TVD기법을 이용한 천수방정식 해석

Numerical Solutions of Shallow Water Equations with a TVD Scheme

이종욱[*] / 조용식[**]/서 아[***]

1. 서 론

일반적으로 2차 이상의 정확도를 갖는 수치기법은 불연속면에서 수치진동이 발생하게 된다. 이러한 수치진동을 제거하기 위한 방법으로는 인공점성(artificial viscosity)을 이용하는 방법(Younus 등, 1994; Molls 등, 1995)과 TVD(Total Variation Diminishing)조건을 만족시키는 제한자(limiter)를 이용하는 방법(Jha 등, 1995; Fraccarollo와 Toro, 1995; 김원, 1999)으로 나눌 수 있다. 인공점성을 증가시키는 것은 진동과 발산을 억제하여 계산의 안정성을 높일 수는 있으나 과도하게 큰 계수의 사용은 전체적인 해에 영향을 미치므로 사용에 신중해야 한다. 그러나 TVD조건을 만족하는 제한자를 이용하는 방법은 TVD기법의 특성인 단조성을 포함하고 있으므로 인공점성의 사용 없이도 불연속면에서 물리적으로 타당한 결과를 얻을 수 있다.

지배방정식이 선형 이송방정식인 경우에는 1개의 전파속도 또는 특성곡선(characteristic line)을 가지며 상수이지만 천수방정식은 3개의 전파속도를 가지며 이들 전파속도는 매 시간단계마다 계산되어야 할 미지수이다. 따라서 천수방정식과 같은 비선형방정식을 풍상차분기법으로 해석하기 위해서는 개략 Riemann 해를 통해 구간 평균값(piece-wise constant data)을 구해야 한다.

본 연구에서는 HLLC기법으로 Riemann 해를 계산하였으며, 1차 정확도를 갖는 단점을 보완하기 위해 시간과 공간에 대한 2차 정확도의 WAF(Weighted Averaged Flux)기법과 SUPERBEE형 흐름률 제한자(flux limiter)를 이용한 TVD기법을 천수방정식에 적용하였다.

2. 지배방정식

2.1 천수방정식

2차원 천수방정식은 Reynold방정식을 수심방향으로 적분함으로서 얻을 수 있다. 수심적분을 하기 위하여 정수압분포의 가정을 도입하고 바람에 의한 응력과 전향력의 항을 무시하면 식 (1)의 천수방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}=\frac{\partial \boldsymbol{E}_v}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_v}{\partial y}-\boldsymbol{G} \tag{1}$$

---

* 정회원, 한양대학교 토목공학과 인턴연구원

** 정회원, 한양대학교 토목공학과 조교수

*** 정회원, 한양대학교 토목공학과 연구원

여기서 $\boldsymbol{Q}$는 미지행렬, $\boldsymbol{E}$와 $\boldsymbol{F}$는 비점성 흐름률(inviscid flux), $\boldsymbol{E}_v$와 $\boldsymbol{F}_v$는 점성 흐름률(viscous flux), $\boldsymbol{G}$는 바닥마찰항(S_{fi})과 하상의 변화(S_{oi})를 나타내며 다음과 같다.

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} hu \\ hu^2+gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2+gh^2/2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_v=\nu_t\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial x} \\ \frac{\partial(hv)}{\partial x} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}_v=\nu_t\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial y} \\ \frac{\partial(hv)}{\partial y} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{fx}-S_{ox}) \\ gh(S_{fy}-S_{oy}) \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$S_{fx}=\frac{n^2u\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}},\quad S_{fy}=\frac{n^2v\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}},\quad S_{ox}=-\frac{\partial z_b}{\partial x},\quad S_{oy}=-\frac{\partial z_b}{\partial y}$$

2.2 유한차분식

지배방정식인 식 (1)의 시간미분항과 비점성 흐름률을 양해적으로 표현하면 식 (3)과 같다.

$$\boldsymbol{Q}^{n+1}_{i,j}=\boldsymbol{Q}^{n}_{i,j}-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{E}^{f}_{i+1/2,j}-\boldsymbol{E}^{f}_{i-1/2,j})-\frac{\Delta t}{\Delta y}(\boldsymbol{F}^{f}_{i,j+1/2}-\boldsymbol{F}^{f}_{i,j-1/2}) \tag{3}$$

여기서 $\boldsymbol{E}^f$, $\boldsymbol{F}^f$는 수치흐름률이며 본 연구에서는 개략 Riemann 해 중 하나인 HLLC기법으로 구간 평균값을 계산한 후 SUPERBEE형 제한자를 이용해 TVD조건에 만족하도록 하였으며 이는 제3장에 기술하였다.

점성 흐름률 행렬은 자체에 미분항을 포함하고 있으므로 2계 미분에 해당하며 식 (4)를 이용하면 쉽게 차분식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(L\frac{\partial M}{\partial x}\right)=\frac{1}{2(\Delta x)^2}\{(\delta^+_x L)M_{i+1,j}-(\delta_x L)M_{i,j}+(\delta^-_x L)M_{i-1,j}\} \tag{4}$$

여기서 $\delta^+_x L=L_{i+1,j}+L_{i,j}$, $\delta_x L=L_{i+1,j}+2L_{i,j}+L_{i-1,j}$, $\delta^-_x L=L_{i,j}+L_{i-1,j}$ 이다.

3. WAF(Weighted Average Flux)형 TVD기법

WAF기법에 의한 수치흐름률은 $-\Delta x/2\sim\Delta x/2$의 구간에서 흐름률을 적분함으로서 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{E}^{WAF}_{i+1/2,j}=\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Q}_{i+1/2,j}(x,\Delta t/2))\,dx \tag{5}$$

그림 1에서 같이 $-\Delta x/2\sim\Delta x/2$의 구간은 4개의 구간 평균값으로 나타낼 수 있으므로 식 (5)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{E}^{WAF}_{i+1/2,j}=\sum_{k=1}^{4}\beta_k\boldsymbol{E}^{(k)}_{i+1/2,j} \tag{6}$$

여기서 $\boldsymbol{E}^{(k)}_{i+1/2,j}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Q}^{(k)}_{i+1/2})$로서 HLLC기법의 구간 평균값을 사용할 수 있으며 β_k는 무차원 거리로서 식 (7)과 같다.

$$\beta_k=\frac{A_k-A_{k-1}}{\Delta x}=\frac{1}{2}(c_k-c_{k-1}) \tag{7}$$

식 (7)에서 c_k는 전파속도 S_k에 대한 Courant 수로서 $\Delta t S_k / \Delta x$이고 $c_0 = -1$, $c_4 = 1$이다. 따라서, 식 (7)을 식 (6)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{E}^{WAF}_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{i,j} + \boldsymbol{E}_{i-1,j}) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} c_k \Delta \boldsymbol{E}^{(k)}_{i+1/2,j} \tag{8}$$

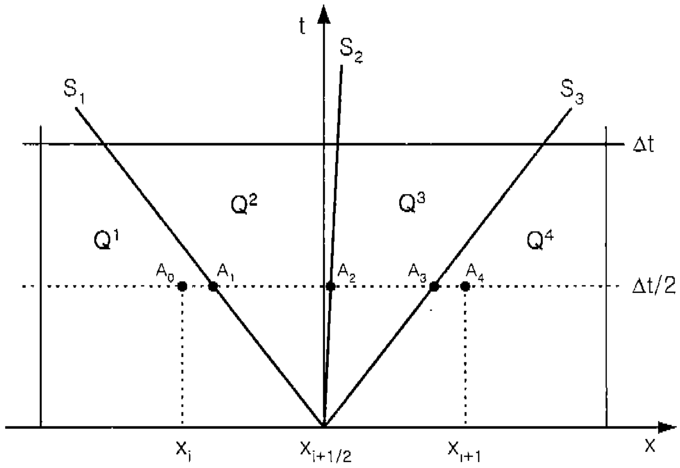


그림 1. WAF기법의 수치흐름률

여기서 $\Delta \boldsymbol{E}^{(k)}_{i+1/2,j} = \boldsymbol{E}^{(k+1)}_{i+1/2,j} - \boldsymbol{E}^{(k)}_{i+1/2,j}$이다. 그러나 일반적인 2차 이상의 정확도를 갖는 수치기법은 불연속면 인근에서 수치진동이 발생하게 되며 이를 없애기 위해 TVD조건의 흐름률 제한자를 이용할 수 있다.

선형 이송방정식은 1개의 전파속도를 가지므로 강력한 TVD조건을 만족시킬 수 있으나 본 연구의 지배방정식인 천수방정식은 3개의 전파속도를 갖는 비선형방정식이다. 그러므로 각각의 전파속도에 따른 단일 물리량 q의 변화량을 조사함으로써 TVD조건을 적용할 수 있으며, 매 계산 격자마다 3개의 제한자 함수가 필요하게 된다. Euler방정식의 경우, Toro(1999)는 q를 밀도나 내부에너지를 선택할 수 있다고 밝힌 바 있으나 천수방정식의 경우 수심 h를 선택해야 한다. 식 (8)을 흐름률 제한자를 이용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{E}^{TVD}_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{i,j} + \boldsymbol{E}_{i+1,j}) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} sign(c_k)\,\phi^{(k)}_{i+1/2,j}\,\Delta \boldsymbol{E}^{(k)}_{i+1/2,j} \tag{8}$$

여기서 $\phi^{(k)}_{i+1/2,j}$는 흐름률 제한자이며 여러 가지 종류가 있으나 본 연구에서는 SUPERBEE형 제한자를 사용하였으며 이는 식 (9)와 같다.

$$\phi_{sa}(r, c) = \begin{cases} 1 & , \text{ for } \quad r \le 0 \\ 1-2(1-|c|)r & , \text{ for } \quad 0 \le r \le \frac{1}{2} \\ |c| & , \text{ for } \quad \frac{1}{2} \le r \le 1 \\ 1-(1-|c|)r & , \text{ for } \quad 1 \le r \le 2 \\ 2|c|-1 & , \text{ for } \quad r \ge 2 \end{cases} \tag{9}$$

여기서 r은 k번째 파의 전파속도에 따라 변화하는 h의 양에 의해 결정되며 상류 변동량(upwind change, Δupwind)과 국부 변동량(local change, Δlocal)의 비로 표현된다.

$$\gamma = \frac{\Delta \text{upwind}}{\Delta \text{local}} = \begin{cases} \dfrac{\Delta h_{i-1/2,j}^{(k)}}{\Delta h_{i+1/2,j}^{(k)}} \quad , \text{ for } c_k > 0 \\ \dfrac{\Delta h_{i+3/2,j}^{(k)}}{\Delta h_{i+1/2,j}^{(k)}} \quad , \text{ for } c_k < 0 \end{cases} \tag{10}$$

여기서 $\Delta h_{i-1/2,j}^{(k)} = h_{i,j}^{(k)} - h_{i-1,j}^{(k)}$이다.

식 (8)는 x방향의 수치흐름률이며, y방향의 수치흐름률도 쉽게 구할 수 있다. 이렇게 구한 수치흐름률을 식 (3)에 대입하면 2차 정확도를 갖는 TVD형 수치모형을 구성할 수 있다.

4. 수치모형의 적용

4.1 댐 붕괴파의 전파

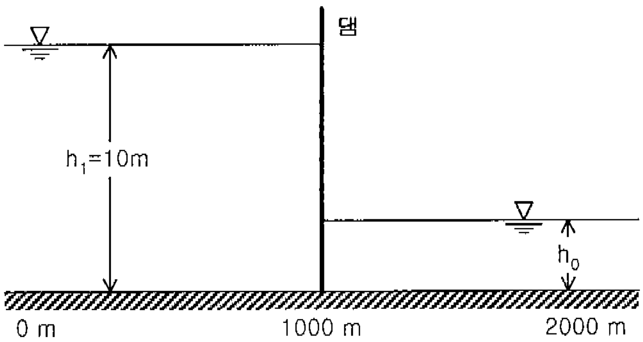


그림 2. 댐 붕괴파의 초기조건

제3장에서 개발된 수치모형의 적용성을 검토하기 위해 Jha 등(1995)과 김원(1999) 등이 사용한 댐 붕괴파의 전파를 해석하였다. 그림 2는 바닥마찰이 없는 가상하도(2000m ×20m)에서의 초기조건을 나타내며 댐 하류의 수심 h_0는 5m, 0.05m와 0.005m의 경우에 대해 모의하였다. 수치해석에 사용된 계수는 Δx=4m, Δy=2m, Δt=0.2sec이며 n=0.0, ν_t=0.0이다.

그림 3은 h_1/h_0=0.05의 경우, 3차원 수위분포를 도시한 것이며 그림 4~그림 6은 댐 붕괴 60초 후를 해석해와 함께 수치해를 도시한 것이다. 해석해는 Stoker(1957) 및 김원(1999)에서 찾을 수 있으며, 수치해는 개략 Riemann 해인 HLLC기법과 이 기법을 WAF형 TVD조건에 적용시킨 방법 및 김원(1999) 등 3가지이다. 그림 4는 h_1/h_0=0.5인 경우의 홍수파 전파를 나타낸 것으로 상류(subcritical flow)와 사류(supercritical flow)가 교차하는 천이흐름이 발생되지는 않았다. 전 구간에 걸쳐 김원(1999)의 연구결과보다는 HLLC기법과 TVD기법이 개선된 결과를 보이고 있다. 특히 TVD기법은 홍수파의 선단에서 발생하는 약간의 불일치를 제외하고는 해석해와 거의 일치하고 있어 그 정확성이 탁월하다고 할 수 있다. 이는 본 연구가 풍상차분기법을 기반으로하는 개략 Riemann 해에 기반을 두고 있는 반면, 김원(1999)의 ENO기법은 대표적인 중앙차분기법인 Beam-Warming기법에 기반을 두고 있는 방법이기 때문인 것으로 판단된다.

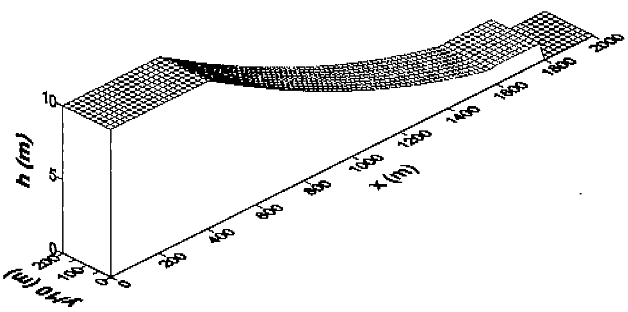


그림 3. 3차원 수위분포도(h_1/h_0=0.005)

그림 5~그림 6은 초기하류의 수위가 0.05m와 0.005m인 경우로서 그림 4와는 달리 흐름사이에서 강한 충격파가 발생한다. 이 경우에도 TVD기법이 홍수파의 선단 등을 거의 유사하게 모의하였으나 약간의 수치진동이 관찰되었다.

6. 결론

본 연구에서는 풍상차분기법에 기반한 2차 정확도의 WAF기법을 이용하여 수심평균된 2차원 천수방정식의 수치모형을 개발하였으며 도수와 댐 붕괴파와 같은 급변류의 흐름에서 발생하는 수치진동을 억제하기 위해 TVD기법을 적용하였다. 개발된 수치모형의 적용성을 검증하기 위해 해석해가 존재하는 가상하도의 댐 붕괴파를 모의하였으며 두 경우 모두 HLLC기법에 비해 TVD기법이 해석해에 가까운 결과를 계산하였다. TVD기법에서 Froude수가 아주 크게 되면 미소한 진동이 발생하였으나 전체적인 해에는 영향을 미치지 않는 아주 작은 값이므로 실제 문제의 적용에는 큰 무리가 없을 것으로 판단된다. 풍상차분기법에 기반을 둔 본 연구는 Riemann 해를 계산해야 함으로 프로그램 작성이 다소 복잡해지기는 하나 Beam-Warming기법에 기반을 두고 있는 김원(1999)의 연구에 비해 정확한 값을 예측하였다.

참고문헌

김원 (1999). 고정확도 수치기법을 이용한 하천 천이류 해석모형의 개발. 박사학위논문, 경북대학교.

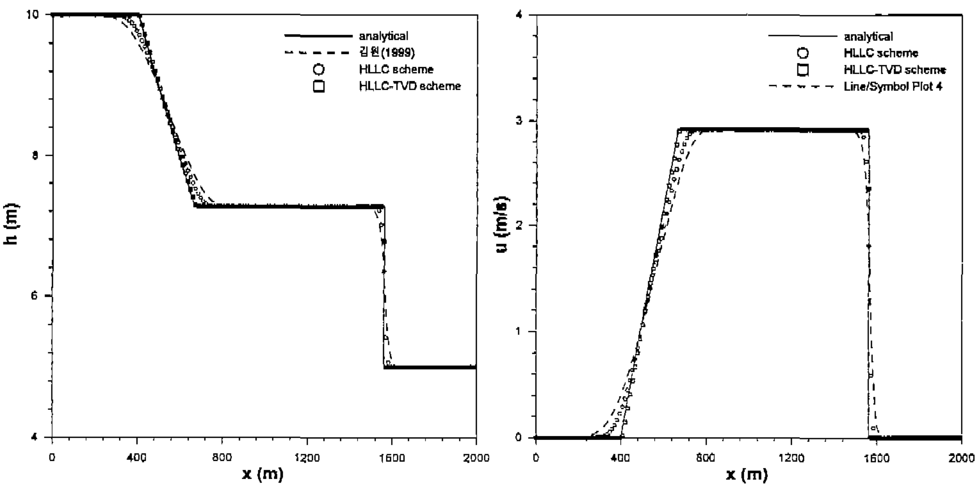
Fraccarollo, L and Toro, E.F. (1995). "Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, pp. 843-864.

Jha, A.K., Akiyama, J., and Ura, M. (1995). "First and second-order flux difference splitting schemes." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 121, pp. 877-884.

Molls, T. and Chaudhry, M.H. (1995). "Depth-averaged open-channel flow model." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 121, pp. 453-465.

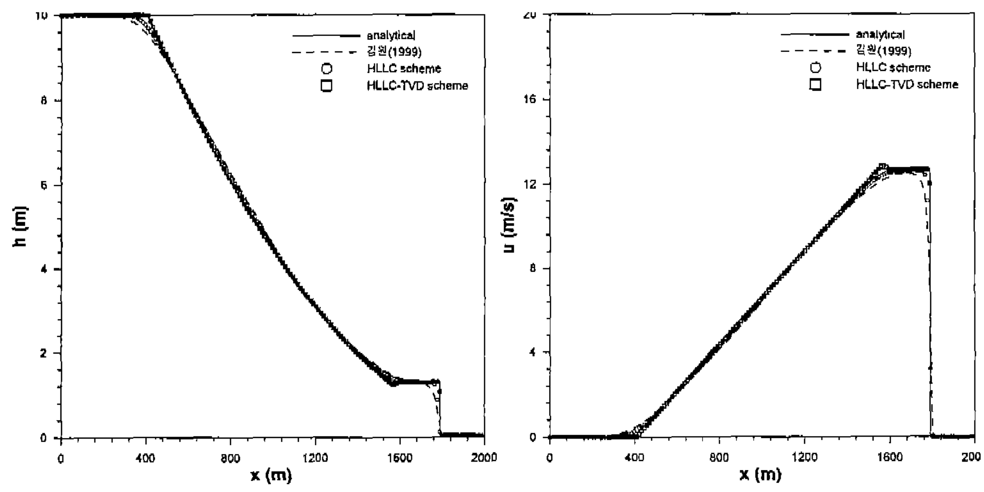
Toro, E.F. (1999). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer.

Younus, M. and Chaudhry, M.H. (1994). "A depth-averaged k-ε turbulence model for the computation of free-surface flow." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 32, pp. 415-444.



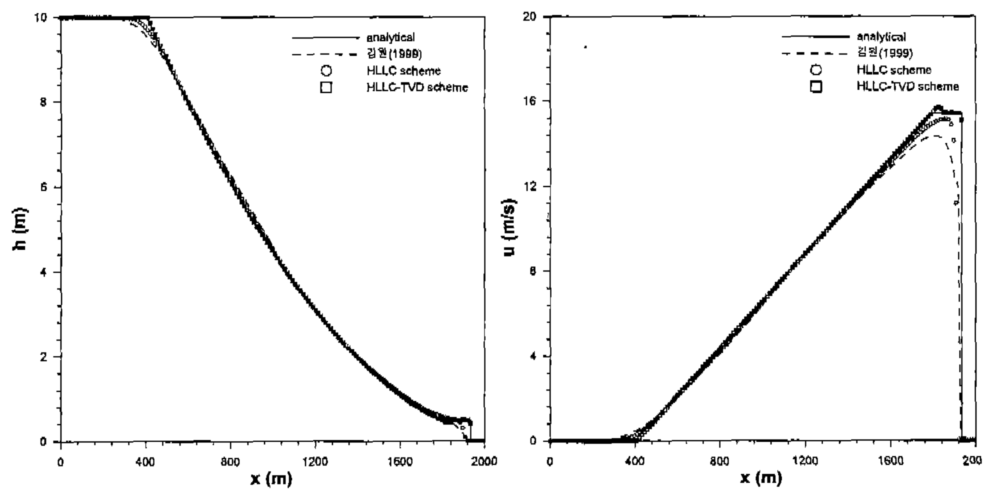
(a) 수위 (b) 유속

그림 4. h_1/h_0=0.5인 경우 댐 붕괴파의 전파



(a) 수위 (b) 유속

그림 5. h_1/h_0=0.005인 경우 댐 붕괴파의 전파



(a) 수위 (b) 유속

그림 6. h_1/h_0=0.0005인 경우 댐 붕괴파의 전파