최적화 기법을 이용한 Nash 모형과 Diskin 모형의 매개변수 추정

An Estimation of the Parameters for Nash Model and Diskin Model by the Optimization Technique

최 민 하[1]/안 재 현[2]/김 중 훈[3]/윤 용 남[4]

1. 서론

강우-유출 과정의 수문학적 요소들을 물리적으로 연관짓기 위해서 수없이 많은 개념적모형(Conceptual Model)이 존재한다. 그 중에서 Nash 모형(1957)은 대표적인 개념적 선형모형으로서 임의의 유역에 대한 수문곡선을 합성하기 위해 유도되었다. 이 모형은 정확한 수학 공식으로 표현되기 때문에 강우-유출과정의 이론적인 성질을 연구하는데 많이 적용되며, 임의 유역의 강우-유출 상호관계를 하나의 선형계로 간주해서 분석된 모형이다. 이에 반해 Diskin 모형(1964)은 두 개의 Nash 모형을 결합하여 저수지의 수나 저류상수를 달리하고 새로운 매개변수를 도입하여 비선형성을 고려하였다.

이와 같은 Nash 모형은 홍수량을 산정하는 간단한 모형이기에 유역의 강우-유출관계를 분석하는데 자주 적용되는데 우리나라의 경우에는 Nash 모형이 간단한 계산으로 비교적 양호한 결과를 얻을 수 있는 장점이 있는데도 불구하고 거의 적용되지 않고 있다. 그 이유는 Nash 모형 매개변수들의 대표치를 쉽게 산정할 수 없으며, 이들 매개변수에 대한 특성이 심층적으로 분석되어 정리된 바가 거의 없기 때문이다. 특히 매개변수들이 홍수사상별로 크게 변화하며, 첨두홍수량이 과다 산정되는 것으로 알려져 있는 우리나라 유역에 대해서는 보다 폭 넓은 검정 없이는 실제 적용에 어려움이 있는 것이 사실이다.

Nash 모형과 관련된 기존의 연구를 살펴보면, 김재형과 윤용남(1986)이 Nash 모형의 매개변수를 $T_L=n\times K$ 의 관계를 이용하여 시행착오적으로 매개변수를 산정한 바 있으며, 고재웅과 서영제(1987)는 논산천 상류유역에 대한 순간단위유량도의 유도를 위해 Nash 모형을 비롯한 선형저수지 모형의 매개변수 산정에 대한 연구를 수행한 바 있다. 박진욱 등(1999)은 Nash 모형과 Diskin 모형을 사용하여 순간단위도를 유도하여 이를 비교한 바 있다.

본 연구에서는 최적화 기법을 이용하여 Nash 모형과 Diskin 모형의 매개변수를 추정하고, 그 적용성을 검토하는 것을 그 목적으로 하였다. 이를 위해 최적화 기법은 유전자 알고리즘(Genetic Algorithm, GA)과 비선형계획법(Non-Linear Programming, NLP)을 사용하였으며, 그에 따른 추정결과를 비교하였다. 본 연구를 위해 이용된 대상유역은 소양강댐 유역이며, 실측 강우-유출 자료를 이용하여 매개변수의 검정 및 검증을 실시하였다.

---

1) 고려대학교 대학원 토목환경공학과 석사과정
2) (주)건일엔지니어링 수자원부 차장
3) 고려대학교 토목환경공학과 부교수
4) 고려대학교 토목환경공학과 교수

2. 유출 모형

2.1 Nash 모형

Nash(1957)는 유역전체가 일련의 n 개 저수지로 구성되어 있고, 각 저수지에 대한 저류량(S)과 유출량(O)의 관계는 $S=KO$와 같이 선형관계를 가진다고 가정하여, n번째 저수지로부터의 유출량, 즉 전 유역으로부터의 유출량을 산정하는 식(1)을 유도하였다.

$$O_n(t)=\frac{1}{K(n-1)!}\left(\frac{t}{K}\right)^{n-1}e^{-t/k} \tag{1}$$

여기서, K는 저수지의 저류상수, n은 저수지의 갯수이다.

식(1)은 유역전반에 내린 단위유효유량(1 cm)을 n개의 저수지를 통해 선형 추적하여 얻은 순간 단위도의 종거(cm/hr)를 계산하는 식이다. 이는 유역면적을 이용하여 유효우량에 면적을 곱하여 유출량의 단위로 바꾼다.

2.2 Diskin 모형

Diskin 모형(Diskin, 1964)은 Nash 모형을 기본으로 하여 개발되었다. 즉, 두 개의 Nash 모형을 병렬로 연결하고 여기에 한 개의 매개변수 α를 추가하여 강우에 따른 유출의 비선형성을 구현한 것이다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$O_n(t)=\frac{\alpha}{K_1(n_1-1)!}\left(\frac{t}{K_1}\right)^{n_1-1}e^{-t/k_1}+\frac{1-\alpha}{K_2(n_2-1)!}\left(\frac{t}{K_2}\right)^{n_2-1}e^{-t/k_2} \tag{2}$$

3. 매개변수 추정법

3.1유전자 알고리즘

Holland(1975)에 의해 처음 소개된 유전자알고리즘(Genatic Algorithm, GA)은 생물의 진화과정, 즉 자연선별과 유전법칙을 모방한 확률적 탐색기법으로서 그 개념과 이론이 단순하고, 해의 탐색 성능이 우수하여 공학, 자연과학 분야쪽에서 활발히 적용되고 있으며, 최근 들어 국내의 수자원관련 분야에서도 유전자 알고리즘의 이론과 응용에 관하여 활발한 연구가 이루어지고 있다(성기원, 1998; 박영수 등, 1999).

유전자 알고리즘의 가장 큰 특징은 뉴톤법(newton-raphson)과 같은 고전적 최적화기법이나 타부서치(taboo search), 시뮬레이트드 어닐링(simulated annealing)과 같은 이웃해 탐색기법이 하나의 해를 운용하는 데 반하여, 유전자 알고리즘은 복수 개의 잠재해들로 이루어진 해의 집단(population)를 진행시키면서 해 공간을 탐색해 간다.

특히, 유전자 알고리즘은 복잡한 해 공간의 탐색성능이 우수하여 변수와 제약이 많은 대형 수리문제를 푸는 데 적합한 기법이고, 또한 모형에 대한 유연성이 높아 제약 첨가나 목적함수의 변경이 용이하다는 장점을 갖는다.

3.2 비선형계획법

현실적인 문제는 비선형인 경우가 많이 있는데, 이를 제약조건 및 목적함수가 일차식인 선형계획법으로 해결하기에는 무리가 발생하며, 경우에 따라서는 전역해와는 현저하게 다른 해가 구해지

는 경우도 생긴다. 따라서 이러한 한계성으로 인해 비선형계획법(Non-Linear Plannig, NLP)은 다양한 문제의 형태에 맞추어 개발되어 왔으며 크게 구분하면 제약조건이 없는 경우의 최적화와 제약조건이 있는 최적화의 경우로 나눌 수 있다.

본 연구에서는 제약조건이 없는 최적화 기법에서 가장 효율적인 방법으로서 변수의 최적해를 직접탐색방법(direct search)으로 탐색하는 기법인 Davidon-Fletcher-Powell(DFP) 방법을 사용하여 비선형계획법을 해석하였다.

DFP는 변수의 $X=(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots)^T$에 제약이 없는 경우, 특히 변수의 수가 큰 경우에 효율적으로 이용할 수 있는 최적화 기법이다. 여기서, T는 전치행렬을 나타낸다.

DFP에서는 평가기준치(목적함수) $F(x)$만을 이용해서 매개변수의 최적치를 탐색하며, 그 경사 $\partial F/\partial X_1$을 이용하지 않으면서 목적함수의 조건을 만족시키는 매개변수의 최적치를 탐색한다

4. 적용결과

4.1 대상 유역 및 자료

본 연구는 소양강댐 유역을 대상유역으로 하였다. 소양강댐은 우리나라의 대표적인 다목적 댐으로서 수도권과 한강유역의 이수뿐만 아니라 치수기능에도 큰 역할을 담당하고 있는 중요한 댐으로서, 댐 상류의 유역면적은 2,703㎢이며 유로연장은 154.4㎞이다. 소양강댐은 위치 상으로 춘천시에서 동북방향으로 약 13㎞지점 떨어진 강원도 춘천시 동면과 신북면을 잇는 지점에 있으며, 하천상으로는 북한강의 제 1지류인 소양강의 하구에서부터 상류로 약 12㎞지점에 위치하고 있다. 본 연구에서는 한국수자원공사(1996)에서 관리하는 홍수 시 소양강댐의 시간별 강우-유출 자료를 이용하였으며, 이 중에서 자료의 상태가 양호한 8개의 강우-유출사상을 선택하였다.

선택된 원래의 강우자료에서 HEC-1 프로그램을 이용하여 강우 손실량을 계산하였으며, 이를 배제시킨 유효강우강도를 입력자료로 사용하였다. 이때 사용된 자료는 소양강댐 지점의 관측 유입수문곡선이며, 기저유량은 Φ지수법으로 분리하였다.

4.2 목적함수

본 연구에서는 최적화 기법인 유전자 알고리즘과 NLP로 계산된 유출수문곡선과 관측된 유출수문곡선과의 오차를 최소화하는 목적함수를 식(3)과 같이 정의하였으며 유출수문곡선을 잘 재현하기 위해서는 목적함수(Objective function) $f(x)$의 값을 최소화시켜야 한다.

$$Minimize \quad f(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(QOBS_i-QCOMP_i)^2\times WT_i/n} \tag{3}$$

여기서, $QCOMP_i$는 시간 i에서의 계산 유출수문곡선의 종거, $QOBS_i$는 관측된 유출수문곡선의 종거, n은 수문곡선의 종거수, WT_i는 평균유량을 초과하는 유량에 대한 정확도를 높이기 위한 가중치이다.

4.3 유전자 알고리즘과 비선형계획법을 이용한 매개변수의 추정

유전자 알고리즘으로 추정한 n, K값을 이용하여 소양강댐 지점의 대표호우사상의 유효우량 자료와 소양강댐 유역의 면적을 곱하여 유출수문곡선을 작성하였다. 이때 순간단위도의 종거는 30시간으로 하였으며 적용한 유전자 알고리즘의 연산자 값은 한 세대의 모집단 수를 10개에서 100개

로 변화시켜 입력했으며, 선택방법은 확률바퀴(roulette wheel)을 사용하였다. 교차는 일점교차(simple point crossover)를 사용하였으며, 교차율은 0.25-0.6로 변화시키면서 입력하였다. 또한, 돌연변이률은 0.01-0.1로 변화시켜 입력하였으며, 유전자 연산자의 값은 가장 좋은 결과를 가져오는 것을 택하여 계산된 유출수문곡선과 관측된 유입수문곡선에서 기저유량을 분리한 직접 유출수문곡선사이의 목적함수 $f(x)$를 최소화하였다. 또한, 비선형계획법의 경우는 위와 동일한 방법으로 Davidon-Fletcher-Powel(DFP)기법을 적용하여 $f(x)$를 구하였다.

Nash 모형의 경우 대체로 $n=2$, $K=5$에서 최적값에 도달하였으며, GA를 사용하여 구한 $f(x)$값은 NLP의 $f(x)$값과 비교해볼 때 3번 호우사상과 6번 호우사상의 $f(x)$값은 두 가지 방법으로 구한 값이 동일하나 그 외의 사상에서는 GA로 구한 $f(x)$값이 NLP로 구한 $f(x)$값보다 약간 작은 것으로 나타났다. 특히, 4번 호우사상과 8번 호우사상의 경우 NLP로 구한 $f(x)$값이 GA로 구한 $f(x)$값보다 매우 크게 산정되었다. 이는 지역해에 빠져 전역해에 도달하지 못하는 것으로 사료되며, NLP로 $f(x)$를 구할 경우 초기값에 영향을 많이 받는 것으로 판단되었다. 또한 저수지 수와 유역의 저류상수를 곱한 값인 $n \times K = T_L$은 GA와 NLP로 구한 값이 각각 11.0525와 11.3373으로 산정되었다.

표 1. Nash 모형의 매개변수 추정결과

호우 사상	호우 기간	$f(x)$		n		K		$n \times K$	
		GA	NLP	GA	NLP	GA	NLP	GA	NLP
1	87년7월21일~24일	163.5874	163.8845	2	2	5.3512	5.4687	10.7024	10.9374
2	87년7월27일~29일	151.1857	152.1206	3	2	5.1894	8.0794	15.5682	16.1588
3	87년8월15일~17일	237.7665	237.7665	2	2	5.2462	5.2462	10.4924	10.4924
4	90년6월20일~23일	143.1719	276.4121	3	2	3.4997	5.4024	10.4991	10.8048
5	90년9월10일~13일	743.1888	751.1140	1	2	7.9469	4.0989	7.9469	8.1978
6	91년7월25일~27일	446.5218	446.5218	2	2	4.3690	4.3690	8.7380	8.7380
7	91년8월 2일~ 3일	235.8918	251.2099	3	2	5.5306	8.7298	16.5918	17.4596
8	93년8월10일~12일	252.9391	385.2521	5	2	1.5763	3.9546	7.8815	7.9092

표 2. Diskin 모형의 매개변수 추정결과

호우 사상	$f(x)$		n_1		n_2		K_1		K_2		α		$n \times K$	
	GA	NLP	GA	NLP	GA	NLP	GA	NLP	GA	NLP	GA	NLP	GA	NLP
1	153.8106	157.3301	6	5	17	9	1.3152	1.5508	1.3026	2.4400	0.7572	0.7346	11.3518	11.5243
2	140.2404	143.5072	10	2	2	10	1.1734	8.8347	9.062	1.2088	0.1773	0.8227	16.9911	16.6798
3	186.1069	184.1644	10	4	3	7	0.5049	3.8925	4.7924	0.7805	0.3112	0.5851	11.4743	11.3768
4	106.2409	104.4222	4	5	6	6	3.4339	3.111	1.2783	1.3087	0.5824	0.4431	11.2025	11.2653
5	572.9885	564.8362	4	5	10	10	1.2574	1.0234	1.9096	2.0085	0.7203	0.7193	8.9640	9.3185
6	281.9065	280.6098	3	2	2	3	5.9846	3.2423	3.1036	6.2926	0.3125	0.7231	9.8780	9.9163
7	206.5947	206.6337	12	9	7	10	2.312	1.1841	1.6268	2.6262	0.4292	0.4978	18.4078	18.4938
8	251.1560	252.0256	6	6	18	10	1.2944	0.9348	1.3035	0.935	0.9479	0.4387	8.5842	7.7087

Diskin 모형의 경우 n, K값이 Nash 모형에 비해 큰 폭으로 변화하며, α값의 경우 대체로 0.5에서 0.6의 범위로 산정되었다. 목적함수 $f(x)$의 경우 Nash 모형의 $f(x)$보다 모든 호우사상에서 작은 값을 나타내었다. 이는 Diskin 모형이 Nash 모형에 비해 실제 유출수문곡선의 비선형성을 잘 모의하고 있다는 것을 나타내며, GA의 경우와 NLP의 경우 1번 호우사상과 2번 호우사상에서는 GA로 구한 $f(x)$값이 NLP로 구한 $f(x)$값보다 작은 값을 나타냈으나, 그이외의 호우사상에 대해서는 NLP로 구한 $f(x)$값이 GA로 구한 $f(x)$값보다 미미한 차이로 작은 값을 나타내었다. 저수지 수와 유역의 저류상수를 곱한 값인 $n \times K = T_L$은 GA와 NLP로 구한 값이 각각 12.1067과 12.0354로 산정되었다. 이는 Nash 모형의 경우보다 약간 큰 값을 나타낸다. Nash 모형과 Diskin 모형에서

유전자 알고리즘을 사용하여 계산된 매개변수인 n, K값은 비선형 계획법을 사용하여 계산된 n, K값보다 보다 더 안정된 값으로 생각할 수 있다. 왜냐하면 저수지 수와 유역의 저류상수를 곱한값 $n \times K = T_L$이라는 관계에서 $n \times K$값이 유전자 알고리즘를 사용하였을 때가 비선형 계획법을 사용하였을 때보다 표준편차가 각각 0.28, 0.05 작게 산정되었다. 또한 비선형 계획법으로 매개변수를 산정할 경우 사용되는 초기값에 너무 민감하게 반응함으로서 국지해에 빠질 위험이 높다. 반면, 유전자 알고리즘를 사용하여 매개변수를 산정할 경우에는 초기값을 따로 정해줄 필요 없이 프로그램 자체내에서 난수를 발생시켜 이를 선택, 교차, 돌연변이를 거쳐 목적함수 값이 향상되므로 비선형 계획법과는 해를 찾아 가는 방법이 다르다고 하겠다. 따라서, 유전자 알고리즘으로 산정한 매개변수 n, K값이 비선형 계획법으로 산정한 매개변수 n, K값보다 안정하다고 볼 수 있다.

4.4 유전자 알고리즘과 비선형계획법을 이용한 매개변수의 검증

유전자 알고리즘과 NLP로 산정한 매개변수을 이용하여 소양강댐 유역의 대표 n값과 K값을 산정하기 위해서 다음과 같은 방법을 채택하였다.

Nash 모형의 경우 GA로 구한 n값은 대체로 3으로 산정되었으며, NLP로 구한 n값은 2로 산정되었다. $n \times K = T_L$이므로 K값을 구하면 다음의 표 3과 같다.

Diskin 모형의 경우 n_1, n_2의 값이 GA와 NLP에서 각각 7, 8과 5, 8로 산정되었으며, Nash 모형에서와 같이 $\alpha n_1 K_1 + (1-\alpha) n_2 K_2 = T_L$이므로 각각 K_1, K_2을 구할 수 있다. 이를 표 3에 나타내었으며, 여기서 α는 비선형성을 나타내는 매개변수를 의미한다. 표 3의 유역 대표값을 사용하여 소양강 댐 유역의 실제 홍수사상을 적용시킨 결과는 표 4와 같다

표 3. Nash와 Diskin 모형의 매개변수 유역 대표값

대표치	Nash 모형			Diskin 모형					
	n	K	$n \times K$	n_1	n_2	K_1	K_2	α	$n \times K$
GA	3	3.6842	11.0525	7	8	2.1209	3.0950	0.5296	12.1067
NLP	2	5.6686	11.3373	5	8	2.8231	2.2344	0.6206	12.0354

표 4. 유역 대표값을 이용한 매개변수 산정결과

호우 일시	Nash		Diskin			
	$f(x)$		$f(x)$			
	GA	NLP	GA		NLP	
			K_1	K_2	K_1	K_2
87년8월29일~9월2일	256.2386	274.0438	639.0434	262.6400	249.3898	256.0958

표 3의 대표 유역값을 이용하여 실제 호우사상에 적용시킨 결과를 보면 Nash 모형에서는 유전자 알고리즘으로 산정한 유출수문곡선의 $f(x)$값이 비선형 계획법을 이용하여 산정한 유출수문곡선의 $f(x)$값보다 작음을 알 수 있으며, Diskin 모형에서는 K_1, K_2의 경우에서 NLP로 산정한 유출수문곡선의 $f(x)$값이 유전자 알고리즘으로 산정한 유출수문곡선의 $f(x)$값보다 작게 산정되었다. 또한 유전자 알고리즘에서는 K_1의 경우보다 K_2의 경우가 $f(x)$값이 훨씬 작게 산정되었으며, NLP의 경우에는 이와 반대로 산정되었다. Nash 모형과 Diskin 모형의 경우에는 두가지 방법에서 모두 Nash 모형의 $f(x)$값보다 Diskin 모형의 $f(x)$값이 작게 산정 되었다는 것 또한 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 Nash 모형과 Diskin 모형의 매개변수를 산정을 위해 소양강댐 유역의 호우사상에 유전자 알고리즘과 비선형 계획법을 적용하였다. 이를 통해 다음과 같은 사실을 알 수 있었다.

1) Nash 모형으로 구한 $f(x)$값보다 Diskin 모형으로 구한 $f(x)$값이 모든 호우사상에 대해 작은 값을 나타내었다. 또한, $f(x)$가 작은 Diskin 모형이 Nash 모형보다 실제 유출수문곡선의 첨두치에 더 잘 근접함을 알 수 있다.
2) Nash 모형과 Diskin 모형에서 유전자 알고리즘을 사용하여 계산된 매개변수인 n, K값은 비선형 계획법을 사용하여 계산된 n, K값보다 더 안정된 값이다.
3) 유역의 대표값을 이용하여 실제호우사상에 적용하여 본 결과 Nash 모형으로 모의된 유출수문곡선보다 Diskin 모형으로 모의한 유출수문곡선이 실제유출수문곡선에 더 근접하였으며, 특히 첨두치에서 실제 유출수문곡선에 가장 근접함을 알 수 있었다.

이상과 같은 결과로부터 유전자 알고리즘이나 비선형 계획법을 이용하여 Diskin 모형으로 소양강 유역의 매개변수 대표치를 산정하는 것이 Nash 모형으로 유역의 대표치를 산정하는 것보다 실제호우사상을 더 잘 모의하는 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

고재웅, 서영제(1987). "선형저수지 모형의 매개변수 연구." 한국수문학회지, 한국수문학회, 제20권, 제3호, pp. 229-235.

김재형, 윤용남(1986). "소유역의 홍수유출계산을 위한 단일선형저수지 모형의 적용." 한국수문학회지, 한국수문학회, 제19권, 제1호, pp. 65-74.

박영수, 김종우, 김태균, 김중훈(1999). "유전자 알고리즘을 이용한 관망시스템의 최적비용 설계." 한국수자원학회 논문집, 한국수자원학회, 제32권, 제1호, pp. 71-81.

박진욱, 유철상, 김중훈(1999). "Nash 모형과 Diskin 모형을 이용한 순간단위도의 유도 및 비교 연구." 한국수자원학회 논문집, 한국수자원학회, 제33권, 제1호, pp. 123-132.

성기원(1998). "유전알고리즘을 이용한 능형회귀모형의 검증:빈도별 홍수량의 지역분석을 대상으로." 한국수자원학회 논문집, 한국수자원학회, 제31권, 제1호, pp. 59-69.

한국수자원공사(1996), 소양강 다목적 댐 치수능력 증대사업 타당성 조사 및 기본계획 보고서.

Diskin, M.H.(1964). *A basic study of the linearity of the rainfall-runoff process in watershed.* Pd.D. dissertation, University of Illinois, Urban, Ⅱ.

Holland, J.(1975). *Adaption in natural and artificial systems,* The University of Michigan Press, Ann Arbor.

Nash, J.E.(1957). The form of the instantaneous unit hydrograph, *International Association of Science Hydrology*, Pub. 45, Vol. 3, pp. 114-121.