

일반적인 마이크로스트립 구조에 관한 MoM 행렬의 수치계산

°이 영 순*, 김 의 중*, 오 병 희*, 조 영 기**

*금오공과대학교 전자공학부

**경북대학교 전자전기공학부

Numerical Evaluation of MoM Matrix for a General Microstrip Structures

°Y. S. Lee*, E. J. Kim*, B. H. Oh*, and Y. K. Cho**

*School of Electronic Eng., Kum-oh National University of Technology

**School of Electrical & Electronic Eng., Kyungbook National University

ABSTRACT

In case that a closed-form Green's functions are used for the numerically efficient analysis of a general microstrip structures of thin or thick substrate, an efficient technique for the evaluation of MoM off-diagonal matrix elements as well as diagonal elements is proposed. In order to check the validity of the present method, performance is demonstrated for the example of a coaxially-fed microstrip antenna and the present results are compared with the previous results.

I. 서론

최근 마이크로스트립 구조체에 관한 공간영역 그린함수의 효율적인 계산을 위해 다양한 closed-form 그린함수법^[1-3]이 제안되었다. 접지된 유전체 기판(dielectric substrate)의 두께에 관계없이 사용할 수 있는 closed-form 그린함수의 표현식은 일반적으로 3개의 항들로 구성되어진다. 즉, 3개의 항은 각각 e^{-jkr}/r 의 형태로 표현되어지는 전위 자신에 의한 항과, Hankel 함수로 표현되어지는 표면파 극점에 의한 기여항 및 몇 개의 복소지수함수의 합으로 표현되어지는 복소 영상에 의한 항이다. 모멘트법(MoM)에 이와 같은 그린함수가 사용되어지는 경우, 대각행렬요소 계산시 $1/r$ 형태 및 Hankel 함수에 의한 logarithmic 특이적분(singular integral)이 존재함을 알 수 있다. 또한 이와 같은 그린함수를 마이크로스트립 안테나와 같은 구조체의 산란문제 해석을 위해 MoM에 사용해본 결과, 위에서 언급한 특이적분들을 참고문헌 [4]에서와 같이 신중하게 처리하였음에도 불구하고 대각행렬요소를 구하는 과정에서

적분결과 수렴속도가 매우 느린 문제점이 발견되었다. 이와 같은 특이적분 처리 문제와 적분결과 느린 수렴도 문제를 해결하기 위해 참고문헌[5]에서는 극좌표계(polar coordinate) 변환법을 사용한 수치적분기법을 제시하였다.

그러나 참고문헌 [5]에서는 유전체 기판이 얇은(thin substrate) 경우를 취급하여 표면파 극점에 의한 기여항을 무시하였으므로 Hankel 함수의 logarithmic 특이적분처리방법을 제시할 필요성이 없었고, 또한 비대각(off-diagonal) 행렬요소계산을 위한 방법은 제시하지 않았다. 따라서 본 논문에서는 유전체 기판의 두께에 관계없는 마이크로스트립 구조체 산란문제의 효율적인 수치해석을 위해, 참고문헌 [5]의 방법에 근거하여 대각행렬요소계산 과정에서 발생하는 logarithmic 특이적분 처리 및 비대각 행렬요소를 포함한 전 행렬요소를 효율적으로 계산할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

II. closed-form 그린함수

그림 1과 같은 마이크로스트립 구조체의 경우에 대한

기존의 closed-form 그린함수법들을 유전체 기판의 두꺼운 경우^[1,3]와 얇은 경우^[1,5]로 구분할 수 있다. 두 경우에 있어 큰 차이점은 유전체 기판이 얇은 경우 표면과 극점에 의한 기여항을 두꺼운 경우와 달리 무시할 수 있다는 점이다. 그러나 참고문헌 [3]에서 언급된 바와같이 기판이 얇은 경우라 하더라도 사용 주파수가 증가함에 따라 표면파에 의한 기여를 무시할 수 없으므로, 일반적인 마이크로스트립 구조체 해석을 위해 기판이 두꺼운 경우와 같이 표면파 기여항을 고려한 closed-form 그린함수법이 타당하다고 사료되어진다. 따라서 기존의 closed-form 그린함수법^[1,3]에 의한 그린함수 표현식은 다음과 같은 적분식의 형태로 표현되어질 수 있다.

$$G = G_0 + G_{sw} + \sum_{k=1}^N G_{ck} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{여기에서, } G_0 &= e^{-jk_0 r_0} / r_0, \quad r_0 = \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}, \\ G_{sw} &= C_{Res} H_0^{(2)}(k_{\rho\rho} \rho), \quad \rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \\ G_{ck} &= a_k e^{-jk_0 r_k} / r_k, \quad r_k = \sqrt{\rho^2 + (z-z' - jb_k)^2}. \end{aligned}$$

$k_{\rho\rho}$ 는 표면파의 실극점이며, C_{Res} 는 $k_{\rho\rho}$ 에 대해 유수정리를 사용하여 구해지는 계수^[1,3]이고, a_k 와 b_k 는 기존의 closed-form 그린함수들과 같이 근사화 적분경로를 따라서 파수영역의 그린함수를 근사화하는 과정에서 구해지는 복소 계수들이다. (1)식에서 G_0 는 전원 자신에 의한 항이고, G_{sw} 는 표면파 기여에 의한 항이며 G_{ck} 는 복소 영상에 의한 항들이다.

III. 적분기법

본 논문에서는 혼합 포텐셜 적분방정식(MPIE)기법을 선택하여 분할된 전류셀(전하셀)에 대해 rooftop(pulse) subsectional 기저함수들을 사용하는 MoM의 경우에 대해 고려하고자 한다. $a \times b$ 의 직사각형 형태로 분할(segment)된 전하셀에 대해 (1)식의 그린함수가 사용될 경우, 대각행렬 요소계산($x=y=0, z=z'=0$)시 다음 식들과 같은 적분식들이 나타나게 된다.

$$I_{a,ck} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{e^{-jk_0 \sqrt{x'^2 + y'^2 + (jb_k)^2}}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + (jb_k)^2}} dx' dy' \quad (2)$$

$$I_{a,sw} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} H_0^{(2)}(k_{\rho\rho} \rho) dx' dy' \quad (3)$$

$$I_{A,ck} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{a/2} \left(1 - \frac{x'}{a}\right) \frac{e^{-jk_0 \sqrt{x'^2 + y'^2 + (jb_k)^2}}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + (jb_k)^2}} dx' dy' \quad (4)$$

$$I_{A,sw} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{a/2} \left(1 - \frac{x'}{a}\right) H_0^{(2)}(k_{\rho\rho} \rho) dx' dy' \quad (5)$$

여기에서 (2)식과 (3)식은 pulse 기저함수(즉, 분할된 전하셀)에 의한 스칼라 포텐셜을 구하는 과정에서 나타나는 식들이고, (4)식과 (5)식은 rooftop 기저함수(즉, 분할된 전류셀)에 의한 벡터 포텐셜을 구하는 과정에서 나타나는 식들이다. 또한 rising half rooftop function에 의한 결과는 본 논문에서 유도된 식으로부터 바로 얻을 수 있기 때문에, (4)와 (5)식에서는 falling rooftop function에 의한 결과식만을 제시하였다. (2)식과 (4)식은 $b_k = 0$ 인 경우, (1)식에서 G_0 에 의한 $e^{-jk_0 r} / r$ 형태의 특이적분식으로 환원됨을 알 수 있다. 또한 서론에서 언급한 바와 같이 (3)식과 (5)식에서 Hankel함수에 의한 logarithmic 특이적분이 있음을 알 수 있다.

3-1. 복소지수함수의 적분법

먼저 $e^{-jk_0 r} / r$ 형태 특이적분처리와 복소 영상항들에 의한 적분결과와 느린 수렴도 문제를 해소하기 위해 참고문헌 [5]에서와 같이 (2)식을 극좌표계로 변환한 후, $u = \sqrt{\rho^2 + (jb_k)^2}$ 으로 변수 치환을 하면 (2)식은 다음과 같은 적분식으로 되어진다.

$$I_{a,ck} = \frac{j}{k} \int_0^{2\pi} [e^{-jk_0 \sqrt{\rho_c(\theta)^2 + (jb_k)^2}} - e^{-jk_0 \sqrt{(jb_k)^2}}] d\theta \quad (6)$$

여기에서 $\rho_c(\theta)$ 는 참고문헌 [5]에서와 같이 좌표계의 원점에서 적분구간 외곽까지의 거리이다. (3)식은 (7)식과 같이 두 개의 적분식으로 표현되며,

$$I_{A,ck} = \text{Form of } I_{a,ck} - \quad (7)$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{a/2} \left(\frac{x'}{a}\right) \frac{e^{-jk_0 \sqrt{x'^2 + y'^2 + (jb_k)^2}}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + (jb_k)^2}} dx' dy'$$

(7)식의 두 번째 항을 적분변수 x' 에 대해 먼저 적분을 하면 다음과 같은 적분식으로 되어진다.

$$\begin{aligned} I_{A,ck} &= \text{Form of } I_{a,ck} + \\ &\frac{1}{jk_0 a} \int_{-b/2}^{b/2} [e^{-jk_0 \sqrt{a^2 + y'^2 + (jb_k)^2}} - e^{-jk_0 \sqrt{y'^2 + (jb_k)^2}}] dy' \end{aligned} \quad (8)$$

참고문헌 [5]에서 제시된 바와같이 $b_k \neq 0$ 인 경우 (2)식과 (4)식의 직각좌표계에서 적분 결과에 비해 (6)식과 (8)식의 극좌표계에서 적분 결과들이 매우 빠르게 수렴하며, (6)식과 (8)식에서 볼 수 있는 바와같이 $b_k = 0$ 이

더라도 특이적분이 존재하지 않음을 알 수 있다.

3-2. Hankel 함수의 적분법

(3)식과 (5)식은 극좌표계에서 다음 식들과 같이 표현되며,

$$I_{q,sw} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_c(\theta)} H_0^{(2)}(k_{\rho\rho}\rho)\rho d\rho d\theta \quad (9)$$

$$I_{A,sw} = \text{Form of } I_{q,sw} - \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_c(\theta)} H_0^{(2)}(k_{\rho}\rho)\rho^2 \cos\theta d\rho d\theta \quad (10)$$

(9)식과 (10)식을 변수 ρ 에 대해 먼저 부분적분을 하고 (11)식의 적분공식을 사용하면,

$$\int_0^z H_0^{(2)}(t) t dt = zH_1^{(2)}(z) - j\frac{2}{\pi} \quad (11)$$

(9)식과 (10)식은 다음과 같은 적분식으로 되어진다.

$$I_{q,sw} = \frac{1}{k_{\rho\rho}} \int_0^{2\pi} H_1^{(2)}[k_{\rho\rho}\rho_c(\theta)]\rho_c(\theta) d\theta - j\frac{4}{k_{\rho\rho}^2} \quad (12)$$

$$I_{A,sw} = \text{Form of } I_{q,sw} \quad (13)$$

(12)식에서 볼 수 있는 바와같이 $\rho_c(\theta)$ 는 영이 아니므로, (9)식과는 달리 특이적분이 존재하지 않음을 알 수 있다. 그림 2에서는 (3)식의 직각좌표계에서 적분결과와 (12)식의 극좌표계의 적분결과를 비교하여 제시하였다. 결과에서 볼 수 있는 바와 같이 직각좌표계에서 Gauss 구적법을 사용할 경우 inner and outer point 개수를 (60,60)정도로 선택해야 2중 적분 결과가 수렴할 수 있음을 알 수 있으나, 그에 반해 극좌표계에서는 단일 변수 θ 에 대해 3개정도의 Gauss point로도 충분히 수렴함을 알 수 있다.

3-3. 비대각 행렬요소 계산에 관한 응용

비대각 행렬요소 계산시 나타나는(즉, 다음 식과 같이 관찰점 $(x, 0, 0)$ 이 영이 아닌)경우를 일례로 본 논문에서 제시하고자 한다.

$$I_{A,ck} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a \left(1 - \frac{x'}{a}\right) \frac{e^{-jk_0\sqrt{(x-x')^2 + y'^2 + (jb_k)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + y'^2 + (jb_k)^2}} dx' dy' \quad (14)$$

먼저 $x - x' = x_0$ 로 치환하면 다음식과 같이 되므로,

$$I_{A,ck} = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \int_{-b/2}^{b/2} \int_{x-a}^a \frac{e^{-jk_0\sqrt{x_0^2 + y'^2 + (jb_k)^2}}}{\sqrt{x_0^2 + y'^2 + (jb_k)^2}} dx_0 dy' \quad (15)$$

$$+ \frac{1}{a} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{x-a}^x x_0 \frac{e^{-jk_0\sqrt{x_0^2 + y'^2 + (jb_k)^2}}}{\sqrt{x_0^2 + y'^2 + (jb_k)^2}} dx_0 dy'$$

전술된 방법들을 적용하면 (15)식은 다음 식과 같이 되어진다.

$$I_{A,ck} = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{j}{k_0} \int_0^{2\pi} \left\{ e^{jk_0\rho_c^2(\theta) + (jb_k)^2} - e^{jk_0\{ (jb_k)^2 \}} \right\} d\theta \quad (16)$$

$$+ \frac{j}{k_0 a} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ e^{jk_0\{ x^2 + y'^2 + (jb_k)^2 \}} - e^{jk_0\{ (x-a)^2 + y'^2 + (jb_k)^2 \}} \right\} dy'$$

IV. 수치해석결과 및 결론

본 논문이 제안한 기법의 타당성을 확인하기 위해, 본 논문의 방법을 참고문헌 [4]에서 제시된 해석구조 ($\epsilon_r = 4.34$, $h = 0.8mm$, 패치의 크기 = $60 \times 40mm$ 인 동축선으로 급전되는 마이크로스트립 패치 안테나)문제를 선택하여 패치면에 유기되는 미지의 표면 전류밀도를 구해보았다. 해석 결과로 먼저 사용 주파수를 800MHz~2.8GHz까지 변화시키면서 패치면상에 유기되는 미지의 표면 전류밀도를 구하여, 해당 주파수에서 유기된 최대 전류밀도의 실수부 크기와 허수부 크기를 그림 3에 제시하였다. 그림 3에서 보는 바와 같이 허수부의 최대 첨두치와 실수부의 최소 첨두치가 존재하는 주파수 위치가 각각의 mode의 공진 주파수에 해당되는데, 그 공진 현상이 뚜렷함을 알 수 있다. 본 논문의 해석방법을 통해 얻어진 공진 주파수의 구체적인 값을 기존의 해석 결과^[4] 및 공동 모델^[6]로 얻어진 공진 주파수와 비교하여 표 1에 제시하였다. 참고문헌 [4]의 결과와는 다소 차이가 있지만 참고문헌 [6]에 의한 결과와는 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

결론적으로 본 논문에서 보여진 수치해석 기법의 타당성 입증을 통해, 최근 널리 사용되고 있는 다양한 다층평판 구조체들에 대한 효율적인 수치해석 기법으로 이용될 수 있을 것으로 기대되므로 관련 EM 소프트웨어 개발에 많은 도움을 줄 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

[1] Y. L. Chow, J. J. Yang, D. G. Fang, and G. E. Howard, "A closed-form spatial Green's function for the thick microstrip substrate," *IEEE Trans. MTT.*, vol.39. no.3, pp. 588-592, 1991.

[2] M. I. Aksun , "A robust approach for the derivation of closed-form Green's functions," *IEEE Trans. MTT.*, vol. 44, no. 5, pp. 651-658, 1996.

[3] B. H. Oh, E. J. Kim, Y. S. Lee, and Y. K. Cho , "Efficient derivation of closed-form Green's function for a microstrip structure," *Journal of the Korea Electromagnetic Eng. Society*, vol. 1, no. 1, pp. 63-66, 2001.

[4] J. R. Mosig and F. E. Gardiol, "General integral equation formulation for microstrip antennas and scatterers," *IEE Proc.* vol. 132. no. 7, pp.424-432, Dec., 1985.

[5] 이영순, 김병철, 조영기, "다층 평판구조체 해석시 closed-form 그린함수와 함께한 모멘트 행렬의 효율적인 수치계산," *한국전자파학회논문지*, 제 12권, 제 1호, pp. 92-97, 2001.

[6] Russell W. Dearnley and Alain R. F. Barel, "A Comparison of models to determine the resonant frequency of a rectangular microstrip antenna", *IEEE Trans. AP.*, vol.37, no.1, pp.114-118, 1989.

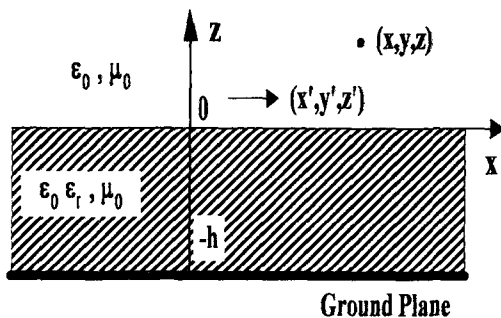


그림1. 마이크로스트립 구조 위에 위치한 수평 전기쌍극자.

Fig.1 Horizontal electric dipole over a microstrip structure

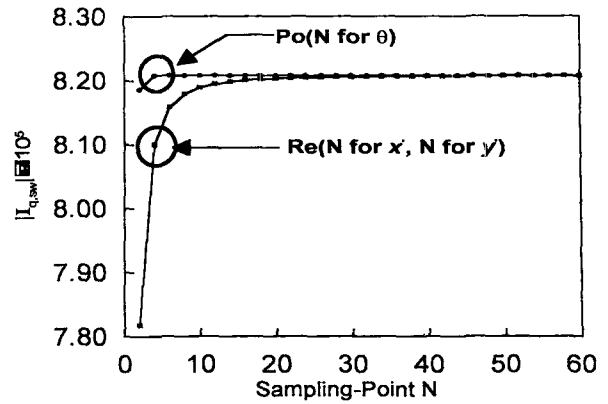


그림 2. Gauss 구적법에 의해 계산되어진 $|I_{q,sw}|$ 의 수렴도

Fig.2. Convergence of $|I_{q,sw}|$ calculated by Gaussian integration

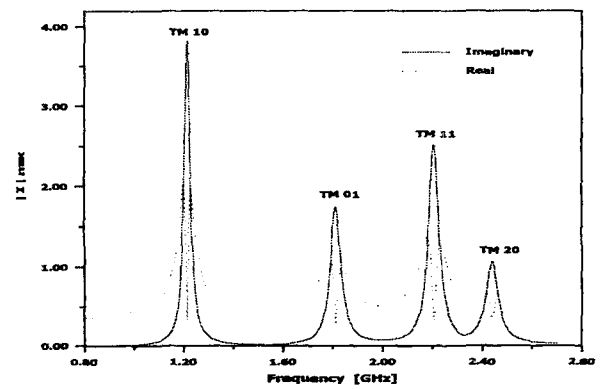


그림 3. 주파수 변화에 따라 패치면 상에 유기되는 표면전류밀도의 크기

Fig. 3. Magnitude of the surface current density induced on the patch conductor according to the variation of a frequency.

표 1. 공진 주파수
Table 1. Resonant frequencies

구분 Mode	기존 논문 ^[4]	공동 모델 ^[6]	본 논문
TM ₁₀	1.206 GHz	1.2092 GHz	1.2095 GHz
TM ₀₁	1.783 GHz	1.7919 GHz	1.7921 GHz
TM ₁₁	2.177 GHz	2.2011 GHz	2.2016 GHz
TM ₂₀	2.405 GHz	2.4185 GHz	2.4189 GHz