볼의 기하학적 불완전성을 갖는 볼베어링의 진동해석

김 영 철*, 최 상 규*, 윤 기 찬**

* 한국기계연구원 회전체연구그룹
** FAG한화베어링(주) 연구소

Vibration Analysis of Ball Bearings with Ball Geometric Imperfections

Young-Cheol Kim*, Sang-Kyu Choi*, Ki-Chan Yoon**

* KIMM(Korea Institute of Machinery and Materials)
** FAG Hanwha Bearings Corp.

ABSTRACT In this paper, we theoretically analyzed the NRRO(the non-repeatable run-out) of a ball bearing with ball geometric imperfection. The quasi-static and dynamic analysis of a ball bearing was performed to calculate the displacement of shaft center caused by the ball form errors while the shaft is rotating. From consideration of the generating mechanism of NRRO, it is found that the size and form errors of ball generate vibrations with f_c and $nf_b \pm f_c$(where n is even) components, respectively. The ball form errors of a ball bearing were precisely measured and NRRO of a ball bearing was calculated using the measured data. A statistical approach was performed to analyze NRRO of ball bearings with radial errors.

Key Words Ball Bearing, NRRO(non-repeatable run-out), Imperfection, Cage Frequency

1. 서 론

최근 HDD와 같은 정보저장기기의 자기기록밀도(magnetic track density)는 급속히 증가하고 있으며, 이를 위해서 HDD 스핀들용 볼베어링에서 발생하는 비반복적인 진동성분(이하 NRRO, non-repeatable run-out)을 줄이고자 하는 연구가 활발히 진행되고 있다. NRRO를 저감시키기 위해서는 내륜, 외륜 및 볼에 포함되는 형상과 치수 오차를 작게 하는 것이 중요하지만, 가공정밀도의 향상에는 가공비용을 비롯한 여러 가지 제약조건이 따르므로 NRRO의 연구를 위해서 보다 설계적인 관점에서 연구할 필요성이 있다.

볼베어링의 형상오차와 발생주파수 사이의 관계는 이미 많은 선행연구가 있다. 일반적으로 볼의 치수오차는 f_c(cage 각속도)를 유발하고, 볼의 형상오차의 짝수성분(n)은 $nf_b \pm f_c$(이때 f_b는 ball 각속도)를 유발하는 것으로 알려져 있다. 본 연구에서는 Hertzian 접촉의 비선형 효과를 포함한 준정적(quasi-static)해석 및 동적 해석을 수행하여, 볼의 크기 및 형상오차에 기인한 NRRO를 해석하였다. 볼의 형상오차를 실측하여 적용하였으며, 볼의 치수오차는 통계적 처리에 의하여 NRRO 해석을 수행하였다. 본 연구의 해석 결과를 이용하여 볼베어링의 설계관점에서 NRRO 저감 방안을 제시하고자 한다.

2. 볼베어링의 준정적 해석

2.1 준정적 해석 이론

베어링에 가해지는 외력에 대한 시스템의 힘-평형방정식은 다음 식(1)~(2)와 같으며, 외력(F_x, F_y, F_z, M_y, M_z) 방향으로 모두 5개의 연립방정식이 요구된다.

$$f(\delta) = \sum F = 0 \tag{1}$$

$$f(\delta) = \sum M = 0 \tag{2}$$

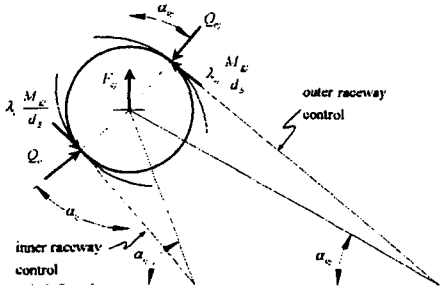

Fig. 1 Ball loading at angular location j

Fig. 1과 같이, 전동체 위치에서 볼-외륜궤도 하중(Q_{oj}), 볼-내륜궤도 하중(Q_{ij}), 원심력(F_{cj}) 및 자이로스코픽 모멘트 (M_{gj})가 평형을 이루고 있을 때, 힘 평형방정식은 식(3)~(4)와 같다.

$$Q_{ij}\sin\alpha_{ij} - Q_{oj}\sin\alpha_{oj} - \frac{M_{gj}}{d}(\lambda_{ij}\cos\alpha_{ij} - \lambda_{oj}\cos\alpha_{oj}) = 0 \tag{3}$$

$$Q_{ij}\cos\alpha_{ij} - Q_{oj}\cos\alpha_{oj} - \frac{M_{gj}}{d}(\lambda_{ij}\sin\alpha_{ij} - \lambda_{oj}\sin\alpha_{oj}) + F_{cj} = 0 \tag{4}$$

이때, 외륜 제어인 경우 $\lambda_{ij}=0, \lambda_{ij}=2$이고, 내륜 제어인 경우에는 $\lambda_{ij}=\lambda_{oj}=0$로 한다.

그리고, 하중을 받기 전후의 볼 중심과 내외륜 궤도 중심의 변화로부터 기하학적 적합 조건식인 식(5) 및 식(6)을 유도할 수 있다.

$$(A_{ij}-X_{1j})^2 + (A_{2j}-X_{2j})^2 - [(f_i-0.5)+d+\delta_{ij}]^2 = 0 \tag{5}$$

$$X_{1j}^2 + X_{2j}^2 - [(f_o-0.5)+d+\delta_{oj}]^2 = 0 \tag{6}$$

이상과 같이 볼 베어링의 준정적 해석을 위해서 각 전동체에 대해 4개씩, 시스템에 대해 5개의 연립방정식이 유도된다. 시스템에 대한 5개의 비선형 연립 방정식으로부터 베어링 내륜 중심의 5 자유도 변형을 Newton-Raphson법으로 구하고, 이 결과를 이용하여 다시 4개의 전동체 연립방정식을 Newton-Raphson법에 의해 각 전동체에 대한 하중, 접촉각, 전동체의 자전 및 공전 속도 등을 구하게 된다. 이러한 과정을 되풀이하여 수렴조건을 만족할 때까지 계산하여 준정적해석을 수행한다. Fig. 2는 볼 베어링의 준정적 해석의 강건성을 향상시키기 위한 전반적인 흐름도이다.

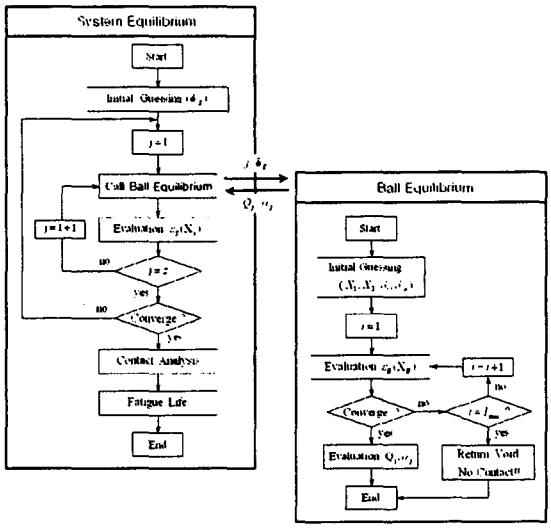

Fig. 2 General flow of quasi-static analysis for ball bearings

Table 1. Specifications of ball bearings

Ball Diameter	d (mm)	1.5875
No. of Balls	Z (ea)	10
Pitch Diameter	D (mm)	9.1
Curvature Ratio of IRW	f_i	0.529
Curvature Ratio of ORW	f_o	0.535
Residual Radial Clearance	P_d (μm)	5
Rotating Speed	f_r (Hz)	120

Table 2 Quasi-static analysis result

Z	7	8	9	10	11	12
α	19.80	19.38	19.03	18.73	18.47	18.24
δ_i	2.116	1.977	1.863	1.766	1.683	1.610
δ_o	2.113	1.974	1.860	1.763	1.680	1.607

2.2 준정적 해석 결과

본 연구에서 적용한 스핀들 모터용 볼베어링의 설계 제원은 Table 1에 과 같다. Table 2는 볼베어링의 P_d (Residual Radial Clearance)가 5 μm이고 7200rpm으로 운전될 때, 볼 개수를 7~12개로 변화시키면서 볼베어링의 준정적해석을 수행하여 얻은 접촉각 및 변형량이다. 이때 α는 접촉각, δ_i는 볼과 내륜 사이의 변형량, δ_o는 볼과 외륜 사이의 변형량을 나타낸다.

3. NRRO 해석 이론

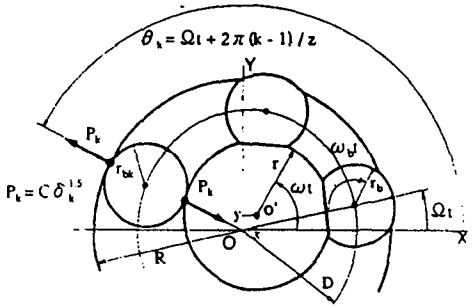

Fig. 3 NRRO Model of ball bearing

Fig. 3는 베어링 설계 파라미터와 좌표계 정의를 포함하는 볼베어링 NRRO 해석 모델이다. 해석하고자 하는 문제는 축이 각속도 ω로 회전하고 있을 때 베어링 요소의 형상오차(form error)에 기인한 축 중심의 변위 x 및 y를 계산하는 것이다. 그림에서 외륜궤도(outer raceway)의 중심 o는 원점에 있고, 내륜궤도(inner raceway)의 중심 o'는 좌표 (x, y)에 위치한다. 궤도면 및 볼의 형상오차는 아주 작으므로, 모든 볼이 내륜 및 외륜과 탄성접촉하고 미끄러지지 않고 순수하게 구른다고 가정한다.

d를 볼의 직경, D를 피치원 직경, 내륜 회전각을 ωt라 할 때, 첫 번째 볼의 위치각과 k번째 볼의 위치각은 식 (7) 및 식 (8)과 같다.

$$\Omega t = \frac{\omega t}{2}\left(1 - \frac{d}{D}\cos\alpha\right) \tag{7}$$

$$\theta_k = \Omega t + 2\pi\frac{(k-1)}{Z} \tag{8}$$

그리고 이때 볼의 자전각은 식 (9)와 같다.

$$\omega_b t = \frac{\omega t D}{2d}\left(1 - \frac{d^2}{D^2}\cos^2\alpha\right) \tag{9}$$

k번째 볼의 접촉점에서의 볼의 직경을 $d_k(w_b t)$, 내외륜의 반경을 각각 $r(\theta_k)$, $R(\theta_k)$라 하면, 축 중심이 x, y로 편심한 때의 볼의 탄성 변형량이 내외륜의 변형량과 같다고 가정하면, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\delta_k = \frac{1}{2}\{r(\theta_k) + d_k(\omega_b t) - R(\theta_k) + x\cos\theta_k + y\sin\theta_k\} \tag{10}$$

이 때 $r(\theta_k)$, $R(\theta_k)$ 및 $d_k(w_b t)$는 기준반경과 형상오차를 더해서 다음과 같이 Fourier 급수로 나타낼 수 있다.

$$r(\theta_k) = r_0 + \sum_{n=1}^{N} a_m \cos(n\theta_k + \phi_m) \tag{11}$$

$$R(\theta_k) = R_0 + \sum_{n=1}^{N} a_{Rn}\cos(n\theta_k + \phi_{Rn}) \tag{12}$$

$$d_k(\omega_b t) = d_{k0} + \sum_{n=1}^{N} a_{bkn}\cos(n\omega_b t + \phi_{bkn}) + \sum_{n=1}^{N} a_{bkn}\cos(n\omega_b t + n\pi + \phi_{bkn}) \tag{13}$$

Hertzian 접촉이론에 의하면, k번째 볼과 내외륜에 작용하는 힘 P_k과 변형량 δ_k은 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$P_k = C_k\delta_k^{3/2} \tag{14}$$

이 때 C_k는 강성계수로서, 볼과 내륜 및 외륜과의 접촉 강성 K_i 및 K_o에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$C_k = \left[\frac{1}{(\frac{1}{K_i})^{2/3} + (\frac{1}{K_o})^{2/3}}\right]^{3/2} \tag{15}$$

볼과 내외륜에 작용하는 힘은 각 볼의 위치마다 다르기 때문에 축의 중심은 그것들의 합력이 0이 되는 위치로 이동할 것이다. 만약 스핀들의 관성력을 무시하면, x, y 방향의 접촉력 평형방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$f_x = \sum_{k=1}^{Z} C_k\delta_k^{3/2}\cos\theta_k = 0 \tag{16}$$

$$f_y = \sum_{k=1}^{Z} C_k\delta_k^{3/2}\sin\theta_k = 0 \tag{17}$$

식 (16) 및 (17)은 x, y에 관한 비선형 방정식이므로, 다음과 같이 Newton-Raphson법에 의해 구한다.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_i - \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}_i \quad (18)$$

이때, 변형량 δ_k의 초기치는 준정적 해석으로부터 계산된 $(\delta_i+\delta_o)/2$로 가정하였다. 내륜의 회전각을 변화시키면서 계산을 반복하면 회전각에 대응한 축의 거동이 계산된다.

4. 볼의 기하학적 불완전성

4.1 볼의 형상오차

실제 볼의 경우에는 고차 성분까지 포함하는 여러 형상오차성분이 존재하다. 따라서 본 연구에서는 볼 베어링 샘플을 한 개 추출하여 실제 볼의 형상오차를 측정하였는데, Fig. 4는 이때 한 개의 볼로부터 얻은 형상오차를 나타낸 것이다.

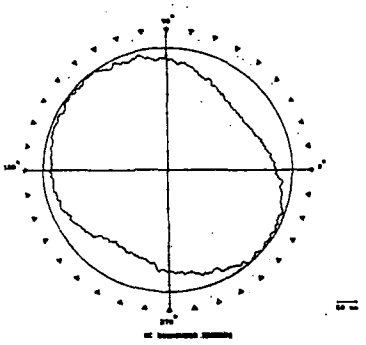

Fig. 4 waviness form on a ball

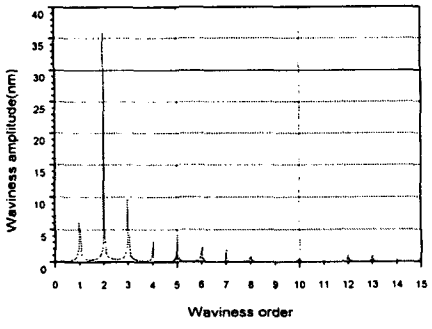

Fig. 5 ball waviness components obtained by FFT

Fourier 급수전개를 이용하여 각 주기성분을 추출하였는데, Fig. 5는 FFT 알고리즘을 이용하여 볼의 1~10차까지의 오차성분을 계산한 것이다. Fig. 5로부터 측정된 오차성분은 2차 성분이 지배적으로 크고, 고차로 갈수록 각 성분들이 줄어들고 있음을 알 수 있다. 10차 이상의 오차성분은 센서 측정범위를 벗어나는 1 nm이하로서 NRRO에 거의 영향을 미치지 못할 것으로 판단된다.

4.2 볼의 치수오차

일반적으로 스핀들 모터용 볼베어링의 치수는 Grade5 정도로 관리되며, 그 치수오차가 $\pm 0.1\ \mu m$ 이내가 되도록 한다. 따라서 본 연구에서 NRRO에 대하여 치수오차를 가진 볼 배열의 영향을 고찰하기 위해서, 볼 치수오차가 0.1 μm이라고 가정하였다.

그런데 실제로 실제 가공된 볼은 설계치수를 평균으로 하는 정규분포를 가질 것으로 예측이 된다.

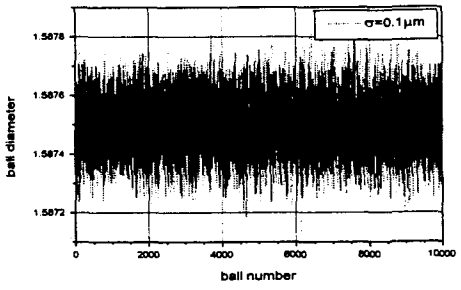

Fig. 6 random ball diameters($\sigma = 0.1\mu m$)

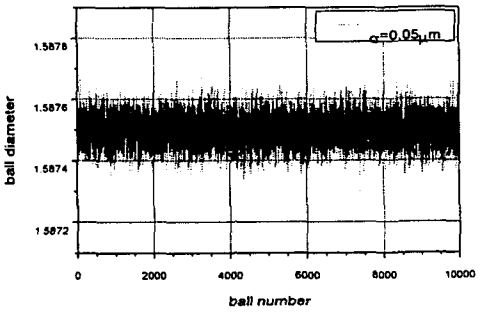

Fig. 7 random ball diameters($\sigma = 0.05\mu m$)

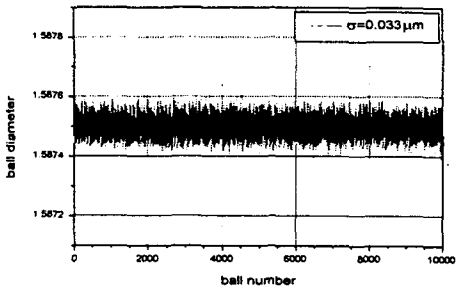

Fig. 8 random ball diameters($\sigma = 0.033\mu m$)

Table 3 statistical distribution of 10000 balls generated randomly

평균직경(mm)		표준편차(μm)	
이론치	발생치	이론치	발생치
1.5875	1.587500361	0.1000	0.099870
1.5875	1.587499362	0.0500	0.050174
1.5875	1.587500169	0.0333	0.033364

따라서 본 연구에서는 볼이 표준편차(standard deviation)가 각각 0.1, 0.05, 0.033 μm일 때 정규분포를 따른다고 가정하여 볼의 직경을 random 발생시켰다. Fig. 6~8은 발생되어진 각각의 볼 직경을 발생순서에 따라 그린 그림이다. Table 3은 10000개의 발생된 볼에 대해, 그 직경의 평균치와 표준편차를 다시 계산하여 이론치와 비교한 것이다. 본 연구는 이러한 확률분포를 따르는 1000개의 베어링에 대해 NRRO의 확률분포를 계산하였다.

5. 볼베어링의 NRRO 해석

5.1 1개의 볼에 형상 및 치수오차를 가진 경우

Table 1의 볼베어링에 대한 cage 각속도는 식 (7)에 의해 $f_c = 50Hz$이고 볼의 spin 각속도는 식 (9)에 의해 $f_b = 335Hz$이다.

볼 1개에 Fig. 10과 같은 형상오차 및 0.1 μm의 치수오차가 존재한다고 가정하고 나머지 볼과 내외륜 궤도는 오차없이 진원이라고 하였을 때, 볼의 개수를 변화시키면서 NRRO 해석을 수행하였다. Fig. 9는 $Z = 10$인 경우에 시간신호 응답이고, Fig. 11은 이때의 Spectrum이다. ball의 형상오차에 의한 NRRO는 짝수 성분에 의해 주로 발생하는데, Table 4에서 보듯이 실제 볼이 2차의 오차성분이 지배적으로 크므로 $2f_b \pm f_c$성분의 NRRO가 크게 나타남을 볼 수 있다. Table 4는 볼의 개수에 따른 발생 주파수 성분별 진폭크기를 정리한 것인데, 볼의 개수가 증가할수록 NRRO가 줄어들고 있음을 확인할 수 있다.

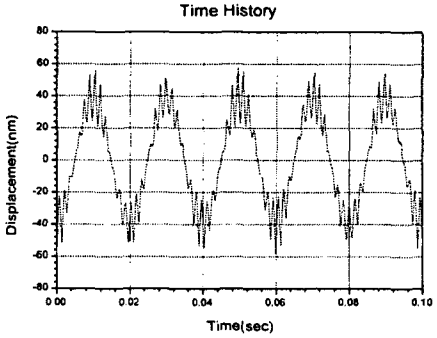

Fig. 9 Time history of NRRO caused by real waviness of one ball

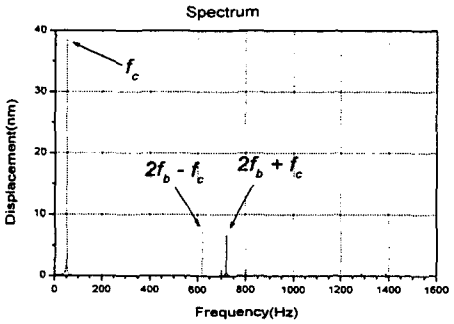

Fig. 10 Spectrum of NRRO caused by real waviness of one ball

Table 4 NRRO components caused by real waviness of one ball (nm)

Z	f_c	$2f_b - f_c$	$2f_b + f_c$	Σ
7	54.02	9.69	6.61	70.32
8	47.75	8.80	7.06	63.61
9	42.72	7.96	7.06	57.74
10	38.60	7.20	6.77	52.57
11	35.18	6.52	6.40	48.10
12	32.30	5.95	5.97	44.22

5.2 2개이상의 볼에 형상 및 치수오차를 가진 경우

2개 이상의 볼에 Fig. 10과 같은 형상오차 및 0.1 μm의 치수오차가 동일하게 존재한다고 가정하고, 나머지 볼과 내외륜 궤도는 오차없이 진원이라고 하였을 때, Z=10인 베어링에 대해 NRRO 해석을 수행하였다. Table 5~8은 상기의 오차가 2~5개의 볼에 존재한다고 가정하였을 때, 볼의 배열을 변화시키면서 NRRO를 계산한 것이다. 계산 결과, 오차를 가진 볼이 서로 인접해 있으면 NRRO는 커지고, 멀리 떨어질수록(대칭구조이면 가장 좋음) NRRO가 작아지며, 또한 오차를 가진 볼의 개수가 많아질수록 NRRO가 커짐을 볼 수 있다.

Table 5 NRRO components caused by real waviness of two ball (nm)

ball #	f_c	$2f_b-f_c$	$2f_b+f_c$	Σ
1,2	74.38	13.68	12.86	100.92
1,3	63.34	11.63	10.94	85.91
1,4	46.12	8.45	7.96	62.53
1,5	24.41	4.44	4.19	33.04
1,6	0.99	0.0	0.0	0.99

Table 6 NRRO components caused by real waviness of three ball (nm)

ball #	f_c	$2f_b-f_c$	$2f_b+f_c$	Σ
1,2,3	102.84	18.82	17.70	139.36
1,3,5	63.87	11.62	10.96	86.45
1,4,7	15.69	2.59	2.59	20.87
1,5,9	23.50	4.45	4.19	32.14

Table 7 NRRO components caused by real waviness of four ball (nm)

ball #	f_c	$2f_b-f_c$	$2f_b+f_c$	Σ
1,2,3,4	121.20	22.11	20.85	164.16
1,3,5,7	40.08	7.19	6.78	54.05
1,4,6,9	0.99	0.00	0.00	0.99
1,2,6,7	0.99	0.00	0.00	0.99

Table 8 NRRO components caused by real waviness of five ball (nm)

ball #	f_c	$2f_b-f_c$	$2f_b+f_c$	Σ
1,2,3,4,5	127.72	23.24	20.85	171.81
1,3,5,7,9	0.99	0.00	0.00	0.99
1,2,4,5,8	48.80	8.88	8.37	66.05

5.3 random한 볼 치수오차를 가진 경우

10개의 볼의 직경 치수가 Table 3에서 정의한 확률분포를 가진다고 가정하였을 때, 총 1000개의 볼베어링에 대하여 NRRO 해석을 수행하였다. Table 9는 이 때 계산된 NRRO의 확률분포를 나타내고 있는데, NRRO의 평균치와 2σ가 볼직경의 표준편차보다 비슷한 수준임을 관찰할 수 있다.

Table 9 statistical distribution of NRRO (nm)

직경	NRRO f_c		
표준편차	평균	표준편차 σ	2 σ
100.0	109.95	57.94	115.88
50.0	54.17	29.55	59.10
33.3	36.69	19.18	38.36

6. 결 론

본 연구에서는 준정적 해석 및 동적 해석을 통하여, 볼베어링의 기하학적 형상오차에 기인한 NRRO를 계산하였다. 볼의 치수오차는 f_c를, 볼의 형상오차의 짝수성분은 $nf_b \pm f_c$를 유발한다. 볼의 직경을 줄이고 볼의 개수를 늘리면 NRRO의 저감에 효과적이며, 오차를 가진 볼이 멀리 떨어지거나 대칭적으로 배열될수록 NRRO는 줄어든다. 통계적으로 볼직경의 표준편차는 NRRO의 평균치 및 2σ와 비슷한 수준임을 확인하였으며, 이 결과는 초정밀 베어링의 설계뿐만 아니라 회전 정밀도를 증가시키기 위한 가공 조건 선정 기준을 제공할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] K. Ono and K. Takahasi, *'Theoretical Analysis of Shaft Vibration Supported by a Ball Bearing with Small Sinusoidal Waviness'*, IEEE Trans. of Magnetics, Vol. 32, No. 3, May 1996.

[2] Harris, T. A., 1991, *'Rolling Bearing Analysis : 3rd ed.,'* John Wiley and Sons, Inc.

[3] Yhland,E., 1992, *'A Linear Theory of Vibrations Caused by Ball Bearings with Form Errors Operating at Moderate Speed,'* ASME, J. of Tribology, Apr, Vol.114, pp.348-359.