

비정규 높이분포를 가진 3차원 거친 표면의 탄·소성접촉해석

김태완·구영필*·조용주**

부산대학교 대학원 정밀기계공학과

*부경대학교 기계공학부

**부산대학교 기계공학부

The Elastic-Plastic Contact Analysis of 3D Rough Surface of Nongaussian Height Distribution

Tae-Wan Kim, Young-Pil Koo* and Yong-Joo Cho**

Graduate School, Pusan National University

**School of Mechanical Engineering, Pukyong National University*

***School of Mechanical Engineering, Pusan National University*

Abstract - Surface roughness plays a significant role in friction, wear, and lubrication in machine components. Most engineering surfaces have the nongaussian height distribution. So, in this study, elastic-plastic contact simulations are conducted for not only gaussian surfaces but also nongaussian surfaces. Nongaussian rough surface considering the kurtosis is generated numerically. The contact simulation model takes into account the plastic deformation behaviors of asperities by setting a ceiling on their contact pressure at material hardness value. It will be shown that the performance variables such as real contact area fraction, plastic area fraction and average gap are sensitive to the characteristics of surface geometry according to kurtosis.

Key words - Elastic-plastic contact analysis, Nongaussian surface, Kurtosis, Real contact area fraction, Plastic area fraction, and Average gap

1. 서론

기계요소에 있어 면대면 접촉은 필연적이며 이러한 접촉의 심각한 정도에 따라 마찰 마모의 거동이 결정된다. 표면거칠기나 형상에 따라서 극도로 높은 수직응력을 유발하여

미세균열이나 마모입자의 형성을 가속시킬 수 있다. 따라서 적절한 트라이보 시스템의 설계를 위해서는 접촉면의 미소 접촉거동에 대한 정확한 이해는 매우 중요하다 할 수 있다.

그동안 거친 표면의 접촉에 관한 많은 연구들이 있어왔다. 우선 고전적으로는 대체로

돌기들의 상호작용의 영향은 무시한 채 돌기들이 단지 어떤 기하학적인 형상과 높이 분포를 가진다는 가정들하에서 수행되어져 왔는데, Greenwood와 Willamson⁽¹⁾은 접촉돌기들의 형상을 일정한 곡률을 갖는 구로써 근사시켜 접촉하중을 계산하였으며 Whitehouse와 Archard⁽²⁾는 돌기의 높이들이 정규분포(gaussian distribution)를 갖는 임의의 표면에 대해서 rms 거칠기와 상관길이(correlation length)의 파라메타를 사용하여 해석하였다. Onions와 Archard⁽³⁾는 이러한 결과를 이용하여 평균 압력과 걸보기 면적과는 독립적임을 밝혔고 Bush 등^(4,5)은 Nayak⁽⁶⁾의 등방성의 정규분포 표면모델을 사용하여 실접촉 면적은 하중에 거의 선형적임을 밝혔고 이후 이 해석을 강한 이방성을 띄는 표면에까지 확대시켰다. 그러나 이러한 연구들은 작은 하중에 대해서는 그 결과가 유효하나 높은 하중에서는 돌기들의 상호영향을 배제시킴으로써 그 정확도가 결여된다.

최근에는 컴퓨터의 증가된 연산속도에 힘입어 많은 접촉 해석 모델들이 생기고 있다. Lai와 Cheng⁽⁷⁾은 컴퓨터로 생성시킨 표면모델을 이용하여 실접촉 면적과의 접촉압력을 계산하였고 Lee와 Cheng⁽⁸⁾은 2차원 거칠기를 가진 표면에 대해서 돌기들의 탄성작용을 고려해 실접촉 면적, 평균 간극, 평균 돌기 접촉압력의 관계식을 도출하였으며 Ren과 Lee^(9,10)는 이 연구를 3차원 접촉거동에까지 확장시켰다.

이러한 모델들은 한 돌기의 변형이 다른 돌기의 변형에 영향을 미치게 되는 돌기들 사이의 탄성변형을 고려함으로써 기존의 고전적인 연구들에 비해 큰 이점이 있으나 이상의 연구들은 거의 대부분 정규분포 표면이라는 기본 가정하에서의 접촉 해석 결과이다. 그러나 대부분의 실제 기계표면은 비정규분포(nongaussian distribution)를 이루고 있기 때문에 위의 결과들을 실제의 기계표면에 적용하는 데는 많은 문제점이 있다.

따라서 본 연구에서는 정규분포 표면 뿐만

아니라 비정규분포 표면에 대해서 접촉 해석을 수행하여 그 특성을 파악해 보고자 한다. 이를 위해 비정규 분포의 특성을 나타내는 인자의 하나인 kurtosis를 고려해 비정규분포 표면을 컴퓨터로 생성시켰다. 그리고 이러한 거친표면에 대해서 돌기의 탄·소성 변형의 거동을 포함시켜 접촉해석을 수행하여 실접촉 면적율, 소성면적율, 그리고 평균 간극 등과 같은 평가 변수들에 대한 Kurtosis 성분의 영향을 규명할 것이다.

2. 수치적 표면 생성

2.1 Kurtosis와 표면 거칠기

기존의 표면 거칠기를 고려한 연구에서는 표면 거칠기 파라미터로 중심선 평균 거칠기(Ra)나 σ (r.m.s)값을 많이 이용해왔다. 그러나, 중심선 평균 거칠기나 σ 값만으로는 표면 형상을 정확히 나타내지는 못한다. 같은 중심선 평균 거칠기나 σ 값을 가지더라도 다른 돌기 분포를 가지는 표면 형상을 가질 수 있다. 따라서 표면 형상을 더욱 정확히 나타내기 위해서는 돌기의 분포상태를 나타내는 skewness와 kurtosis를 사용해야만 한다. kurtosis는 돌기들의 분포가 어떤 높이에서 집중이 되는지를 나타내는 것이다. 돌기들의 분포가 어떤 높이에서 집중적으로 분포되어있다면, 분포곡선은 뾰족한 모양을 나타내고 kurtosis값은 커지게 되며, 돌기들의 분포가 넓게 분산된다면, 분포곡선모양은 평평하게 변하며 이 값은 낮아지게 된다. kurtosis의 계산에는 식(1)이 이용된다.

$$Ku = \frac{1}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} z^4 \bar{\psi} dz \quad (1)$$

여기서, σ 는 rms 거칠기이며 z 는 표면 거칠기의 높이이고 $\bar{\psi}$ 는 확률밀도함수(power spectral density function)이다.

일반적으로 kurtosis값이 3이 되는 경우에는 표면 형상은 정규분포 표면이라 하고, 3보다 큰 경우는 leptokurtic, 3보다 작은 경우는 platykurtic이라 한다⁽¹¹⁾.

2.2 표면 생성 절차

표면 거칠기가 윤활 해석에 고려되어지기 위해서는 우선 거칠기를 갖는 표면 데이터를 얻어야 한다. 표면 거칠기를 구하는 방법은 측정장비를 이용하는 방법과 수치적으로 표면을 생성하는 방법이 있다. 측정에 의한 방법은 정도가 높은 측정장비를 요구하고 표면의 구조를 알기 위해서는 단면을 수많이 측정하여 재배열해야 하는 어려움이 따르고 있다. 그러나 수치적 방법은 거칠기 높이의 상관관계, 거칠기 높이의 분포를 원하는 형태로 쉽게 부여할 수 있어서 거칠기의 특성을 나타내는 각 파라메타의 영향을 분리하여 파악할 수 있는 장점이 있다.

따라서, 본 연구에서는 임의의 kurtosis 값을 표면에 부여하기 위하여 수치적으로 생성된 표면을 사용하였다.

표면 구조의 통계적 물성치는 확률밀도함수와 자기상관함수(autocorrelation function)로부터 특정 지워진다. 즉, 어떤 고려해야 할 통계적 물성치를 갖는 면을 생성하는 편리한 방법은 미리 정해진 확률밀도함수와 자기상관함수를 갖는 면을 생성하는 것이다. 면의 자기상관함수는 식(2)와 같이 정의된다.

$$R(\lambda_x, \lambda_y) = E\{z(x, y)z(x + \lambda_x, y + \lambda_y)\} \quad (2)$$

여기서, E 는 기대 연산자 (expectancy operator)이며 λ_x 와 λ_y 는 x 축 및 y 축의 자기상관길이(autocorrelation length)이다.

표면 거칠기의 계수형태를 고려해야 하므로 노드 번호인 i, j 를 사용하는 것이 편리하다. 즉, z_{ij} 가 $x = i\Delta x$, $y = j\Delta y$ 에서의 거칠기 높이를 나타낸다면 R_{pq} 는 다음과 같이 정의된다.

$$R_{pq} = R(p\Delta x, q\Delta y) = E(z_{ij}, z_{i+p, j+q}) \quad (3)$$

여기서, Δx 와 Δy 는 샘플링(sampling) 간격이다.

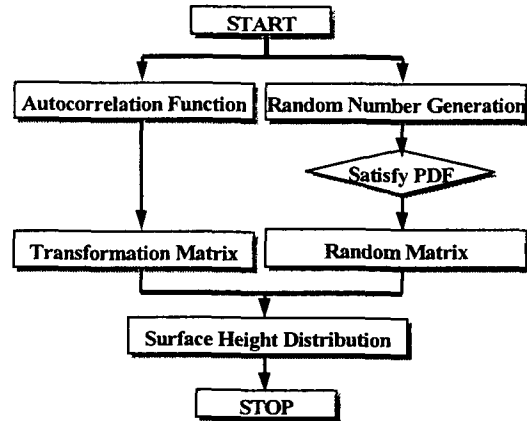


Fig. 1 Flowchart of generation of random rough surface

확률밀도함수는 거칠기 높이의 분포에 관계하여 정규분포 또는 비정규분포로 구분할 수 있다. 식(4)에 정규분포에 대한 확률밀도함수를 나타내었으며 이 경우에 거칠기 높이의 표준편차와 평균치를 부여하여 원하는 거칠기 높이분포를 구할 수 있다.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2\} \quad (4)$$

여기서, \bar{x} 는 거칠기 높이의 평균치이다.

식(5)는 비정규 분포에 대한 확률밀도함수이며 가중치 s 와 t 를 변경하여 원하는 거칠기 높이 분포를 구한다. 즉, $s < t$ 가 되도록 s 와 t 를 취하면 거칠기 높이는 골짜기로 편중되고 $s > t$ 인 경우에는 높은 값들이 많아진다(Sk). $s=t < 3$ 이거나 $s=t > 3$ 인 경우에는 대칭(symmetric)이지만 거칠기 높이 분포가 비정규 분포 형태를 가진다(Ku).

$$f(x) = \frac{1}{\beta(s, t)} x^{(s-1)} \cdot (1-x)^{(t-1)} \quad (5)$$

여기서, $\beta(s, t)$ 는 베타함수(Beta Function)이며 s 와 t 는 가중치(weighting factor)이다.

랜덤 행렬에 대한 선형 변환(linear transformation)을 이용하여 주어진 확률밀도함

수와 $n \times m$ 크기의 자기상관 행렬 $[R_{pq}]$ 에 대한 거칠기 높이 $[z_{ij}]$ 의 $N \times M$ 행렬을 생성할 수 있다. 난수 생성기(random number generator)를 이용하여 $(N \times n) \times (M \times m)$ 행렬 $[\eta_{ij}]$ 를 생성한 다음 선형변환을 통하여 거칠기 높이가 구해진다.^(6,12) Fig. 1은 표면 거칠기의 수치적 생성과정을 나타낸 것이며, Fig. 2는 이상의 절차를 거쳐 수치적으로 생성한 거친 표면을 보여 준다.

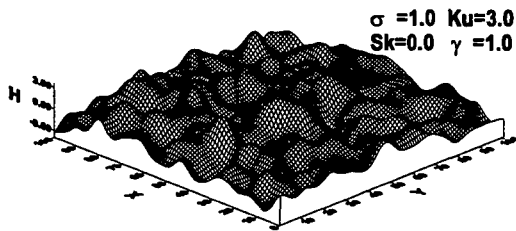


Fig. 2 A computer-generated rough surface

3. 접촉 해석

일반적으로 한 쌍의 거친 표면의 접촉은 하나의 상당 표면(equivalent surface)과 강체면의 접촉으로 모델링 할 수 있다. 본 연구에서는 기본적으로 영향함수(influence function)를 이용한 방법으로 3차원 접촉해석을 수행하였으며 접촉 영역은 한 변의 길이가 $2a$ 인 사각영역으로 가정하였다.

돌기들의 소성변형의 거동에 대한 모델링에서는 어떠한 국부적으로 접촉하는 영역에서든지 접촉하는 두 물체중에서 더 경도가 약한 물체의 단축 항복강도의 3배 이상을 겪게 되면, 그 영역에서의 접촉압력은 $3Y$ 와 같게 되고, 그 영역은 자유롭게 변형하게 된다. 따라서 이러한 접촉문제를 풀기 위해서는 다음의 구속조건에 의한 반복 연산이 필요하다.

$$\text{접촉영역일 때 } p(x, y) \geq 0, \quad (6-a)$$

$$\text{접촉영역밖일 때 } p(x, y) = 0, \quad (6-b)$$

$$p(x, y) \geq 3Y \text{ 일 때 } p(x, y) = 3Y \quad (6-c)$$

여기서, $p(x, y)$ 는 접촉압력이며 Y 는 재료의 항복강도이다.

$h(x, y)$ 는 변형후의 강체면과 거친 표면간의 거리를 나타내며, 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$h(x, y) = e(x, y) + u(x, y) - \delta \quad (7)$$

여기서, $e(x, y)$ 는 변형되기 전의 표면형상의 높이분포이고 δ 는 유효 강체 변위(effective rigid body displacement)이며 $u(x, y)$ 는 접촉영역에 작용하는 균일한 압력에 의한 변위로서 Love의 변위해⁽¹³⁾를 이용하였다.

접촉영역 Ω 내에서는 $h(x, y) = 0$ 이므로 식 (7)은 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\iint_{\Omega} u(x, y) dx dy = \delta - f_i(x, y) \quad (8)$$

사각조각면(patch)내에서는 균일한 압력을 가지므로 식 (8)은 다음과 같이 단순 이산화될 수 있다.

$$C_1 \sum_{j=1}^k F_{i,j} P_j = \delta - f_i \quad (9)$$

여기서, $C_1 = (1 - \nu_1^2)/\pi E_1 + (1 - \nu_2^2)/\pi E_2$ 이고 k 는 접촉영역 Ω 내에서의 사각조각면의 수이고 $F_{i,j}$ 는 요소 j 에서의 수직분포하중에 의한 요소 i 에서의 영향을 나타내는 영향함수(influence function)이다.

Fig. 3에 접촉해석절차를 나타내는 순서도를 나타낸 것으로서, 먼저 앞 절에서 상술한 방법으로 거친 표면을 수치적으로 생성시키고 두 거친 표면 사이의 접근 거리를 변화시켜 탄성 변형량을 부여하여 초기 접촉점들의 수와 초기 변형량을 계산한다. 그리고 돌기들의 상호 작용을 고려하기 위한 영향계수 행렬(influence matrix)를 구성하여 초기 접촉 압력을 계산한 다음, 음의 압력값을 갖는 접촉점

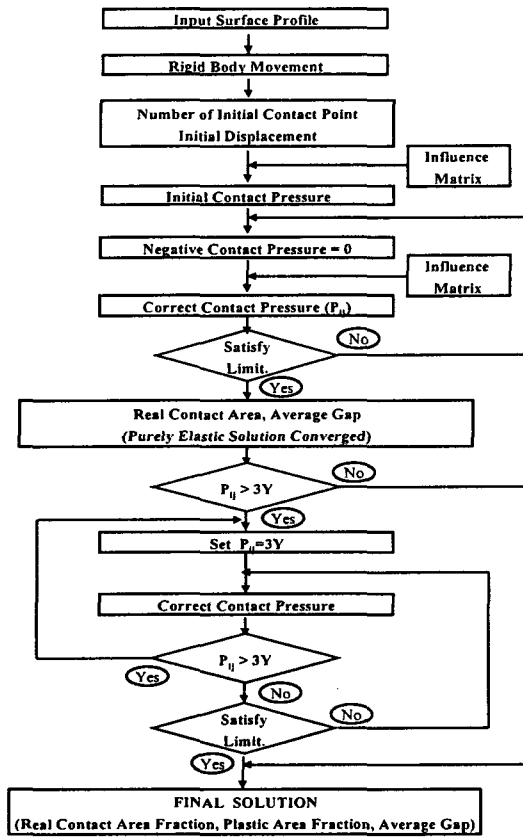


Fig. 3 Flowchart of contact analysis

은 배제시키고 새로운 접촉점 수에 대응하는 영향계수 행렬을 재구성하는 반복계산을 수행하여 접촉압력을 계산한다. 여기서 돌기의 소성변형을 고려하기 위해 접촉압력이 재료경도(3Y) 이상이 되면 3Y로 두고 다시 반복 연산을 통해 새로운 접촉 영역과 접촉 압력을 계산한다.

일반적으로 유한폭을 가진 결보기엔 평평한 거친 표면에 강체면을 압착시키게 되면 돌기 압력 분포는 전체적으로 균일하지 않고 모서리의 선단부(edge)부위에 압력이 집중되는 바람직하지 못한 문제가 발생한다. 이상적으로는 이러한 선단부의 영향을 피하기 위해서 접촉 영역을 무한히 넓은 것으로 두어야 하지만 이는 수치적으로는 명백히 불가능한 것이다. 이를 해결하기 위해 본 연구에서는 상당 표면을 프로파일링 시키는 방법⁽⁸⁾을 사용하였

는데, 그 절차는 다음과 같다.

우선, 상당 표면을 기준면과 표면 거칠기 성분으로 분리시켜 사각 기준면에 대해 접촉 해석을 수행하여 탄성 변형량과 수직 압력 분포를 구한다. 여기서 구한 압력 분포로부터 사각면 한가운데의 압력으로써 전 접촉영역에 걸쳐 대체시켜 압력 스파이크(pressure spike)가 없는 균일한 사각 압력 분포를 만든다. 다음에는 변경한 압력분포로써 다시 접촉 해석을 수행하여 탄성 변형량을 계산하여 원래의 사각 기준면에서 기존의 탄성 변형량과 변경후의 탄성 변형량의 차를 감하고 여기에 다시 표면 거칠기 성분을 중첩함으로써 상당 표면의 프로파일링을 완성한다. 이러한 프로파일링 방법으로써 선단부의 압력스파이크를 효과적으로 없앨 수 있고 무한체의 접촉해석이 가능하다.

4. 결과 및 고찰

Fig. 4~Fig. 9는 세 가지의 다른 Kurtosis에 대해서 그리고 6가지의 재료경도에 대해서 결보기 평균 접촉압력에 따른 실접촉면적율, 소성면적율, 그리고 평균 간극의 변화를 도시한 것이다. 그래프의 각 점은 같은 성질을 지니는 7개의 다른 표면들의 결과를 평균하여 계산한 것이다.

우선, Fig. 4와 Fig. 5는 평균접촉압력에 대한 실접촉면적율을 도시한 것이다. Fig. 4는 Ku=3의 표면에 대하여 재료경도값에 대한 평균압력 대 실접촉면적율을 도시한 것이다. 그래프로부터 재료가 연할 때는 그 곡선이 거의 선형적이라는 것을 알 수 있다. 그리고 재료 경도가 7.0이상일때는 실접촉율의 변화가 거의 없음을 알 수 있다. Fig. 5는 Hardness = 0.5 일 때, 세가지의 다른 표면에 대한 실접촉율의 변화를 도시하였다. 세 경우 모두 평균 접촉압력(하중)이 증가함에 따라 실접촉율이 증가하고 있는데, 낮은 하중에서는 하중과 실접촉 면적의 관계가 선형적이거나 높은 하중에서는 돌기들의 탄성 작용

의 영향에 의해 선형적인 관계가 나타나지 않음을 알 수 있다. 또 $Ku=4.0$ 인 경우 낮은 하중에서는 돌기 끝단의 형상이 뾰족하여 단위길이당 돌기가 차지하는 비율이 $Ku=2.0, 3.0$ 의 표면보다 작기 때문에 실질적접촉율이 상대적으로 낮으나, 높은 하중에서는 돌기 골부위로 가면서 단위길이당 돌기가 차지하는 비율이 커짐으로 $Ku=2.0, 3.0$ 의 표면보다 실질적접촉면적율이 커짐을 알 수 있다

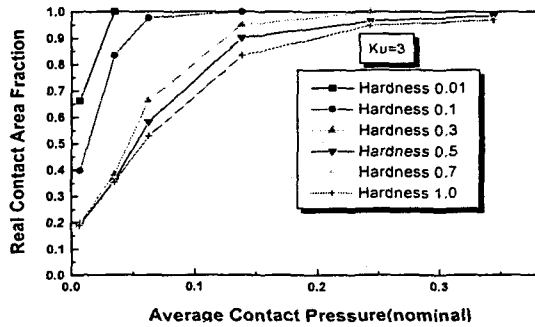


Fig. 4 The real contact area fraction against the nominal contact pressure for different hardness

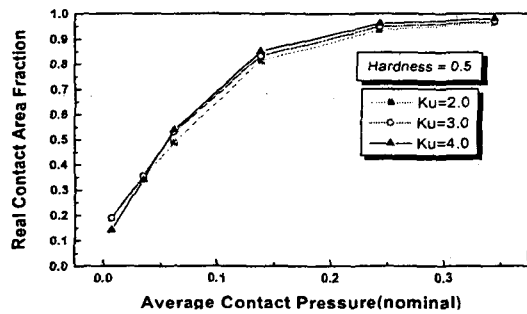


Fig. 5 The real contact area fraction against the nominal contact pressure for different Kurtosis

Fig. 6은 $Ku=3$ 의 표면에 대하여 재료경도 값에 대한 평균압력 대 소성변형을 한 면적율을 도시한 것인데, 여기서 낮은 경도의 경우 접촉 초기에 소성변형이 급격히 증가한다는 것을 알 수 있다. Fig. 7은 Hardness = 0.5 일 때, 세가지의 다른 표면에 대한 소성면적율의 변화를 도시하였는데 소성변형율은 실질적접촉면적율의 변화와 거의 비슷함을 알 수 있다.

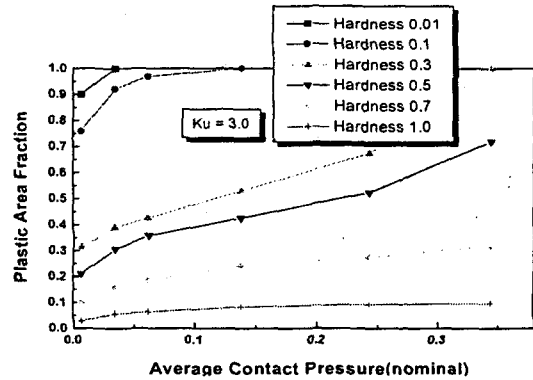


Fig. 6 The plastic area fraction against the nominal contact pressure for different hardness

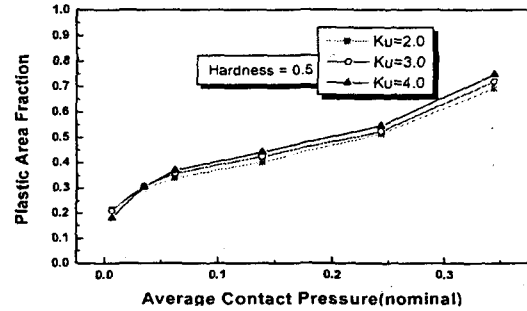


Fig. 7 The plastic area fraction against the nominal contact pressure for different kurtosis

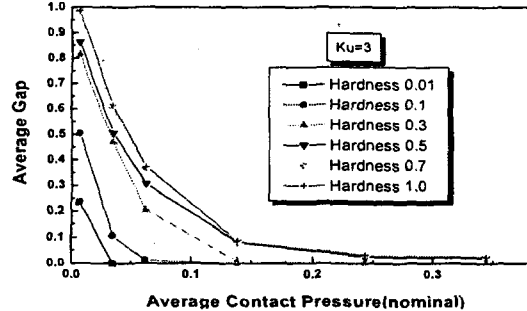


Fig. 8 The average gap against the nominal contact pressure for different hardness

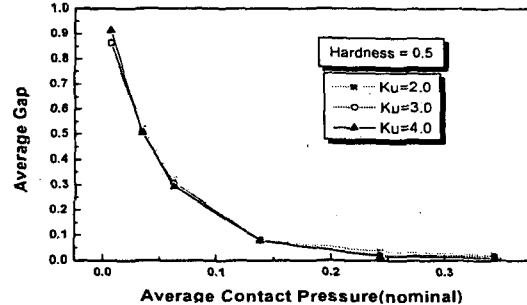


Fig. 9 The average gap against the nominal contact pressure for different kurtosis

Fig. 8과 Fig. 9는 평균접촉압력에 대한 평균간극을 도시한 것인데, 전체적으로 하중이 증가함에 따라 평균간극이 비선형적으로 감소하고 있음을 알 수 있다. Fig. 8의 재료경도값에 대해서는 재료가 연할수록 평균간극이 작아짐을 알 수 있으며, Fig. 9의 Kurtosis값에 대해서는 큰 차이를 발견할 수 없으나, 작은 하중에서는 Kurtosis가 클수록 평균간극이 다소 크고, 낮은 하중에서는 다소 작아짐을 알 수 있는데 이 역시 Kurtosis에 따른 표면형상의 특성에 기인하는 것으로 분석될 수 있다.

5. 결론

비정규 분포의 특성을 나타내는 인자의 하나인 kurtosis를 고려한 비정규분포 표면을 수치적으로 생성하고 이러한 거친표면에 대해서 돌기의 탄·소성 변형의 거동을 포함시켜 접촉해석을 수행하여 실접촉 면적율, 소성면적율, 그리고 평균 간극 등과 같은 평가 변수들에 대한 Kurtosis 성분의 영향을 살펴본 결과 다음의 결론을 얻었다.

(1) 실접촉면적율에 대해서 재료가 연할 때는 평균 압력에 따른 변화가 거의 선형적이고 재료 경도가 7.0이상일 때는 거의 변화가 없음을 알 수 있다. 또 큰 kurtosis 값의 표면은 작은 kurtosis 값의 표면에 비해 낮은 하중에서는 돌기 끝단의 형상이 뾰족하여 단위길이당 돌기가 차지하는 비율이 작기 때문에 실접촉율이 상대적으로 낮으나, 높은 하중에서는 돌기 골 부위로 가면서 단위길이당 돌기가 차지하는 비율이 커짐으로 인해 실접촉면적율이 커짐을 알 수 있다

(2) 낮은 경도의 경우 접촉 초기에 소성변형면적율이 급격히 증가함을 알 수 있고 Kurtosis에 대해서는 실접촉면적율의 변화와 유사한 경향을 가짐을 알 수 있다.

(3) 평균간극에 대해서는 재료가 연할수록 평균간극이 작아짐을 알 수 있고 kurtosis에 따른 영향은 적음을 알 수 있었다.

기호설명

$$E' = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \right]^{-1},$$

$E_{1,2}$ = Young's modules

$\nu_{1,2}$ = poisson's ratio

$\bar{\psi}$ = power spectral density function

E = expectancy operator

$\beta(s, t)$ = beta function

$h(x, y)$ = deformed surface height above the rigid plane

$$\bar{h} = \text{average gap, } \frac{1}{\int \int dxdy} \int \int_{\Omega} h(x, y) dxdy$$

H = dimensionless average gap, \bar{h}/σ

$p(x, y)$ = contact pressure

\bar{p} = average contact pressure,

$$\frac{1}{\int \int dxdy} \int \int_{\Omega} p(x, y) dxdy$$

P = dimensionless average contact pressure, \bar{p}/E'

u = deformation of surface profile

δ = effective rigid body diaplacement

σ = root mean square roughness

γ = asperity ratio, $\gamma = \lambda_y/\lambda_x$

λ_y, λ_x = autocorrelation length along x- and y-directions

a = the length of sides of contact domain

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{a}$$

Ω = real contact region

Y = uniaxial yield strength

참고 문헌

1. Greenwood, J. A., and Williamson, J. B. P., 1966, "Contact of Nominally Flat Surface s," Proc. Roy. Soc., Vol. A295, pp.300-319.
2. Whitehouse, D. J., and Archard, J. F., 1970, "The Properties or Random Surfaces of Significance in Their Contact," Proc. Roy. Soc., Vol. A316, pp.97-121.
3. Onions, R. A., and Archard, J. F., 1973, "The Contact of Surfaces Having a Random Surface Structure," J. of Phys. D. Appl. Phys., Vol. 6, pp. 289-304.
4. Bush, A. W., Gibson, R. F., et al., 1975,

- "The Elastic Contact of a Rough Surface,"
Wear, Vol. 35, pp.87-111.
5. Bush, A. W., Gibson, R. D., et al., 1979, "Strongly Anisotropic Rough Surface," ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 101, pp.15-20.
 6. Nayak, P. R., 1971, "Random Pressure Model of Rough Surfaces," ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 93, pp.398-407.
 7. Lai, W. T. and Cheng, H. S., 1985 "Computer Simulation of Elastic Rough Contact," ASLE Trans., Vol. 28, No. 2, pp.172-180
 8. Lee, S. C., and Cheng, H. S., 1992, "On the Relation of Load to Average Gap in the Contact Between Surfaces with Longitudinal Roughness," STLE Tribology Transactions, Vol. 35, pp.523-529
 9. Ren, N., and Lee, S. C., 1993, "Contact Simulation of 3-Dimensional Rough Surfaces Using Moving Grid Method." ASME Journal of Tribology, Vol. 115, No.4, Oct., pp.597-601.
 10. Ren, N., and Lee, S. C., 1994, "The Effects of Surface Roughness and Topography on the Contact Behavior of Elastic Bodies." ASME Journal of Tribology, Vol. 116, No.4, Oct., pp.804-811.
 11. Hamrock, B. J. "Fundamentals of Fluid Film Lubrication," McGRAW-HILL, 1994.
 12. Patir, N., 1978, "A Numerical Procedure for Random Generation of Rough Surfaces," Wear, Vol. 47, pp.263-277.
 13. Love, A. E. H., 1929, "The Stress Produced in a Semi-Infinite Solid by Pressure on Part of the Boundary," Proc. Roy. Soc. London, Vol. A228, pp.377
 14. Archard, J. F., 1957, "Elastic deformation and the laws of friction," Proc. Roy. Soc. London, Vol. A243, pp.190