

$k-\epsilon$ 난류모형을 이용한 점화 부유사밀도류의 수치해석
Numerical Simulation of Igniting Turbidity Current by
 $k-\epsilon$ Turbulence Model

최성욱* · 강형식**

1. 서론

부유사밀도류는 유사에 의한 하층 밀도류로서 중력에 의해서 경사진 방향으로 발생하는 흐름이다. 부유사로 인하여 주변의 수체보다 무거워진 밀도류는 중력에 의해 하류로 이동할때 경계면인 바닥과 유사를 주고 받으면서 상호작용을 한다. 이때 밀도류가 발생시키는 전단응력에 의한 유사유입률 (sediment entrainment rate)이 중력에 의한 유사의 퇴적률 (sediment deposition rate)보다 클 경우 부유사밀도류는 바닥의 유사입자를 밀도류로 더 많이 유입시키므로 부력흐름률 (buoyancy flux)이 증가하게 된다. 이렇게 증가된 부력흐름률에 의해 부유사밀도류 자체의 무게가 더욱 더 커지게 되어 가속하게 되고, 이것은 다시 유사유입을 촉진시켜 자기가속순환계 (self acceleration cycle)를 형성한다. Parker (1982)은 이와 같은 상태의 부유사밀도류를 점화 (ignition) 되었다고 명명하였다. 반대로 유사유입률이 퇴적률보다 작은 경우에는 부력흐름률이 점차 감소되어 궁극적으로 부유사밀도류는 소멸하게 된다.

본 연구에서는 난류모형을 사용하여 경사면에서 점화되는 부유사밀도류를 수치모의 하였다. 이를 위해서 레이놀즈 방정식에 경계층 근사를 적용한 포물선 형태의 편미분방정식을 수치해석하였고 난류완결식으로는 $k-\epsilon$ 모형을 이용하였다. 개발된 수치모형을 이용하여 이차원적으로 점화되는 부유사밀도류의 유속과 체적농도, 그리고 난류량의 수직구조를 파악하였다.

2. 지배방정식

레이놀즈 방정식과 부유사의 질량보존 방정식에 Boussinesq 근사와 경계층 근사를 적용하면, 다음과 같은 연속방정식과 운동량 방정식, 그리고 부유사 보존방정식을 유도할 수 있다.

* 연세대학교 사회환경·건축공학부 부교수 (E-mail: schoi@yonsei.ac.kr)

** 연세대학교 대학원 토목공학과 박사과정 (E-mail: kanghs@yonsei.ac.kr)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(u\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(w\rho u)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} \right] + \rho g' \sin \theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial(u c)}{\partial x} + \frac{\partial(w c)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_c \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (3)$$

여기서 u 와 w 는 각각 시간평균된 x -와 z -방향으로의 유속 성분이고, c 는 시간평균된 부유사의 체적농도이다. 또한 ρ 는 유체 밀도, ν 는 유체의 동점성계수, ν_t 는 난류점성계수, Γ_c 는 난류확산계수, 그리고 g' 은 유효 중력가속도로서 체적농도로 표현하면 gRc 이다 (여기서 R 은 입자의 수중단위중량이다). 식(2)와 식(3)은 난류점성 개념 ($-\overline{u'w'} = \nu_t \cdot \partial u / \partial z$)과 난류확산 개념 ($-\overline{w'c} = \Gamma_c \cdot \partial c / \partial z$)을 이용하여 유도된다. 난류확산 개념에서 난류확산계수 (Γ_c)는 Prandtl/Schmidt 수 (σ_c)와 난류점성계수에 의해 $\Gamma_c = \nu_t / \sigma_c$ 로 나타낼 수 있으며, 난류점성계수는 Prandtl-Kolmogorov 식 ($\nu_t = c_\mu \cdot k^2 / \varepsilon$)으로부터 구할 수 있다. 수치계산에서 $\sigma_c = 1$ 을 사용하여 난류에 의한 부유사의 확산과 운동량의 확산이 동일한 정도임을 가정하였다.

본 연구에서는 지배방정식의 완결문제 (closure problem)를 해결하기 위하여 2-방정식 난류모형인 $k-\varepsilon$ 모형을 사용하였다. 즉 Prandtl-Kolmogorov 식에서 난류점성계수를 산정하기 위해서 다음과 같은 난류운동에너지 (k)와 난류운동에너지 소산률 (ε)의 수송방정식을 해석하였다.

$$\frac{\partial(uk)}{\partial x} + \frac{\partial(wk)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P + G - \varepsilon \quad (4)$$

$$\frac{\partial(u\varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(w\varepsilon)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (P + c_{3\varepsilon} G) - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5)$$

여기서 σ_k , σ_ε , $c_{1\varepsilon}$, $c_{2\varepsilon}$, 그리고 $c_{3\varepsilon}$ 는 난류 상수를 나타낸다. 계산에 사용된 난류 상수의 값은 Launder와 Spalding (1974)이 제시한 표준값을 사용하였다. 또한 식(5)에서 $c_{3\varepsilon}$ 은 난류운동에너지 소산률 방정식에서 생성에 기여하는 정도를 조절하는 항으로서 다른 경험상수에 비해 불확실성이 많이 있다. Fukushima와 Hayakawa (1990)는 $c_{3\varepsilon}$ 의 값이 0.0-0.4의 범위에 있을 경우 수치해와 실험결과가 잘 일치하는 것을 보였다. Choi와 Garcia (2001)는 보존성 밀도류의 경우 $k-\varepsilon$ 모형에 근거한 수직구조 모형에서 $c_{3\varepsilon} = 0.3$ 의 값을 사용할 때 적분 모형에 의해 모의된 결과와 일치함을 발견하였다. 본 연구에서는 점화되는 부유사밀도류의 수치모의를 위하여 Choi와 Garcia (2001)가 제시한 $c_{3\varepsilon} = 0.3$ 을 사용하였다. 식(4)와 식(5)에서 난류에너지 생성항을 나타내는 P 와 부력 생성항인 G 는 각각 다음과 같다.

$$P = \nu_t \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (6)$$

$$G = \beta g \frac{\nu_t}{\sigma_c} \frac{\partial c}{\partial z} \quad (7)$$

여기서 β 는 부유사밀도류의 체적팽창계수로서 계산에 사용된 값은 1.65이다. 본 연구에서는 PROBE (Svensson, 1998)를 사용하여 위의 지배방정식을 유한체적법에 의해 수치해석 하였다.

3. 경계조건

개수로 바닥에 대한 경계조건으로는 바닥으로부터의 무차원거리 $z^+ (\equiv u_* z / \nu) = 11.5$ 를 기준으로 점성저층과 대수영역으로 구분하는 2층 벽법칙을 이용하였다. 한편 유사 체적농도에 대한 바닥 경계조건으로는 다음과 같은 바닥 경계조건을 적용하여 바닥으로부터의 유사유입을 고려하였다.

$$\frac{\nu_t}{\sigma_c} \frac{\partial c}{\partial z} = -e_s \quad (8)$$

여기서 e_s 는 무차원의 유사유입률을 나타내며, Garcia와 Parker (1993)는 부유사밀도류의 유사유입률에 대해 아래의 식을 제시하였다.

$$e_s = \frac{a Z_u^5}{1 + \frac{a}{0.3} Z_u^5} \quad (9)$$

여기서 a 는 상수로서 1.3×10^{-7} 이며 유사변수 (similarity variable)인 Z_u 는 다음과 같이 정의된다.

$$Z_u = \frac{u_*}{v_s} f(Re_p) \quad (10)$$

식(10)에서 v_s 는 유사 입자의 침강속도이고, $Re_p = [(gRD_s)^{1/2} D_s / \nu]$ 는 입자 레이놀즈수, 그리고 D_s 는 유사 입자의 지름을 나타낸다. Garcia와 Parker는 식(10)의 함수 f 를 다음과 같이 제시하고 있다.

$$\begin{aligned} f &= Re_p^{0.6} & \text{for } 3.5 \leq Re_p \\ f &= 0.586 Re_p^{1.23} & \text{for } 1.0 \leq Re_p \leq 3.5 \end{aligned} \quad (11a,b)$$

일반적으로 자유수면에서는 자유수면의 영향으로 인하여 난류의 특성길이가 감소한다 (Rodi, 1993). 그러나 본 연구에서는 자유수면의 영향이 밀도류의 거동에 특별한 영향을 주지 않으므로 법선경사가 영이라는 대칭평면조건 ($\partial u / \partial z = \partial k / \partial z = \partial \epsilon / \partial z = \partial c / \partial z = 0$)을 사용하였다. 유입부에서의 경계조건으로는 포물선 형태의 속도분포와 삼각형 형태의 부유사 농도분포를 적용하였다. 또한 난류운동에너지와 난류운동에너지 소산률에 관한 경계조건으로는 Ferziger와 Peric (1996)이 제시한 값, $k_0 = 10^{-4} U_0^2$ 와 $\epsilon_0 = 10 k_0^{3/2} / h_m$ 을 적용하였다 (여기서 h_m 은 유입부의 높이이고 U_0 는 유입부에서의 적분 유속이다).

4. 수치모의

점화되는 부유사밀도류를 수치모의하기 위하여 높이가 0.12 m인 유입부에서 방류되는 밀도류를 가정하였다. 유입부에서의 속도 분포는 최대값이 0.08 m/s이며 상하대칭인 포물선 형태로 하였고, 체적농도의 분포는 바닥에서의 최대값이 0.016인 삼각형 분포로 가정하였다. 이러한 조건을 사용하여 유입부에서 밀도류의 총두께를 계산하면 $h_0 = 0.1$ m이며, 적분된 유속과 체적농도는 각각 $U_0 = 0.065$ m/s와 $C_0 = 0.008$ 이다. 이에 따른 레이놀즈 수는 6,500으로 충분히 난류 상태임을 알 수 있다. 또한 바닥의 경사와 하상토의 입경은 각각 $\theta = 5^\circ$ 와 $D_s = 20 \mu$ 로 가정하였다.

그림 1은 경사면을 따라 점화되는 부유사밀도류의 유속 벡터 그림이다. 그림에서 밀도류가 경사진 방향으로 진행할수록 유속이 증가하며 깊이 방향으로도 그 영역이 확장되는 것을 알 수 있다. 또한 그림 2는 동일한 조건하에서 계산된 부유사밀도류의 체적농도를 도시한 것이다. 밀도류가 경사면을 따라 진행하면서 깊이 방향으로 동일한 농도층이 확대되는 것을 확인할 수 있다. 이것은 밀도류가 바닥의 세립토를 유입시켜 전체 부력흐름률이 증가되기 때문이며 유속 구조와도 밀접한 관련을 갖는다. 점화되는 부유사밀도류의 이러한 현상은 입자를 퇴적시키면서 하류 방향으로 감속하는 밀도류 (decelerating and depositing turbidity current)와 대비되는 특성이다.

그림 3은 점화되는 부유사밀도류의 수직구조에 관한 유사성 (similarity collapse)을 살펴보기 위한 그림이다. 그림에서 (a)-(d)는 각각 x -방향의 유속, 체적농도, 난류운동에너지, 그리고 난류점성계수의 분포를 나타낸다. 좌표축을 무차원으로 표현하기 위하여, 가로축은 변수의 적분값을 그리고 세로축은 적분모형에서 정의되는 밀도류의 총두께로 각각 나누어주었다. 그림에서 U , C , K , 그리고 N_t 는 각각 수직방향으로 적분된 유속, 체적농도, 난류운동에너지, 그리고 난류점성계수를 나타낸다. 점화되는 밀도류의 경우에도 계산된 수직구조가 전반적으로 유사함을 알 수 있다. 그러나 감속하는 밀도류에 비해서 유사성이 약하게 나타나는데 (Choi와 Garcia, 2001), 이것은 점화현상에 따른 흐름의 불안정성에 기인되는 것으로 판단된다. 따라서 점화되는 부유사밀도류의 수치모의를 위해 적분모형을 사용할 경우 모형 자체가 수직 구조의 유사성을 가정하여 확립된 모형이라는 사실에 유의하여야 할 것이다.

그림 3에서 주목할 만한 사항은 유속의 최대값이 상당히 바닥에 가까운 지점에서 발생하는 것과 이 지점에서 난류운동에너지의 값이 매우 작다는 점이다. 전자는 실험에 의한 측정치와의 비교·검토를 통하여 계산 결과가 타당한 것으로 밝혀졌지만 (Choi와 Garcia, 2001), 후자는 난류점성개념을 사용하는 난류모형의 한계로 보인다. 이러한 점을 극복하기 위하여 Eidsvik과 Brors (1989)는 LRR모형 (Lauder 등, 1975)에 근거한 레이놀즈 응력모형을 적용하여 부유사밀도류의 일차원 수직구조를 수치모의 하였으나 크게 개선된 바 없다. 또한 전반적인 유속 분포의 형태를 살펴보면, 감속하는 밀도류의 유속 분포와는 달리 유속의 최대값 부분이 예리하게 나타나는 것을 볼 수 있다. 일반적으로 감속하는 밀도류의 유속분포는 최대값 부분이 둥근 형태를 이루고, 유속의 최대값부터 수심방향으로 거의 직선을 이루며 감소한다. 그림 3(a)와 같은 유속 분포형태는 Eidsvik과 Brors (1989)과 Brors와 Eidsvik (1992)에 의해 계산된 부유사밀도류의 유속분포와 비

슷한 형태를 이루고 있다.

5. 결 론

본 논문은 경사면에서 이차원적으로 점화되는 부유사밀도류의 수치모의에 관한 연구이다. 포물선형태의 수학 모형을 지배방정식으로 하고 $k-\epsilon$ 난류모형을 사용하여 수치모형을 구성하였다. 수치모의를 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

경사면을 따라 점화되는 부유사밀도류의 유속과 체적농도, 난류운동에너지, 난류점성계수에 대한 수직구조의 발달 양상을 모의하였다. 부유사밀도류가 하류방향으로 진행할수록 바닥의 세립토를 유입시켜 밀도류의 체적농도와 유속이 거리에 따라 점차 증가하며 깊이방향으로도 그 영역이 확장되는 것이 모의되었다. 점화되는 부유사밀도류의 유속 분포는 소멸되는 밀도류와 다른 형태를 이루고 있음을 확인하였다. 또한 점화되는 부유사밀도류의 경우에도 소멸되는 밀도류에 비해 그 정도는 약하지만 수직구조가 전반적으로 유사성을 보이는 것을 확인할 수 있었다.

6. 참고 문헌

- Brors, B. and Eidsvik, K.J. (1992). "Dynamic Reynolds stress modeling of turbidity currents." *Journal of Geophysical Research*, AGU, 97(c6), 9645-9652.
- Choi, S.-U. and Garcia, M.H. (2001). " $k-\epsilon$ turbulence modeling of density currents developing on a slope two-dimensionally." submitted to *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE.
- Eidsvik, K.J. and Brors, B. (1989). "Self-accelerated turbidity current prediction based upon ($k-\epsilon$) turbulence." *Continental Shelf Research*, 9(7), 617-627.
- Ferziger, J.H. and Peric, M. (1996). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer Verlag, Berlin, Germany.
- Fukushima, Y. and Hayakawa, N. (1990). "Analysis of inclined wall plume by the $k-\epsilon$ turbulence model." *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 57, 455-465.
- Garcia, M. and Parker, G. (1993). "Experiments on the entrainment of the sediment into suspension by a dense bottom current." *Journal of Geophysical Research*, AGU, 98(c3), 4793-4807.
- Lauder, B.E., Reece, G.J., and Rodi, W. (1975). "Progress in the development of Reynolds stress turbulence closure." *Journal of Fluid Mechanics*, 63(3), 537-566.
- Lauder, B.E. and Spalding, D.B. (1974). "The numerical computation of turbulent flow." *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3, 269-289.
- Parker, G. (1982). "Conditions for the ignition of catastrophically erosive turbidity currents." *Marine Geology*, 46, 307-327.
- Rodi, W. (1993). *Turbulence models and their application in hydraulics: A state of the art*. 3rd Edition, IAHR, Delft, The Netherlands.
- Svensson, U. (1998). *PROBE Program for Boundary Layers in the Environment: System Description and Manual*. The Swedish Meteorological and Hydrological Institute, Norrkoping, Sweden.

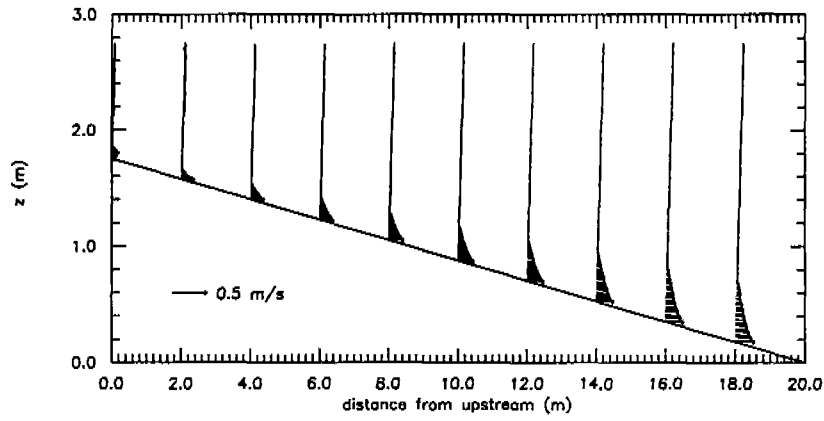


그림 1. 유속벡터

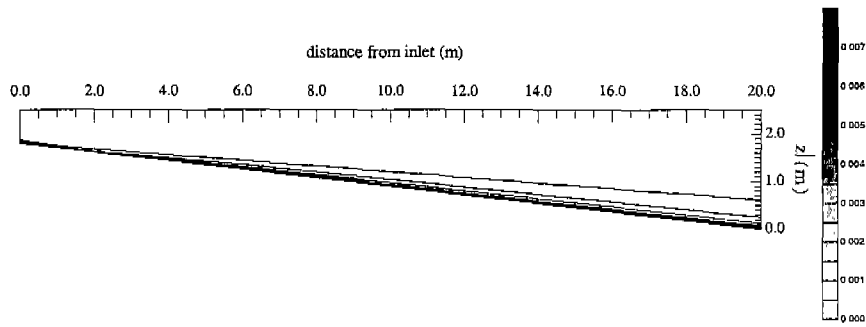


그림 2. 체적농도

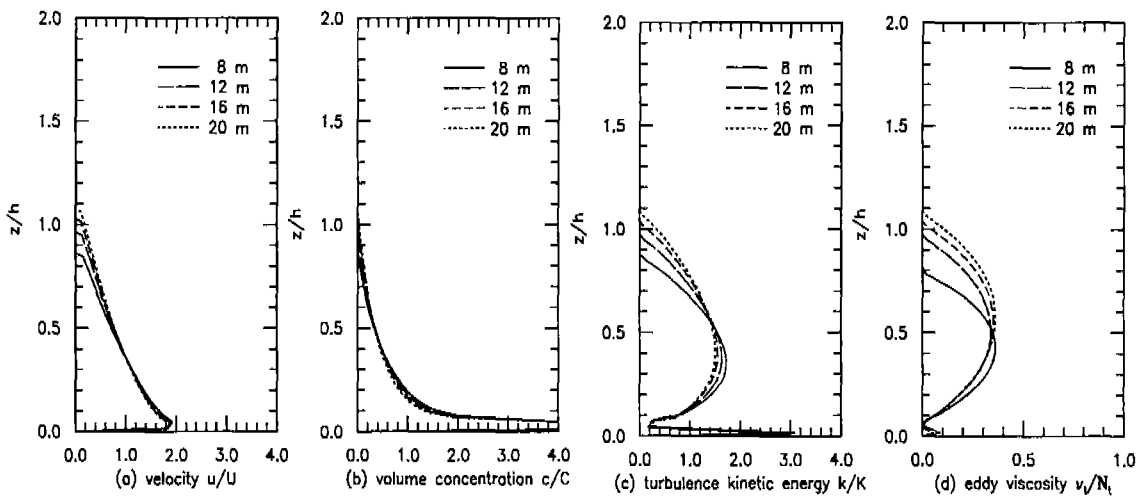


그림 3. 수직구조의 유사성