

윈도우 그린함수를 이용한 고속 산란필드 계산

⁰주세훈*, 김형동*

*한양대학교 전자전기공학부

Fast Scattered-Field Calculation Using Windowed Green Functions

⁰Saehoon Ju* and Hyeongdong Kim*

*Department of Electrical and Computer Engineering

Hanyang University, Seoul 133-791, KOREA

Tel. 2-2290-0373/ Fax. 2-2293-0377/ Email: hdkim@hanyang.ac.kr

ABSTRACT

본 논문에서는 방사 적분방정식의 해를 구하기 위하여 파수영역 웨이블릿 변환개념에 기반을 둔 윈도우 그린함수를 사용하여 파수영역에서 고속으로 산란필드를 계산하는 방법을 제안하였다. 그린함수에 적용된 파수영역 웨이블릿 변환은 공간영역에서 동일한 Q를 갖는 윈도우를 사용하여 필터링함으로써 등가적으로 구현하였다. 고유함수를 이용하여 관찰점을 중심으로 전개된 그린함수를 푸리에 변환한 후 파수영역에서 방사 적분을 계산함으로써 계산효율을 얻을 수 있음을 확인하였다. 관찰영역에서만 정확한 값을 갖는 고유함수로 전개된 그린함수는 그린함수에 윈도우 함수를 써운 형태로 방사 적분방정식의 파수영역 표현에 적용하면 기존의 고속멀티풀법과 동일한 산란필드 공식을 얻을 수 있다.

I. 서 론

대표적인 적분방정식 전자파 해석법인 모멘트법(MoM: Method of Moment)^[1]은 주어진 문제에 대한 적분방정식을 행렬식으로 만들어 컴퓨터로 계산할 수 있도록 해주는 정확한 수치해석 방법이다. 기존의 멀스함수를 기저함수로 사용하여 전기적으로 큰 구조를 해석하는 경우 모멘트법에 의해서 만들어진 행렬식은 매우 밀집된 행렬로 직접법에 의해서 해를 구하게 되면 막대한 메모리와 계산시간을 요구하게 되므로 일반적으로 전기적으로 작은 구조를 해석하는데 적합한 수치해석법으로 알려져 있다. 반복적인 근사과정을 통하여 해에 접근하는 간접반복법을 모멘트법과 사용하게 되면 일반적으로 직접법에 비해 큰 구조의 해석이 가능하지만, 반복과정에서 수행되는 행렬이 직접법과 마찬가지로 밀집된 형태이므로 행렬요소를 저장하는데 많은 메모리가 필요하며 곱계산시에 많은 시간이 소요된다. 하지만, 행렬식 자체가

성긴 경우에는 그 특성을 살려 메모리와 계산시간을 줄이기가 용이하므로 전기적으로 큰 구조 해석시에는 간접반복법을 많이 사용하고 있다.

모멘트법과 함께 기존의 멀스 기저함수를 사용할 경우 밀집된 행렬방정식이 얻어지는데, 이것은 멀스 기저함수가 그린함수의 다중분해능 특성(근거리 영역의 공간적으로 국부적인 신호와 원거리 영역의 진행파 모드에 국한된 파수영역에서 국부적인 신호)을 표현하는데 부적절하기 때문이다^[2,3]. 그린함수의 다중 분해능 특성은 파수 영역에서 연속 웨이블릿 변환(CWT: Continuous Wavelet Transform)을 적용하여 공간-파수영역에서 효과적으로 나타낼 수 있음이 연구되었다^[2,4]. 또한 웨이블릿 변환을 이용한 그린함수의 구현에 있어서는 이산 웨이블릿 변환(DWT: Discrete Wavelet Transform)을 적용하면 공간-파수영역에서 국부적인 특성을 효과적으로 표현할 수 있으므로 기저함수의 수를 상당히 줄일 수 있어 계산의 효율을 높일 수 있다는 것도 함께 언급되었다.

본 논문에서는 파수영역에서 이산 웨이블릿 변환개념을 적용한 그린함수를 이용하여 파수영역에서 고속으로 산란필드를 계산하는 방법을 제안하였다. 먼저 2.1절에서는 2차원 산란문제에 대한 정의와 함께, 공간영역과 파수영역에서의 방사 적분방정식표현에 대하여 살펴보았다. 2.2절에서 그린함수에 파수영역 이산 웨이블릿이 적용된 원도우 그린함수의 구현에 대하여 설명하고, 2.3절에서는 고유함수로 전개된 원도우 그린함수를 방사 적분방정식의 파수영역 표현에 적용하면 기존의 고속멀티풀법과 동일한 공식을 얻게 되어 고속으로 산란필드를 계산하는 것이 가능하다는 것을 보였다.

II. 본 론

1. 2차원 방사 적분방정식의 공간영역과 파수영역 계산

2차원에서 TM^z로 편파된 평면파가 실린더에 입사하는 경우에 표면에 유기된 전류원 $J_z(\vec{\rho})$ 는 자유공간영역에서 같은 방향으로 편파된 산란필드 $E_z^s(\vec{\rho})$ 를 만들게 되며, 그 관계식은 전류원 $J_z(\vec{\rho})$ 와 공간영역에서의 그린함수 $G(\vec{\rho})$ 의 컨벌루션 형태로 다음 식과 같이 공간영역과 파수영역에서 계산가능하다.

$$\begin{aligned} E_z^s(\vec{\rho}) &= -j\omega\mu_0 G(\vec{\rho}) * J_z(\vec{\rho}) \\ &= -j\omega\mu_0 \int G(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \cdot J_z(\vec{\rho}') d\vec{\rho}' \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$G(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = \frac{1}{4\pi} H_0^{(2)}(k_0 |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) \quad (1.2)$$

$$E_z^s = -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G(\vec{k}) \cdot J_z(\vec{k}) k dk da \quad (2.1)$$

$$G(\vec{k}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G(\vec{\rho}') e^{-j\vec{k} \cdot \vec{\rho}'} \rho' d\rho' d\phi' \quad (2.2)$$

$$J_z(\vec{k}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty J_z(\vec{\rho}') e^{-j\vec{k} \cdot \vec{\rho}'} \rho' d\rho' d\phi' \quad (2.3)$$

위 식에서 $H_0^{(2)}$ 는 0차 이종 Hankel 함수이며, $|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|$ 은 소스 전류원과 산란필드를 구하고자 하는 관찰점간의 거리를 나타낸다. 물결기호는 파수영역의 변수임을 나타내고 있다. 기존의 모멘트법에서는 식 (1)과 식 (2)를 행렬방정식으로 만들어 계산할 수 있는데, 행렬 요소값이 0이 아니어서 매우 밀집된 형태를 갖게 된다. 모멘트법에서 직교하는 기저함수를 사용하더라도 밀집된 행렬로 만들어지는 이유는 그린함수 자체가 공간영역과 파수영역에서 넓게 퍼져있는

신호성분을 동시에 갖고 있기 때문이다. 방사적 분방정식을 효율적으로 계산하기 위해서는 그린함수의 특성을 이해하고 효과적으로 이용하여야 한다.

2. 원도우 그린함수

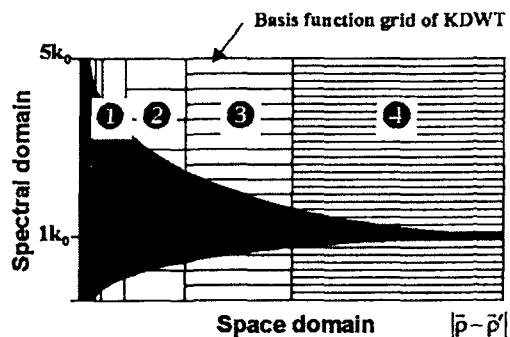


그림 1. 공간-파수영역에서의 2차원 그린함수와 파수영역 웨이블릿 기저함수(KDWFT)

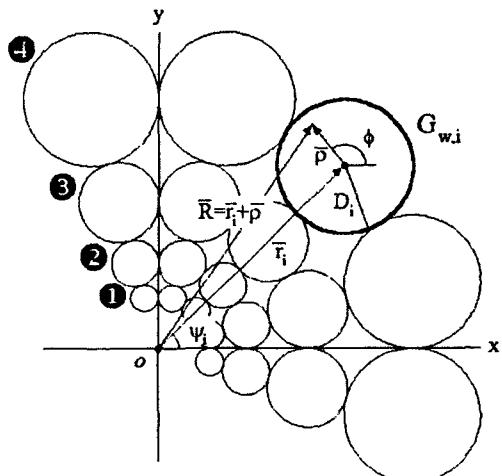


그림 2. 파수영역 이산 웨이블릿 개념의 공간영역 구현

그린함수는 그림 1과 같은 다중분해능 특성(근거리 영역의 공간적으로 국부적인 신호와 원거리 영역의 진행파 모드에 국한된 파수영역에서 국부적인 신호)을 가지고 있다^[2,3]. 본 논문에서 다루고 있는 2차원 자유공간 그린함수 또한 근거리 영역의 공간 국부적인 신호와 원거리 영역의 k_0 진행파 모드에 집중된 파수영역의 국부 신호를 동시에 가지고 있다. 그림 1에는 다중 분해능 특성을 효과적으로 표현할 수 있는 파수영역 웨이블릿의 기저함수가 공간-파수영역에서 갖는 해상도 격자를 함께 나타

내었다^[2~6]. 그림 1에서는 숫자가 증가할수록 원거리를 나타내며, 이러한 파수영역에서의 웨이블릿이 적용된 그린함수를 2차원에서 표현하면 그림 2와 같이 대응되는 그린함수를 얻게 된다.

파수영역에서 이산 웨이블릿의 적용은 공간영역 신호를 필터링(constant Q-filtering)하고 푸리에 변환(Fourier transforming)함으로써 동가적으로 구현할 수 있다^[2~4,6]. 이산 웨이블릿 변환을 파수영역에서 적용하여 그린함수를 표현하기 위하여 다음식과 같이 공간영역에서의 그린함수를 동일한 Q값을 갖는 원도우가 썩워진 여러 개의 그린함수 합으로 생각해 보자(Constant Q-Filtering Phase).

$$\begin{aligned} G(R) &= G(R)W_i(R - r_i) = \sum_i G_{w,i}(R) \\ &= G_{w,0}(R) + G_{w,1}(R) + \dots + G_{w,i}(R) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)의 우변에 있는 공간영역에서 필터링된 그린함수 $G_{w,i}(R)$ 은 원도우함수 $W_i(R - r_i)$ 에 의해서 한정되어진 그린함수로, 원도우 함수 영역 내에서 소스로부터 r_i 만큼 떨어진 관찰점에서의 산란 필드를 나타낸다. i 번째 원도우 함수의 크기 D_i 는 웨이블릿 변환에서의 "constant Q-filtering"과 같이 $D_i/r_i \approx$ 상수가 되도록 결정해줄 수 있다. 이러한 일련의 과정을 통해서 다음의 필터링된 그린함수의 파수영역 변환식을 구할 수 있다 (Transforming Phase).

$$\begin{aligned} G_{w,i}(k, \alpha) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G(R) W_i(R - r_i) e^{-ikpcos(\alpha - \phi)} \rho d\rho d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{D_i} G(|\vec{r}_i + \vec{\rho}|) e^{-ikpcos(\alpha - \phi)} \rho d\rho d\phi \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서 ρ 와 ϕ 는 중심이 원도우 함수 W_i 의 중심과 일치하는 원통 좌표계의 스칼라 변수들이다. 원도우 함수의 범위로 인해서 식 (4)의 ρ 에 대한 적분은 0에서 ∞ 가 아닌 0에서 D_i 이다. 식 (4)의 파수영역 그린함수는 공간영역에서 원도우함수로 필터링된 그린함수의 푸리에 쌍이다.

원도우 그린함수를 이용한 산란필드 계산 시에는 관심영역 밖의 원도우의 형태에 상관없이 공간영역에서나 파수영역에서 관찰영역의 산란필드를 정확하게 계산할 수 있다. 소스영역과 관찰영역의 크기에 비례하여 원도우의 크기만 결정해주면 관찰영역 내에서의 산란필드는 그림 3과 같이 정확하게 계산이 가능하다. 그림 3은 소스와 관찰점이 3λ 만큼 떨어져 있고, 각

영역의 크기가 1λ 일 때 관찰영역에서의 산란필드를 계산한 것이다. 그린함수에 적용된 원도우의 형태는 그림 3(b)와 같이 관찰영역의 크기와 소스영역의 크기를 더한 거리만큼은 1을 갖고 다른 곳에서는 0을 갖는 것과 부드럽게 0으로 변하는 것, 그리고 사인형태이다. 실제로 관찰영역내의 산란필드만이 관찰대상일 경우에는 원도우는 소스영역과 관찰영역을 포함하는 크기만큼만 1을 만족하는 원도우를 사용하면 그 외 영역에서는 어느 값을 갖더라도 그림 3(c)와 같이 기존의 모든 영역에서 정확한 그린함수를 사용한 결과와 동일한 결과를 얻을 수 있다. 다음절에서는 효율적인 계산을 위한 원도우 그린함수의 요건을 알아보고 산란필드 식을 유도하였다.

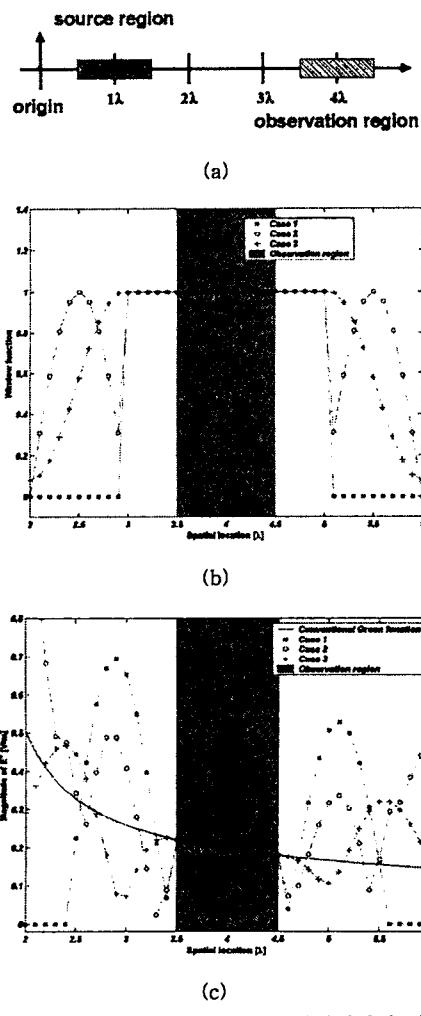


그림 3. 원도우 그린함수를 이용한 1차원에서의 산란필드 계산: (a) 크기가 1λ 인 소스영역과 관찰영역이 3λ 떨어진 구조 (b) 그린함수에 적용된 원도우 함수 (c) 원도우 그린함수를 이용하여 계산된 산란필드

3. 원도우 그린함수를 이용한 고속 산란필드 계산

원도우 그린함수를 이용하여 산란필드를 효율적으로 계산하기 위해서는 그린함수의 공간-파수영역에서의 다중분해능 특성에서 알 수 있듯이 기본적으로 근거리 영역의 계산은 공간 영역에서 원거리 영역에서의 계산은 파수영역에서 수행하는 것이 자연스럽고 효과적인 방법임을 알 수 있다. 근거리 영역에서는 식 (1)과 같이 공간영역에서 산란필드를 구하므로 기존의 모멘트법에 의한 해석이 가능하다. 원거리 영역에서는 식 (2)와 같이 파수영역에서 산란필드를 구하는 것이 효과적인데 원도우 그린함수를 푸리에 변환하여 사용하여야 한다. 그림 3(b)의 첫번째 경우의 원도우를 사용한 경우 파수영역 웨이블릿 개념에 기반한 원도우 그린함수는 다음과 같은 식으로 정리할 수 있다^[7~8].

$$G_n(k, \alpha) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r_m n) e^{jn\phi_m n} e^{-j\alpha n} e^{jn3\pi/2} \int_0^D J_n(k_0 \rho) J_n(k \rho) \rho d\rho \quad (5)$$

식 (5)를 식 (2)의 파수영역 산란필드 계산식에 대입하고 정리하면 원도우 그린함수를 이용한 산란필드 계산식을 얻을 수 있다^[7].

$$E_n(\rho, \phi) = -\frac{k_0 D}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} J_n(k, \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r_m n) e^{jn\phi_m n} e^{-j\alpha n} e^{jn3\pi/2} \int_0^D J_n(k_0 \rho) J_n(k \rho) \rho d\rho e^{jk\rho \cos(\alpha - \phi)} k dk da \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^D J_n(k_0 \rho) J_n(k \rho) \rho d\rho \\ &= \begin{cases} \frac{D^2}{2} \left[\left(-\frac{n}{k_0 D} \right)^2 J_{n+1}(k_0 D) J_{n+1}(k_0 D) - 2J_n(k_0 D) + J_n^2(k_0 D) \right] & \text{at } k = k_0 \\ \frac{D}{k^2 - k_0^2} \{ k J_n(k_0 D) J_{n+1}(k D) - k_0 J_n(k D) J_{n+1}(k_0 D) \} & \text{elsewhere} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.2)$$

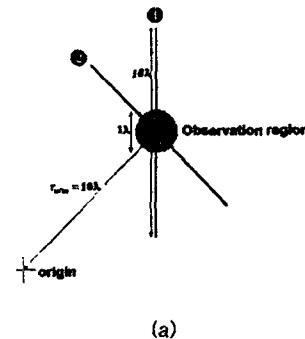
위 식 (6)은 펄스형태의 원도우를 이용한 원도우 그린함수를 푸리에 변환하여 파수영역에서 산란필드를 계산하고 있는데, 식 (6.2)에서 보는 것과 같이 파수영역에서 진행파 모드와의 영역에도 적분내의 항이 값을 갖게 되므로, 정확한 계산을 위해서는 파수영역 전체에 걸쳐서 계산을 수행해야 하므로 효과적이지 못하다. 이러한 것은 공간영역에서의 산란필드 계산과 같은 정도의 계산량을 요구하게 된다.

한편 식 (1.2)의 그린함수는 멕스웰 방정식으로부터 고유함수를 이용한 급수형태로 전개하여 나타낼 수 있는데, 이것이 "Addition Theorem"으로 잘 알려져 있는 형태이다^[9]. 급수형태의 그린함수인 "Addition Theorem"의 유

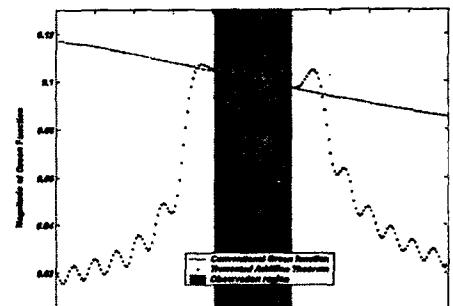
한한 항을 더한 형태는 원래의 그린함수에 관찰영역과 소스영역을 포함하는 크기만큼만 정확한 값을 갖는 원도우가 적용된 그린함수의 형태이며, 원도우 밖에서는 실제 그린함수 값과 관계없는 임의의 값을 갖게 된다. 하지만 그림 3에서 보았듯이 관찰영역에서의 산란필드 정확하게 계산하는 데에는 아무런 문제가 없다.

$$G_n(\vec{r}_{m,n}, \vec{\rho}, \vec{\rho}') = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-L}^L H_n^{(2)}(k_0 r_{m,n}) / n(k_0 |\vec{\rho} - \vec{\rho}'|) e^{jn(\phi_m - \phi')} \quad (7)$$

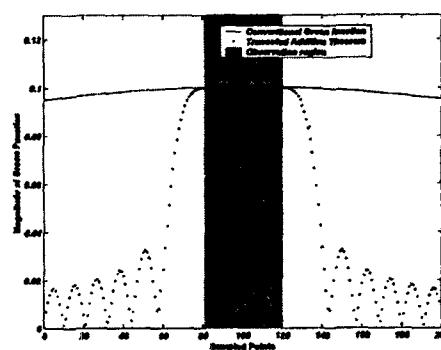
for $|\vec{\rho} - \vec{\rho}'| \leq r_{m,n}$



(a)



(b)



(c)

그림 3. 고유함수로 진개된 유한한 급수로 만들어진 원도우 그린함수: (a) 원점으로부터 10λ 떨어진 거리에 있는 크기가 1λ 인 관찰영역 (b) 1번 방향으로의 그린함수 (c) 2번 방향으로의 그린함수

그림 3은 원점에서 10λ 떨어진 곳에서 크기가 1λ 인 관찰영역 내에서만 정확한 값을 갖는 식 (7)의 그린함수를 보여주고 있다. 그림 3에 사용된 항의 개수를 나타내는 L 은 10으로 선택되었다. 유한한 항의 급수형태로 그린함수를 계산함으로써 관찰영역에서만 정확한 값을 갖고 다른 부분에서는 Bessel 함수의 조합으로 나타나는 값을 갖는 것을 확인할 수 있다. 관찰영역에서만 정확한 값을 갖으면 산란필드를 정확하게 구할 수 있으나, 계산효율을 생각할 때에는 모든 원도우 그린함수가 산란필드 계산에 유리한 것은 아니었다. 하지만, 다행히도 식 (7)의 원도우 그린함수 형태는 파수영역에서 다음 식과 같이 $k=k_0$ 인 곳에서만 값을 갖으므로 산란필드 계산시에 적분식을 줄일 수 있는 형태를 띠고 있다.

$$\begin{aligned}\tilde{G}_n(k, \alpha) &= \frac{1}{4j} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sum_{m=-L}^L H_n^{(2)}(k_0 r_{m,m}) e^{jk_0 r_{m,m}} J_n(k_0 p) e^{-jk_0 p} e^{-jk_0 p} dp d\phi \\ &= \frac{1}{4j} \sum_{m=-L}^L H_n^{(2)}(k_0 r_{m,m}) e^{jk_0 r_{m,m}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty J_n(k_0 p) e^{-jk_0 p} e^{-jk_0 p \cos(\alpha-\theta)} p dp d\phi \\ &= \frac{\pi}{2j} \sum_{m=-L}^L H_n^{(2)}(k_0 r_{m,m}) e^{jk_0 r_{m,m}} e^{-jk_0 m} e^{-jk_0 \frac{m\pi}{2}} \int_0^\infty J_n(k_0 p) J_n(k_0 p) p dp \\ &= \frac{\pi}{2j} \sum_{m=-L}^L H_n^{(2)}(k_0 r_{m,m}) e^{jk_0 r_{m,m}} e^{-jk_0 m} e^{-jk_0 \frac{m\pi}{2}} \frac{\delta(k-k_0)}{k_0}\end{aligned}\quad (8)$$

식 (8)의 원도우 그린함수는 파수영역에서 $k=k_0$ 인 곳에서만 값을 갖게되어 식 (2)의 파수영역 계산이 매우 효과적이다. 식 (8)을 식 (2)에 대입한 후 정리하면 다음과 같이 효율적인 고속 파수영역 산란필드 계산식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}E_x(\beta) &= -\frac{k_0 \eta}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \tilde{J}_x(k, \alpha) \sum_{m=-L}^L H_n^{(2)}(k_0 r_{m,m}) e^{jk_0 r_{m,m}} e^{-jk_0 m} e^{-jk_0 \frac{m\pi}{2}} \delta(k-k_0) e^{jk_0 p \cos(\alpha-\theta)} k dk d\alpha \\ &= -\frac{\eta}{\pi} \frac{k_0}{k} \int_0^{2\pi} \tilde{J}_x(k, \alpha) \sum_{m=-L}^L H_n^{(2)}(k_0 r_{m,m}) e^{jk_0 r_{m,m}} e^{-jk_0 m} e^{-jk_0 \frac{m\pi}{2}} e^{jk_0 p \cos(\alpha-\theta)} d\alpha\end{aligned}\quad (9)$$

식 (9)는 펄스형태의 그린함수를 적용한 식 (6)에 비하여 k 방향으로의 적분이 줄어든 형태로 그만큼 산란필드를 계산하는데 있어서 효율적이라 하겠다. 고유함수로 전개된 원도우 그린함수를 이용하여 얻어진 파수영역 산란필드 계산식은 항의 정리를 통해서 다음의 식 (10)과 같이 고속 멀티폴법^[10] 산란필드 계산식과 동일한 형태로 나타낼 수 있다

$$E_x(\beta) = -\frac{\eta}{\pi} \frac{k_0}{k} \int_0^{2\pi} e^{jk_0 p \cos(\alpha-\theta)} \sum_{m=-L}^L H_n^{(2)}(k_0 r_{m,m}) e^{jk_0 r_{m,m}} e^{-jk_0 \frac{m\pi}{2}} \tilde{J}_x(k, \alpha) d\alpha\quad (10)$$

고속 멀티폴법을 원도우 그린함수를 이용한 산란필드 계산식의 하나로 생각할 수 있으며, 유한한 급수형태로 이루어진 원도우 그린함수를 사용하여 산란필드를 구하는 것은 그린함수의 특성을 최대한 살려서 계산하는 효율적인 방법임을 알 수 있다.

III. 결 론

파수영역 웨이블릿 변환개념에 기반을 둔 원도우 그린함수를 사용하여 파수영역에서 고속으로 산란필드를 계산하는 방법을 제안하였다. 여러 가지 원도우를 사용한 그린함수로 산란필드를 관찰영역 내에서 정확하게 계산 할 수 있음을 보이고 고유함수를 이용하여 관찰점을 중심으로 전개된 급수형태의 원도우 그린함수를 이용하여 파수영역에서 산란필드를 효율적으로 계산 가능함을 보였다. 최종적인 산란필드 계산식은 기존의 고속 멀티폴법의 계산식과 동일한 형태를 띠고 있어 효율적으로 산란필드를 계산할 수 있다는 것을 알 수 있었다

참 고 문 헌

- [1] R. F. Harrington, Field Computation by Moment Method, Macmillan Co., New York, 1968.
- [2] H. Kim and H. Ling, "On the application of fast wavelet transform to the integral equation solution of electromagnetic scattering problems," Microwave Opt. Tech. Lett., vol. 6, pp. 168-173, Mar. 1993.
- [3] H. Kim, H. Ling, and C. Lee, "A fast moment method algorithm using spectral domain wavelet concepts," Radio Science, vol. 31, pp. 1253-1261, 1996.
- [4] S. Kahng, S. Ju, and H. Kim, "Continuous wavelet representation of Green functions in layered media," Electron. Lett., vol. 34, pp. 378-379, 1998.
- [5] O. Rioul and P. Duhamel, "Fast algorithms for discrete and continuous wavelet transforms," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 38, pp. 569-586, 1992.
- [6] A. C. Bovik, N. Gopal, T. Emmerich, and A. Restrepo, "Localized measurement of emergent image frequencies by Gabor wavelets," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 38, pp. 691-712, 1992.
- [7] S. Ju and H. Kim, "Compact representation of Green function using discrete wavelet concept," submitted to Electron. Lett.
- [8] 주세훈, 김형동, "이산 웨이블릿 변환개념을 응용한 그린함수 표현에 관한 연구," 전자파학회 논문지 게재승인.
- [9] C. A. Balanis, Advanced Engineering Electromagnetics, John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- [10] R. Coifman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, "The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription," IEEE Antennas Propag. Mag., vol. 35, pp. 7-12, 1993.