

FMM을 이용한 2차원 비대칭 도체산란연구

°김영주, *조영기

°국방과학연구소, 경북대학교 전자전기공학부

A Study of 2 Nonsymmetrical Dimension Conducting Body Scattering using FMM

Y.J. Kim, Y. K. Cho

Agency for Defence Development

School of Electronics Eng. Kyungpook Nar'l Univ

ABSTRACT

FMM(Fast Multipole Method)은 계산시간이나 메모리 측면에서 장점으로 인해, 수치해석기법으로써는 비교적 대형 구조물의 RCS 계산도 가능하며, 현재 연구가 활발히 진행되고 있는 기법중의 하나이다. 하지만, 폭이 좁은 타원형 형태의 산란체에 대한 해석에서 절점들을 그룹화하는 과정에서 정확도가 문제되었다. 따라서, 본 논문에서는 언급한 구조에 대한 RCS를 계산할 때 발생하는 문제점과 이를 해결하기 위한 방법을 제안한다. 해석은 2차원 도체의 TM 및 TE 편파에 대한 산란특성을 계산하였다.

I 서론

FMM 기법은 Roklin^[1]이 음파의 산란 문제를 해석하기 위해 개발한 방법을 J. M. Song 및 W.C. Chew가 전파 산란특성 해석에 도입하여 발전시키면서 활발히 진행되어 오고 있으며, 계산시간이나 메모리 용량에 큰 장점을 가지고 있다^{[2][3]}.

현재까지 FMM 기법을 연구한 결과로 보면, 비교적 크기가 큰 2차원 및 3차원 적용이 가능하고 결과도 다른 수치해석기법과 잘 일치하는 것으로 나타나 있다. 그 동안 임의의 형태의 도체 크기에 적용해 본 결과, 구조의 특성이 폭과 높이가 어느 정도의 비를 유지하고 있거나 크기가 큰 경우는 참고문헌이나 논문에서 언급한바와 같이 결과가 일치함을 확인하였지만, 높이에 비해 폭이 매우 좁은 구조(특히 좁은 타원형 실린더 구조)는 오차가 증가하는 경향을 보여 주었다. 이것은 FMM에서 도체 표면을 N개의 산란체로 나누고, 산란체를 일정한 그룹으로 결합할 경우 급한 곡선면에 속한 그룹들의 상호작용에 문제가 발생하는 것으로 나타났다. 따라서, 본 논문에서는 이러한 구조적 문제 및 그룹의 분류로 인해 발생하는 문제점을 분석하고, 이를 해결하기 위한 방법을 제시하였다.

FMM 해석과정은 참고문헌 [2] J.M Song 등이 제안한 방법을 참고하여, TM 및 TE 편파에 대한 수행하였고, 제안한 방법을 검증하기 위해 같은 문제에 대해 MOM 기법으로 해석한 결과와 비교하여 제시하였다.

II 이론

1. FMM개념

FMM 기법의 개념은 그림 1처럼 임의의 금속 산란체를 N개의 부산란체로 나누고, 이들의 상호작용을 보다 효과적으로 고려하기 위해 부산란체들을 그룹으로 나눈다. 그리고, 그림 1의 오른쪽에서 나타낸 것과 같이 부산란체의 중심을 Bessel 함수의 addition theorem을 사용하여 그룹의 중심으로 전이시킨다. 부산란체들의 상호작용은 그룹 중심간의 상호작용을 구하고, 임의의 그룹에서 다른 그룹에 의한 산란필드는 그룹의 센터로 수신된 필드를 그룹에 속해 있는 부산란체에 재분배하여 구한다. FMM 기법을 적용할 경우, 행렬과 벡터 곱의 계산시간은 이웃 그룹의 범위에 따라 결정되지만, 그룹의 크기 $N/M = \sqrt{N}$ 으로 할 경우 계산시간은 $O(N^2)$ 을 $O(N^{1.5})$

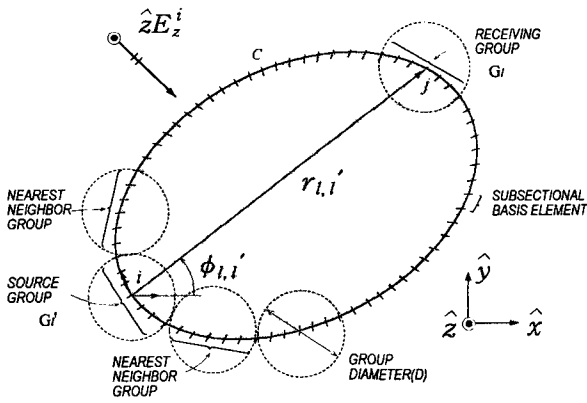


그림 1. 부산관체의 그룹화 및 상호작용
Fig. 1. Grouping of Subscatterers and Their Interaction

까지 줄일 수 있다.

2. TM 파의 경우

자유공간상에서 이차원 도체에 대해 TM_z 파가 입사될 때 적분방정식은 모멘트 법을 사용하여 다음과 같이 이산적으로 나타낼 수 있다^[4].

$$\sum_{n=1}^M Z_{mn} I_n = V_m, m=1, 2, \dots, M \quad (1)$$

여기서,

$$Z_{mn} = \begin{cases} \frac{w\mu_0}{4} \left[1 + \frac{2i}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma k \Delta_n}{4e} \right) \right] \Delta_n, n=m \\ \frac{w\mu_0}{4} \Delta_n H_0^{(1)}(k\rho_{mn}), n \neq m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_n &= J_z(\rho_n) \\ V_m &= E_z^{inc}(\rho_m) \\ \rho_{mn} &= |\rho_m - \rho_n|, (\gamma/4e) = 0.163805 \end{aligned} \quad (2)$$

식 (1)은 반복법을 통하여 해를 구할 수 있으며, FMM 기법을 사용하여 행렬벡터의 연산을 가속화시킬 수 있다.

식(2)에 Bessel 함수에 addition theorem을 사용하여 정리한 결과는 다음과 같다^[2].

$$H_0^{(1)}(k\rho_{mn}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} da \beta_{mr}(a) \tilde{\tau}_{rl}(a) \beta_{ln}(a) \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{rl} &= \sum_{l=1}^M \sum_{p=1}^M H_p^{(1)}(k\rho_{rl}) \exp \left[-ip \left(\phi_{rl} - a - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &, l=1, 2, \dots, N/M, l \neq l' \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \beta_{mr}(a) &= \sum_{m=1}^M \exp [ik\rho_{mr} \cos(a - \phi_{mr})] \\ &, l'=1, 2, \dots, N/M, l \neq l' \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} \beta_{ln}(a) &= \sum_{n=1}^M \exp [ik\rho_{ln} \cos(a - \phi_{ln})] \\ &, l=1, 2, \dots, N/M, l \neq l' \end{aligned} \quad (4c)$$

식 (3)을 식 (1)로 대치하고, 식 (3)을 Q point 합으로 바꿀 경우 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^M Z_{mn} I_n + \left\{ \frac{w\mu_0}{4Q} \sum_{l=1}^M \beta_{ml}(a_q) \cdot \tilde{\tau}_{l'l}(a_q) \cdot \beta_{ln}(a_q) \right\} \Delta_n I_n = V_m \quad (5)$$

식 (5) 등식의 좌측의 첫째항은 self 그룹 혹은 이웃그룹($l-l' \leq$ 이웃그룹의 범위)에 대한 관계를 나타낸다. 그리고, 두 번째 항은 self 그룹 및 이웃그룹을 제외한 그룹간 상호작용으로써 β_{ml} 은 source 그룹, β_{ln} 은 observation 그룹 및 $\tilde{\tau}_{l'l}$ 은 그룹간 상호작용을 나타낸다.

3. TE 파의 경우

TE의 경우도 Neumann 경계조건($\partial\phi/\partial n=0$)을 부가하여 다음과 같이 표현할 수 있다^[4].

$$Z_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2}, n=m \\ -\frac{j}{4} k \Delta_n (\hat{n} \cdot \hat{R}) H_1^{(1)}(k\rho_{mn}), n \neq m \end{cases} \quad (6)$$

여기서, \hat{R} 은 전원점으로부터 관측점으로 향한 포인팅 벡터로써 $(\bar{\rho}_m - \bar{\rho}_n) / |\bar{\rho}_m - \bar{\rho}_n|$ 이며, $\hat{n} \cdot \hat{R}$ 은 다음과 같다.

$$\hat{n} \cdot \hat{R} = n_x^{(n)} \frac{\partial}{\partial x} + n_y^{(n)} \frac{\partial}{\partial y} \quad (7)$$

식 (6)에 Bassel의 addition theorem을 적용하여 식 (3)과 동일한 형태로 유도할 수 있고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\hat{n} \cdot \hat{R}) H_1^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} da \beta_{mr}(a) \tilde{\tau}_{rl}(a) \\ &\times [ik(n_x^{(n)} \cos a + n_y^{(n)} \sin a)] \beta_{ln}(a) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $\tilde{\tau}_{rl}$ 및 β_{mr} 은 식 (4a) 및 식 (4b)와 동일하며, β_{ln} 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \beta_{ln}(a) &= \sum_{n=1}^M [ik(n_x^{(n)} \cos a + n_y^{(n)} \sin a) \\ &\times \exp [ik\rho_{ln} \cos(a - \phi_{ln})] \\ &, l=1, 2, \dots, N/M, l \neq l' \end{aligned} \quad (9)$$

식 (8)을 Q point 합으로 바꿀 경우 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^M Z_{ml} I_m + \left\{ \frac{-jk}{4Q} \sum_{q=1}^Q \beta_{ml}(\alpha_q) \cdot \tilde{\tau}_{rl}(\alpha_q) \cdot \beta_{ln}(\alpha_q) \right\} \Delta_n I_n = \frac{V_m}{\eta} \quad (10)$$

4. 부산관체 그룹화 방법

식 (5) 및 식(10)을 이용하여 산란장을 구할 경우, 임의의 2차원 형태의 도체에 적용해 본 결과 구조가 폭과 높이의 비가 대칭이거나 크기가 큰 경우, 참고문헌이나 논문에서 언급한바와 같이 결과가 일치함을 확인하였다. 하지만, 구조의 특성이 폭과 높이의 비가 매우 적고 급한 곡선면(특히 좁은 타원형 실린더 구조)을 갖는 그림 2과 같은 구조는 정확한 해와 잘 일치하지 않았다. 이것은 폭과 높이의 비가 적어질수록 오차는 더욱 증가하는 경향을 보였다.

식 (5) 및 식 (10)에 포함되어 있는 그룹간의 상호작용을 나타내는 전이함수 항만을 분리하여 표현하면 다음과 같다.

$$\tilde{\tau}_{rl} = \sum_{p=1}^P H_p^{(1)}(k\rho_{rl}) \exp\left[-ip\left(\phi_{rl} - \alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (11)$$

여기서, $\rho_{ll'}$ 는 그룹과 그룹사이의 거리, $\phi_{ll'} - \alpha$ 는 그룹과 그룹의 전이각(translation angle)의 변화를 나타내며, P 는 모드의 자유도를 나타낸다.

전이함수의 특성을 계산한 그림은 그림3과 같다. 그림 3에서는 그룹의 직경 $D=3\lambda$ 로 고정하고, 그룹간의 거리 $r_{ll'}$ 가 D 보다 큰 경우와 적은 경우에 대해 계산하였다. 그림 3(a)에서 알 수 있듯이 그룹사이의 거리가 그룹의 크기보다 클 때는 전이각이 커짐에 따라 부엽(sidelobe) 성분이 급격히 감소한다.

이에 반해 그림 3(b)처럼 그룹의 직경이 그룹간의 거리보다 클 때는 전이각에 상관없이 부엽은 그대로

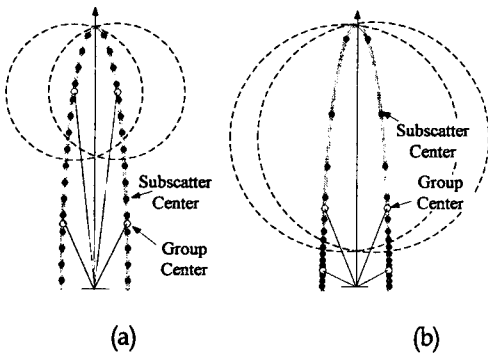
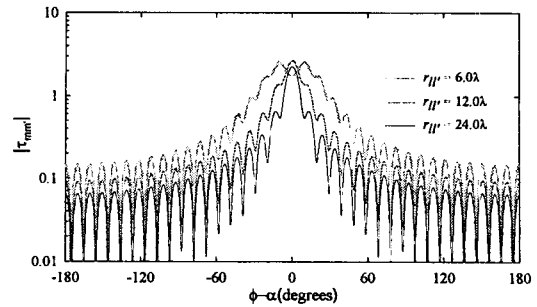
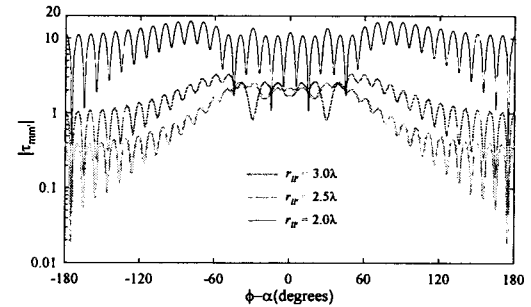


그림 2. 부산관체의 그룹화 방법
(a) 길이가 동일한 경우 (b) 각도가 동일한 경우
Fig 2. Grouping Method of Subscatterer
(a) Same Length (b) Same Angle



(a) $r_{ll'} > D$ 경우, $D=3\lambda, P=18$



(b) $r_{ll'} \leq D$ 경우, $D=3\lambda, P=18$

그림 3 거리 및 각도에 따른 전이함수의 특성
Fig. 3 Characteristics of translation functions with distance and angle

유지하는 것을 알 수 있다. 즉, 방향 벡터의 차이가 많이 있음에도 불구하고, 그룹간의 간섭이 발생할 때는 이들간의 영향이 정확하게 계산되지 않는다는 것을 의미한다. 이러한 영향은 계산결과에 정확도를 해치는 결과로 나타나게 된다

이를 해결하는 방법으로 급한 경사가 일어나는 지역에서는 그림 4처럼 절점 요소의 수를 상대적으로 조밀하게 하고, 완만한 경사 지역에 대해서는 상대적으로 절점 크기를 넓게 하는 적응 절점방법을 선택하였다.

적응 절점방법을 통해 폭이 좁은 구조물에 대해서도 비교적 정확한 값을 얻을 수 있었으며, 이것은 수치계산 결과에 제시하였다. 하지만, 위의 방법이 모든 구조물에 적용되는 방법은 아니며, 다른 구조물에

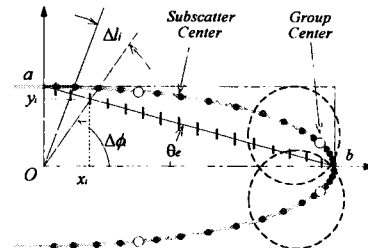


그림 4 절점요소의 대각선 분할법
Fig 4 Diagonal Divide of Subscatterer element

대해서는 다른 절점방법을 택해야 한다. 예를 들어 폭이 좁은 사각 실린더의 경우는 전류의 집중현상이 보이는 모서리 부분에 대해 절점의 크기를 조밀하게 하는 방법 등 모양에 따라 능동적으로 절점을 분할하는 방법을 필요로 한다.

III. 수치해석 결과

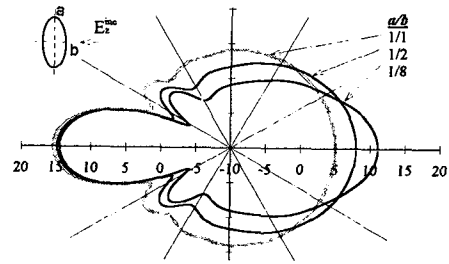
도체 실린더의 형상에 따른 산란특성 및 FMM에 대한 제안된 절점 요소법을 분석하기 위하여 타원형 실린더를 선택하여 RCS를 계산 비교하였다. 평면파의 크기는 1V/m의 평면파가 입사한다고 가정하였다.

계산된 전류 분포를 이용하여 폭과 길이의 비가 1, 1/4 1/8 및 1/16까지의 타원형 도체 실린더에 대해 TM 및 TE파가 입사할 때 실린더의 bistatic RCS를 계산하였고, 그림5 및 그림6과 같다. 결과를 direct MOM 및 참고문헌과 비교해 보면, 제안된 가변 절점요소 방법에 의한 FMM은 폭과 길이의 비가 1/8까지는 direct MOM 이나 참고문헌 [4][5][6]과 완전히 일치하였다. 하지만, 폭과 길이의 비가 1/16 ($a=1 \lambda$, $b=0.0625 \lambda$)이하일 경우는 제안한 방법을 적용하더라도 약간의 오차가 발생하였고, 이웃그룹의 범위를 확장(그룹수/2)하여도 완전히 동일한 결과는 얻을 수 없었다. 따라서, 폭과 길이의 비가 매우 적어 질 경우에는 FMM을 적용하기에는 한계가 있음을 시뮬레이션을 통하여 알 수 있었다. 특히, 그림에서 점선으로 표시된 부분은 가변 절점요소를 사용하지 않고 등각으로 했을 경우에 결과를 참고로 표시한 것인데, 등각으로 할 경우 정점부나 가장자리에 대한 정확한 전류분포를 계산할 수 없기 때문에 정확한 해와는 완전한 차이가 있음을 알 수가 있다.

IV 결론

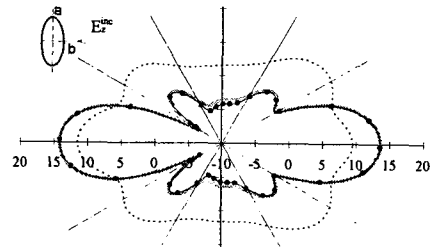
실제 산란해석에서는 단면이 대칭적인 구조보다는 비대칭적이며, 극단적으로 단면에서 폭이 매우 좁은 구조물이 존재한다. 비록 FMM이 대형 산란체 해석에 매우 효과적이지만 산란체의 형상에 따라 적절한 그룹화 방법을 선택하지 않을 경우 정확성이 떨어질 수 있다는 것이 계산결과 나타났다.

본 논문에서는 단면의 폭이 매우 좁은 산란체에 대한 FMM 기법의 해석의 정확성을 높이기 위한 하나의 방법으로 가변 절점 요소 및 그룹화 방법을 제안하고, TM 및 TE 모드에 산란 해석에 적용하였다. 제안된 가변 절점요소법은 폭이 좁은 타원형의 구조에 따라 절점길이를 조정하고, 그룹화하는 것으로 이



Direct MOM 및 FMM(일치)

(a) $\phi^{inc} = 0^\circ$, $a=1 \lambda$, $b=1/0.5/0.125 \lambda$



— Direct MOM

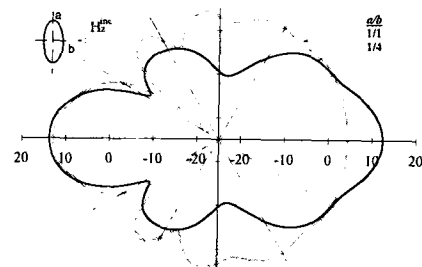
-•- FMM(1/16, 가변 절점요소)

..... FMM(1/16, 동일 절점각 요소)

(b) $\phi^{inc} = 0^\circ$, $a=1 \lambda$, $b=0.0625 \lambda$

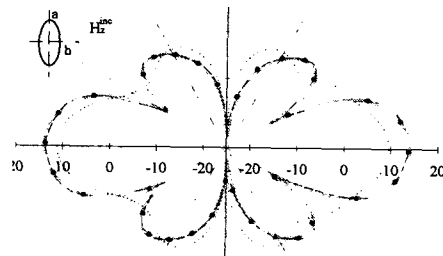
그림5. 타원형 도체 실린더의 Bistatic RCS(TM)

Fig 5. Bistatic RCS of elliptical circular conducting cylinder(TM)



Direct MOM 및 FMM(일치)

(a) $\phi^{inc} = 0^\circ$, $a=1 \lambda$, $b=0.0625 \lambda$



..... Direct MOM

-•- FMM(1/16, 가변 절점요소)

..... FMM(1/16, 동일 절점각 요소)

그림6. 타원형 도체 실린더의 Bistatic RCS(TE)

Fig. 6 Bistatic RCS of elliptical circular conducting cylinder(TM)