

트러스 모델을 이용한 순수비틀림을 받는 철근콘크리트 보의 비틀림 강도 예측

Prediction on the Torsional Strength of Reinforced Concrete Beams Subjected to Pure Torsion by Truss Model

박 지 선^{*} 김 상 우^{**} 이 정 윤^{***}
Park, Ji-Sun Kim, Sang-Woo Lee, Jung-Yoon

ABSTRACT

ACI 318-99 predicts the torsional moment of reinforced concrete members by assuming that the angle of diagonal compressive concrete is equal to 45 degree. However, this angle depends on the difference of longitudinal and transverse steel ratios.

This paper compares the torsional moments calculated by ACI 318-99 code and a truss model considering compatibility of strains. The comparison indicated that the torsion equation in ACI code underestimated the real torsional moment of reinforced concrete beam in which the ratio of longitudinal reinforcement was larger than that of transverse reinforcement.

1. 서론

1995년에 개정된 ACI 기준¹⁾의 비틀림 설계는 박판 튜브 이론(Thin Walled Theory)과 힘의 평형 조건만을 이용한 공간 트러스 이론(Space Truss Theory)을 기본으로 하고 있다. 기준에서는 축력이 존재하지 않는 철근콘크리트 부재의 비틀림 모멘트를 콘크리트에 의한 비틀림 저항 모멘트 T_c 를 배제하고 비틀림 균열각을 45도로 가정하여 식(1)과 같이 비교적 용이하게 구하고 있다.²⁾

$$T_n = \frac{2A_0A_wf_{yw}}{s} \cot \alpha \quad (1)$$

여기서 T_n 은 공칭 비틀림 모멘트 강도, A_0 는 전단흐름 경로로 둘러싸인 총 단면적, A_w 는 비틀림 보강철근 간격내의 비틀림에 저항하는 폐쇄 보강철근 한 가닥의 단면적, f_{yw} 는 y 방향 폐쇄 비틀림 보강철근의 설계기준 항복강도, α 는 비틀림에 대한 트러스 유사성에서 압축대의 각도, s 는 y 방향 비틀림 보강철근의 간격이다.

그러나 기준식은 힘의 평형 조건만을 고려한 트러스 모델을 사용하여 비틀림 강도에 도달하기까지의 변형 및 재료의 상태 변화를 예측할 수 없을 뿐만 아니라 실제의 비틀림 균열각이 x 축방향과 y 축방향 철근비에 의하여 45도 이하 또는 이상이 되기 때문에 철근콘크리트 부재의 비틀림 저항을 과대 또는 과소평가 할 우려가 있다.

* 정회원, 성균관대학교 건축공학과 석사과정

** 정회원, 성균관대학교 건축공학과 박사과정

*** 정회원, 성균관대학교 건축공학과 전임강사

본 연구에서는 식(1)의 비틀림 균열각 α 가 비틀림 모멘트 T 에 미치는 영향을 평가하고자 한다. 본문에서는 x 방향 철근비와 y 방향 철근비를 변수로 한 해석을 통하여 각도 α 의 변화에 따른 비틀림 모멘트 T 의 차이를 계산하였다. 또한 힘의 평형 조건과 변형률의 적합 조건을 이용한 트러스 모델에서 구해진 균열각도 α 를 식(1)에 대입하여, ACI 규준의 비틀림 모멘트와 순수비틀림을 받는 철근콘크리트 보의 비틀림 모멘트를 비교하였다.

2. 공간 트러스 이론

1995년의 ACI 규준에서는 식의 간략화를 위하여 축력이 낮은 철근콘크리트 부재에 대하여 경사콘크리트 압축대의 각도 α 를 45도로 가정하고 있다. 따라서 Fig. 1과 같은 트러스 모델의 힘의 평형 조건만을 이용하여 식(1)을 유도할 수 있다. 그러나 각도 α 는 재료의 구성(x 방향 철근, y 방향 철근, 콘크리트 강도)에 의하여 달라지므로 α 의 정확한 값은 힘의 평형 조건과 변형률의 적합 조건을 이용하여 구하지 않으면 안된다.

변형률의 적합 조건을 이용한 대표적인 트러스 이론은 Collins 등의 수정 압축장 이론(Modified Compression Field Theory)³⁾과 Hsu 등의 회전각 연화 트러스 이론(Rotation Angle Softened Truss Model 이하, RA-STM)⁴⁾⁵⁾이 있다.

본 논문에서는 각도 α 가 비틀림 모멘트 T 에 미치는 영향을 평가하고자 RA-STM을 이용하여 구해진 비틀림 모멘트-비틀림 각의 관계와 ACI 규준의 비틀림 강도를 비교, 검토하였다. 따라서 Hsu 등이 이용한 공간 트러스 모델과 RA-STM을 간략히 소개하고자 한다.

Fig. 1은 박판 튜브의 힘의 상태를 나타낸다. 그림에서 q 는 튜브의 전단흐름을 나타내며, σ_2 및 σ_1 은 콘크리트의 주압축 및 주인장 응력을 나타낸다. 이 때 철근콘크리트 요소에 발생하는 균열은 2축을 따라 발생하며 x 축과 콘크리트 주압축 응력 방향(2축)사이의 각도는 α 이다.

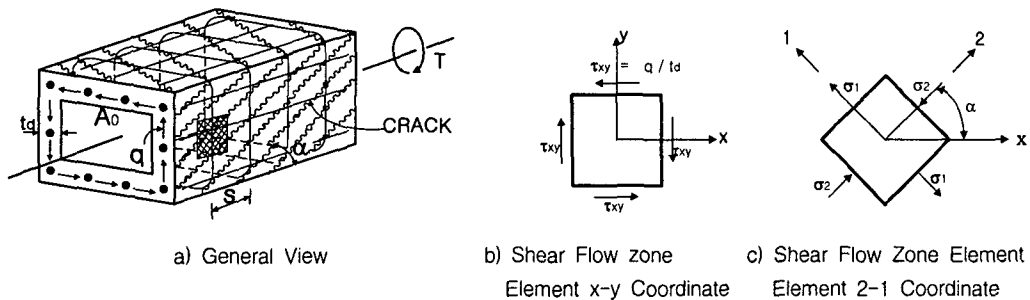


Fig. 1 Reinforced Concrete member subjected to torsion

Fig. 1의 힘의 평형 조건은 다음과 같다.

$$\sigma_x = \sigma_2 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha + \rho_x f_x \quad (2)$$

$$\sigma_y = \sigma_2 \sin^2 \alpha + \sigma_1 \cos^2 \alpha + \rho_y f_y \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = (-\sigma_2 + \sigma_1) \sin \alpha \cos \alpha \quad (4)$$

$$T = \tau_{xy} (2A_0 t_d) \quad (5)$$

여기서 σ_x , σ_y 는 각각 x 방향과 y 방향의 직응력, τ_{xy} 는 $x-y$ 좌표에서의 전단 응력, ρ_x , ρ_y 는 각각 x 방향과 y 방향으로의 철근비, σ_2 , σ_1 은 각각 2와 1방향에서의 콘크리트 주압축 및 주인장 응력, f_x , f_y 는 각각 x 방향과 y 방향으로의 철근 응력, T 는 비틀림 모멘트, A_0 는 전단흐름 경로로 둘러싸인 총 단면적, t_d 는 전단흐름의 두께이다.

변형률의 적합 방정식은 평균 변형률의 개념을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\epsilon_x = \epsilon_2 \cos^2 \alpha + \epsilon_1 \sin^2 \alpha \quad (6)$$

$$\epsilon_y = \epsilon_2 \sin^2 \alpha + \epsilon_1 \cos^2 \alpha \quad (7)$$

$$\gamma_{xy} = 2(-\epsilon_2 + \epsilon_1) \sin \alpha \cos \alpha \quad (8)$$

여기서 ϵ_x , ϵ_y 는 각각 x 방향과 y 방향의 평균 변형률, ϵ_2 , ϵ_1 는 2와 1방향으로의 각각의 평균 주변형률, γ_{xy} 는 $x-y$ 좌표에서의 평균 전단 변형이다.

Bredt의 박판 튜브 이론에 의한 비틀림각과 전단변형률과의 관계로부터 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\theta = \frac{P_0}{2A_0} \gamma_{xy} \quad (9)$$

$$\psi = \theta \sin 2\alpha \quad (10)$$

$$t_d = \frac{\epsilon_{ds}}{\psi} \quad (11)$$

$$\epsilon_d = \frac{\epsilon_{ds}}{2} \quad (12)$$

여기서 θ 는 단위 길이당 비틀림 각, ψ 는 콘크리트 압축대의 곡률, ϵ_{ds} 는 콘크리트 압축대의 표면 압축 변형률을 나타낸다.

RA-STM에서는 위의 11개의 평형 방정식과 적합 방정식에서 각도 α 및 비틀림 모멘트 T 를 구하기 위하여 4개의 콘크리트와 철근의 구성 법칙을 이용하였다. 콘크리트의 구성 법칙에서는 균열과 직각되는 방향의 변형률이 증가함에 따라 콘크리트의 압축강도가 감소하는 연화 효과를 고려하였다. 구성 법칙에 대한 자세한 내용은 참고문헌 4)를 참고하기 바란다. 해석에서는 먼저 콘크리트의 주압축 변형률 ϵ_d 를 대입한 후, ϵ_d 에 상응하는 비틀림 모멘트 T 와 비틀림 각도 θ 를 구하고 있다.

3. ACI 표준과 해석결과의 비교 및 고찰

식(6)과 (7)에서 균열각도 α 는 x 방향과 y 방향의 변형률 및 콘크리트 주압축 변형률 관계에 의하여 식(13)의 관계가 있음을 알 수 있다.

$$\tan^2 \alpha = \frac{\epsilon_x - \epsilon_2}{\epsilon_y - \epsilon_2} \quad (13)$$

즉, 각도 α 는 x 방향과 y 방향의 철근량에 영향을 받는다. 따라서 본 논문에서는 순수비틀림을 받는 철근콘크리트 보에 대한 예제로서 Table 1과 같이 x 축방향과 y 축방향의 철근비를 변수로 하는 B4⁷⁾와 PT6⁹⁾를 선정하였다. B4는 x 방향과 y 방향의 철근비가 각각 1.6%와 1.61%로 거의 동일하지만, PT6의 x 방향과 y 방향의 철근비는 각각 1.36%와 0.82%(1:0.6)로 상이하다. B5와 PT6의 콘크리트 압축강도 f_{ck} 는 각각 280과 330kgf/cm²이며, 시험체의 상세는 Table 1과 같다.

Table 1 Specification of specimens

Beams	Concrete	Section size			x-Direction bar		y-Direction bar		
	$f_{ck}(kg/cm^2)$	$x_1(cm)$	$y_1(cm)$	$t(cm)$	$f_y(kg/cm^2)$	$\rho_x(\%)$	$f_y(kg/cm^2)$	$\rho_y(\%)$	$s(cm)$
B4	280	21.6	34.3	-	3500	1.60	3500	1.61	9.1
PT6	330	39.4	39.4	8.9	3800	1.36	3300	0.82	10.2

Fig. 2에서는 B4의 비틀림 강도에 대하여 ACI 규준과 RA-STM을 이용하여 구한 해석 결과를 비교하였다. 그림에서 ACI 규준과 RA-STM은 실제의 비틀림 강도를 다소 과대평가하고 있음을 알 수 있다.

해석에서는 비틀림 균열각 α 의 영향을 평가하기 위하여, 전체 철근비는 같게 하고 ρ_y 의 값을 0.15%씩 감소시켰을 때 ACI 규준과 RA-STM에 의한 비틀림 모멘트의 변화를 비교하였다. 즉, Table 2와 같이 B4를 y 축 방향의 철근비에 의하여 B4-1, B4-2, B4-3, B4-4의 4종류로 구분하였다. B4-1의 경우, x 방향과 y 방향의 철근비의 합은 B4와 동일하게 3.21%이지만 y 방향의 철근비는 B4에 대하여 0.15%감소하여 1.46%이다. 해석결과, 각도 α 는 Table 2에 보여지는 것과 같이 ACI 규준에 대하여 45도로 일정하지만 RA-STM에서는 대해서는 ρ_y 의 값이 감소함에 따라 45도에서 38도 까지 감소하였다.

구해진 비틀림 모멘트와 각도의 관계에 대한 비교는 Fig. 3(a)~(d)와 같다. 그림에서 보는 바와 같이 ρ_y 값이 줄어들며 따라 RA-STM의 해석결과는 비틀림 모멘트 T 에 대하여 단계별로 약 2~5%가 변한 것에 비하여 ACI 규준은 약 12%의 변화를 나타내었다. 이는 식(13)에서 보여지는 것과 같이 RA-STM에서는 x 방향과 y 방향의 철근비의 변화에 의하여 각도 α 가 변화하여, y 방향의 철근비의 감소에 의한 비틀림 강도의 감소가 균열각도에 의하여 상쇄된다. 그러나, ACI 규준에서는 각도 α 를 45도로 고정하여 y 방향 철근비의 감소의 영향이 직접 비틀림 강도에 작용하기 때문에 강도 저감률이 RA-STM보다 훨씬 크다. 만일 y 방향의 철근비가 x 방향의 철근비보다 클 경우 각도 α 는 45도보다 커지게 되며 ACI 규준은 실제 비틀림 강도를 과대평가할 위험이 있다.

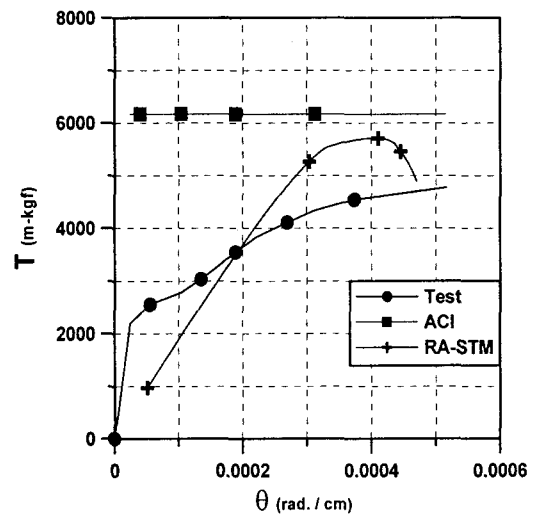


Fig. 2 B4 (Hsu)

Fig. 4(a)는 PT6의 철근비가 다른 실험체의 실험결과를 ACI 규준과 RA-STM을 이용한 해석결과와 비교한 것이다. B4에 대한 해석결과와 같이 x 방향과 y 방향의 철근비가 같을 때는 ACI 규준과 RA-STM에 의한 비틀림 강도에 대한 차이는 적다. 그러나 PT6과 같이 x 방향과 y 방향의 철근비가 다를 경우에는 Fig. 4(a) 및 Table 3에서 보여지는 것과 같이, 실험 결과에 대하여 RA-STM에 의한 비틀림 강도가 약 14%의 오차를 나타낸 것과 대조적으로 ACI 규준은 약 27%가량을 부재에 대하여 과소 평가하게 된다. Fig. 4(b)는 RA-STM에서 얻은 각도 α 를 식(1)의 ACI 규준에 직접 대입하여 얻은 비틀림 강도와 비교한 것이다. 이 그림에서 Modified ACI는 RA-STM을 이용하여 얻은 최대 균열각도 $\alpha = 35.4^\circ$ 를 대입하여 얻은 비틀림 강도로, 각도 $\alpha = 35.4^\circ$ 를 대입함으로써 ACI 규준의 비틀림 강도는 실제의 비틀림 강도를 매우 정확히 평가하고 있음을 알 수 있다.

Table 2 Summary of the analysis results for B4 series

Beam	ρ_x (%)	ρ_y (%)	α_{ACI} (deg.)	α_{RA-STM} (deg.)	T_{test} (m-kgf)	T_{ACI} (m-kgf)	T_{RA-STM} (m-kgf)	$\frac{T_{ACI}}{T_{test}}$	$\frac{T_{RA-STM}}{T_{test}}$
B4	1.60	1.61	45	45	4772	6168	5679	1.29	1.19
B4-1	1.75	1.46	45	44	4772	5579	5579	1.17	1.17
B4-2	1.90	1.31	45	43	4772	5021	5392	1.06	1.13
B4-3	2.05	1.16	45	41	4772	4433	5154	0.93	1.08
B4-4	2.20	1.01	45	38	4772	3844	4915	0.81	1.03

Table 3 Summary of the analysis results for PT6 series

Beam	α_{ACI} (deg.)	α_{RA-STM} (deg.)	$\alpha_{Mod.}$ (deg.)	T_{test} (m-kgf)	T_{ACI} (m-kgf)	T_{RA-STM} (m-kgf)	$T_{Mod.-ACI}$ (m-kgf)	$\frac{T_{ACI}}{T_{test}}$	$\frac{T_{RA-STM}}{T_{test}}$	$\frac{T_{Mod.-ACI}}{T_{test}}$
PT6	45	35.4	-	6364	4643	7225	-	0.73	1.14	-
PT6-1	45	35.4	35.4	6364	4643	7225	6543	0.73	1.14	1.03

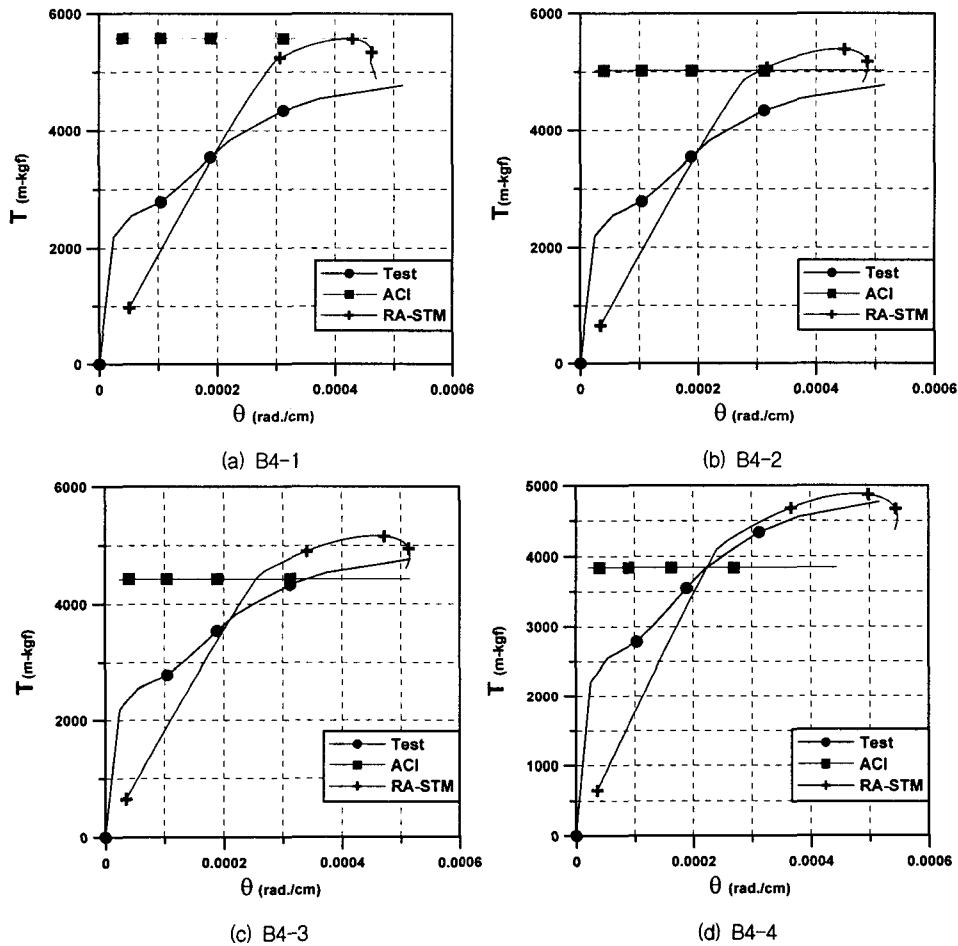


Fig. 3 Torsional moment vs. torsional angle changed by the steel ratios

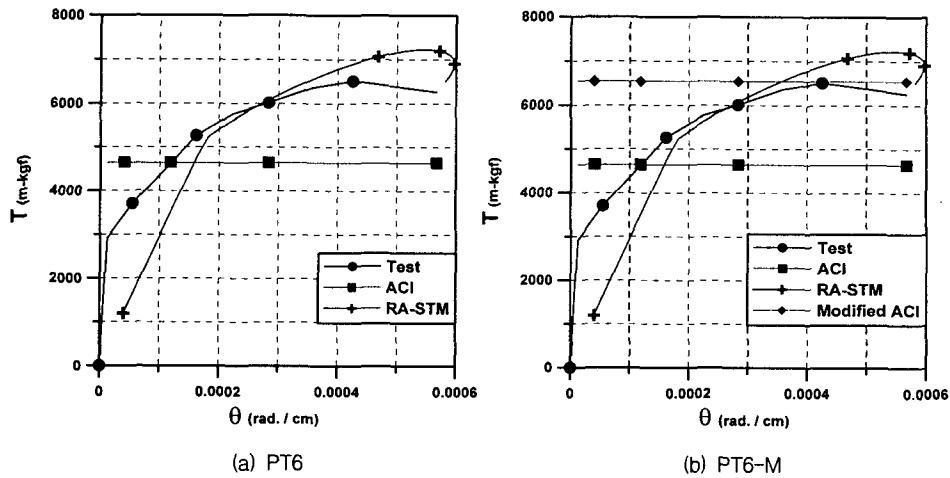


Fig. 4 Comparison of torsional moment vs. torsional angle of PT6 (ACI code, RA-STM)

4. 결론

순수 비틀림 상태에서의 비틀림 강도에 대하여 ACI 규준과 RA-STM을 이용한 해석결과를 비교하여 얻은 결론은 다음과 같다.

- 1) x 축과 y 축의 철근비가 같을 경우, 비틀림 강도에 대하여 ACI 규준과 RA-STM의 해석결과는 유사하였지만 x 축과 y 축의 철근비가 다를 경우, ACI 규준은 RA-STM에 비하여 부재의 성능을 과소평가하였다.
- 2) RA-STM을 이용하여 구한 균열각을 ACI 규준에 적용시키면 실험결과와 아주 가까운 비틀림 강도를 얻을 수 있었다. 따라서 보다 정확한 비틀림 모멘트를 구하기 위해서는 부재의 재료조건을 고려한 비틀림 균열각 α 의 사용이 필요하다.

참고문헌

1. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Structural Concrete(318-99) and Commentary(318R-99)," American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich., 1999, pp.149-155.
2. J. G. MacGregor and M. G. Ghoneim, "Design for Torsion," *ACI Structural Journal*, Vol. 92, No. 2, Mar.-Apr. 1995, pp.211-218.
3. Frank J. Vecchio and Michael P. Collins, "The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear," *ACI Journal*, Vol. 83, No. 2, Mar.-Apr. 1986, pp.219-231.
4. Thomas T. C. Hsu, "Softened Truss Model Theory for Shear and Torsion," *ACI Structural Journal*, Vol. 85, No. 6, Nov.-Dec. 1988, pp.624-635.
5. Thomas T. C. Hsu, "Nonlinear Analysis of Concrete Membrane Elements," *ACI Structural Journal*, Vol. 88, No. 5, Sep.-Oct. 1991, pp.552-561.
6. Thomas T. C. Hsu and Y. L. Mo, "Softening of Concrete in Torsional Members-Prestressed Concrete," *ACI Structural Journal*, Vol. 82, No. 5, Sep.-Oct. 1985, pp.603-615.
7. Thomas T. C. Hsu and Y. L. Mo, "Post-Cracking Torsional Rigidity of Reinforced Concrete Sections," *ACI Journal*, Vol. 70, No. 5, May 1973, pp.352-360.
8. Thomas T. C. Hsu, *Unified Theory of Reinforced Concrete*, CRC Press, Inc., 1993, pp.257-285
9. Denis Mitchell and Michael P. Collins, "Diagonal Compression Field Theory-A Rational Model for Structural Concrete in Pure Torsion," *ACI Journal*, Vol. 71, No. 8, Aug. 1974, pp.396-408