을 선언하고, 수렴 이론 (main convergence theorem)을 이용하여, (참고문헌 [5]를 통해)

lim from {t`->`inf} P_{t}^{j} (k×[0,y])={1 over a} SUM from { { j}INE} P_j INT _{0}^{inf} K_{t}^{j} (k×[0,y]) dt

따라서,

pi_k (x) = {1 over a} *SUM from { { j}INE}* P_j INT _{0}^{inf} p_jk (t`)`A(dt) .

x`->`0 이고, P_k = SUM from { {j }INE} P_j` p_jk 이면,

pi_k (0)= P_k over a

로 해를 구할 수 있다.

결론적으로 우리는 pi_k 를 다음과 같이 구한다.

&Left{ MATRIX { &pi_0```=```1 - SUM from { { n}=1} to m pi_n ```` `,~~~~``k```=```0 ## &pi_k`````=```{P_k-1} OVER {k`mu` a} `,```k```=```1`,...,```m.}

프로세스 Z_{t}^{1} 은 2장에서 구한 해를 통해서 다음과 같이 나타난다. k=0,1,...,m 일 경우,

pi_{k}^{1}``=`E`left[{a mu (m+1) (1+P_m R)}over{a mu (m+1) (1+P_m R) +P_m (R+1)} Right] pi_k ,

그리고,

pi_{m+1}^{1} =E`left[{P_m (R+1)} over{a mu (m+1) (1+P_m R)+P_m (R+1)}Right].

5. Stochastic Optimizations (확률적 최적화)

우리는 이번 장에서 신뢰성과 관련한 최적화 문제를 다루도록 한다. 이번 신뢰성 모델을 위한 최적화 문제를 적절하게 변환하도록 한다. 최적화를 위한 전술 (strategy) S 는 시스템에 의사(act)가 결정되는 것의 집합을 뜻하고, 이러한 act는 일반적으로 서비스 시간이나, 작동하는 기계의 수 등이 포함된다. 시스템은 이러한 비용의 함수가 모인 집합 C` 의 목표가 된다. 그리고, phi(S,C,t) 은 시간t` 일 때의 기대 비용 (expected cost) 함수를 나타낸다. 전술 S 를 적용하기 위한 비용이 바로 C` (기대 비용 함수)이다. 이러한 시간에 따라 누적된 기대 비용 함수를 시간으로 나눈 함수를 무한 시간으로 확장하게 되면, 기대 비용의 비율에 대한 함수 (expected cost rate)가 다음과 같이 정의된다.

phi(S,C)``` := ``` lim from { t -> ``inf }``1 over t ` phi`(S,C,t) .

우리는 이번 모델을 위해 특별히 제한된 경우를 해석 하고자 한다. 함수 g(u) 는 수리공 (repairman)의 휴가기간 동안 필요한 비용 함수를

나타낸다. 만약, Left{ Y_{t}^{1}`;``y>=0 Right} 가 세미 마코브 과정(semi-Markov process)이고, g(u) 가 선형함수 일 경우, 즉, g(u)=c u 이면, INT _{s=0}^{t} {rm bold 1}_{Left{m Right}}(Y_{s}^{1}) ds 는 [0,t] 중에 수리공의 휴가로 사용된 시간을 의미한다. 여기서,{rm 1}_A 는 집합 A 의 지시함수 (indicator function)를 뜻하고,

Ug(u)``=``E Left[g Left(INT _{0}^{t} {rm bold 1}_{Left{m Right}}(Y_{s}^{1}) ds Right) Right]

는 그게 준하여 나타나는 기대 비용을 나타낸다. 후비니의 이론 (Fubini's Theorem) 에 따라

Ug(u)``=`c INT _{0}^{t} P Left{Y_{s}^{1}=m Right} ds

이 된다. 함수f(n) 는 현재 동작하는 기계의 필요한 비용에 대한 단위 시간당 비율을 뜻하고,

Uf (t)```=```E^i`` Left[INT _{0}^{t} f (Z_s) ds Right]

`=``` SUM from { {k }=0} to m+1 `` f (k) INT _{ s=0}^{t } P^i Left{Z_{s}^{1} =k Right} ds

으로 정의된다. 이 신뢰성 모델의 모든 과정에서 [0,t] 동안 누적된 기대비용은

&phi(S,C,t)`=`c INT _{0}^{t} P Left{Y_{s}^{1}=m Right} ds ## &~~~~~~~~~~~~~+ SUM from { {k }=0} to m+1 `` f (k) INT _{ s=0}^{t } P^i Left{Z_{s}^{1} =k Right} ds

이다. semi-regenerative와 semi-Markov과정을 수렴이론을 통해서 다음과 같은 성격을 갖는다.

i) lim from { t`->`inf } INT _{ 0}^{t } P^i Left{Z_{s}^{1} =k Right}ds = pi_{k}^{1}

ii) lim from { t`->`inf } INT _{ 0}^{t } P^i Left{Y_{s}^{1} =k Right}ds`` =`` {P_k M_k}over{boldPM}

이러한 특징들은 무한 시간으로 확장했을 때 생성되는 기대 비용의 비율을 제공한다. 식(i)-(ii)는 기대 비용 비율 함수를

&phi(S,C)`` = `` lim from { t -> ``inf }``1 over t ` phi`(S,C,t)## &~~~~~~~``=``c``{P_k M_k}over{boldPM}+ SUM from { { k}=0} to m+1 f(k)pi_{k}^{1}

과(와) 같이 보여 주고, 이 함수는 우리의 신뢰성 모델을 최적화 하는 목적 함수가 된다. 이 장에 제안된 모델의 경우, 목적함수의 최소 값을 찾도록 고안되어 있다. 그러므로,

phi(S_0 ,C)`` = `` min Left{ phi`(S,C) Right}

이 우리가 구하고자 하는 최적의 값이다. 즉, 전술 S_0 는 목적함수phi(S ,C) 의 최소 값을 제공한다.

7. Reference (참고 문헌)

[1] inlar, E., *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[2] Dshalalow, J. H., On the multiserver queue with finite waiting room and controlled input, *Adv. Appl. Prob.* **17** (1985), 408-423.

[3] Dshalalow, J. H., On a duality principle in processes of servicing machines with double control, J. of Appl. Math. & Sim. 1:3 (1988), 245-251.

[4] Dshalalow, J. H., On single-server closed queues with priorities and state dependent parameters, Queueing Systems **8** (1991), 237-254.

[5] Dshalalow, J. H., Queueing systems with state dependent parameters, in *Frontiers in Queueing* (Edited by Dshalalow, J., H.), CRC Press, Boca Raton, FL, 61-116, 1997.

[6] Tak cs, L., *Introduction to the Theory of Queues*, Oxford University Press, New York, NY, 1962.