단순 다각형의 두 에지 사이의 가시성 문제에 대한 상수 시간 RMESH 알고리즘

김수환
부산외국어대학교 컴퓨터전자공학부
shkim@taejo.pufs.ac.kr

A Constant Time RMESH Algorithm for Solving the Visibility Problem between Two Edges of a Simple Polygon

Soo-Hwan Kim
Division of Computer and Electronic Engineering

요 약

본 논문에서는 단순 다각형의 두 에지 사이의 가시성 문제를 재구성가능한 메쉬(RMESH) 병렬 모델에서 상수 시간에 해결하기 위한 알고리즘을 고려한다. 두 에지 사이의 가시성은 네 가지 유형, 즉, 완전 가시성(complete visibility), 강 가시성(strong visibility), 약 가시성(weak visibility), 부분 가시성(partial visibility)으로 구분될 수 있다. 논문에서는 에지 가시성에 대한 여러 가지 성질들을 고찰하여 두 에지 사이의 모든 유형에 대한 가시성의 판별과 가시 영역을 구하는 상수 시간 N×N RMESH 알고리즘을 제시한다.

1. 서 론

재구성가능한 메쉬(Reconfigurable Mesh; 줄여서 RMESH)는 1988년 Miller 등[1]에 의해 처음 소개된 병렬처리 모델이다. RMESH의 기본 구조는 프로세서들을 재구성가능한 버스 시스템에 의해 메쉬 형태로 연결된 것이다. 각 프로세서는 동(E), 서(W), 남(S), 북(N)의 4개 포트를 가지며, 알고리즘의 실행중에 버스 스위치에 의해 각 포트 사이를 연결하거나 또는 차단하는 것이 가능하다. 프로세서의 포트 연결을 적절히 조절하여 프로세서들을 여러 버스 조각(subbus)으로 분할할 수 있다. 한 순간에 하나의 프로세서만이 버스 조각에 대한 방송(broadcast)을 할 수 있고, 같은 버스 조각에 연결된 모든 프로세서들은 방송된 자료를 상수 시간에 읽을 수 있다. N×N RMESH의 각 프로세서는 O(logN) 비트 크기의 워드(word)를 O(1) 개 저장할 수 있고, 사칙연산을 비롯한 기본 연산을 O(1) 시간에 수행할 수 있다. 또한, 각 프로세서는 자신이 속한 행과 열을 인지할 수 있다.

본 논문에서는 계산 기하학(computational geometry)의 한 연구 분야인 에지 가시성에 관한 문제를 RMESH에서 상수 시간에 해결하는 것을 고려한다. 다각형의 에지 e와 내부의 한 점 x가 주어져 있을 때, x를 볼 수 있는 e상의 점이 존재하면 e는 x를 볼 수 있다고 정의한다. 에지 가시성에 관련된 기본적인 문제로서 주어진 다각형이 어떤 에지로부터 가시적인가를 판별하는 문제와 주어진 에지로부터 가시적인 영역을 구하는 문제 등이 있다. 본 논문에서는 에지와 에지 사이의 가시성에 관한 여러 가지 개념을 소개하고, 이를 바탕으로 에지와 에지 사이의 가시성을 판별하는 문제를 다룬다. 본 논문의 알고리즘은 에지 가시성에 관한 기본적인 문제를 해결하는 데 이용될 수 있다.

2. 용어 정의 및 에지 가시성의 성질

단순 다각형 P가 평면 상에 놓여 있다고 하자. P는 정점들이 반시계방향으로 주어진 순서리스트 (v_0, v_1, ⋯ , v_{n-1})로 나타낸다. 두 정점 v_i와 v_{i+1}을 연결하는 에지는 e(v_i, v_{i+1}) 또는 e_i로 나타내고, 편의상 v_i에서 v_{i+1} 방향의 유향 선분으로 간주한다. 여기서 v_i는 e(v_i, v_{i+1})의 꼬리(tail)라고 부르고, v_{i+1}은 머리(head)라고 부른다.

다각형 내부의 두 점을 연결하는 선분이 다각형의 외부를 지나지 않으면 그 두 점은 서로 볼 수 있다고 한다. 다각형 P 내부의 한 점 q로부터의 가시성 다각형은 V(P, q)로 표현하고, P 내부의 한 에지 e로부터의 에지 가시성 다각형은 V(P, e)로 표현한다.

에지 e와 객체(점, 에지, 다각형 등) Q가 있을 때, 에지 e로부터의 가시성은 다음과 같이 구분된다(그림 1).

1. Q는 e로부터 완전가시적이다(complete visibility): e의 모든 점에서 Q의 모든 점을 볼 수 있다.
2. Q는 e로부터 강가시적이다(strong visibility): e의 어떤 한 점에서 Q의 모든 점을 볼 수 있다.
3. Q는 e로부터 약가시적이다(weak visibility): Q의 각 점에 대해 그 점을 볼 수 있는 e의 점이 존재한다.
4. Q는 e로부터 부분가시적이다(partially visibility): e의 어떤 점이 Q의 어떤 점을 볼 수 있다.

가시성의 유형에서 완전 가시성은 가장 제약이 강하고, 부분 가시성은 가장 일반화된 유형이다.

다각형 P의 서로 다른 두 에지를 각각 e_a와 e_b라고 하자. e_a의 머리와 e_b의 꼬리를 연결한 선분을 L이라고 하고, e_b의 머리와 e_a의 꼬리를 연결한 선분을 M이라고 하

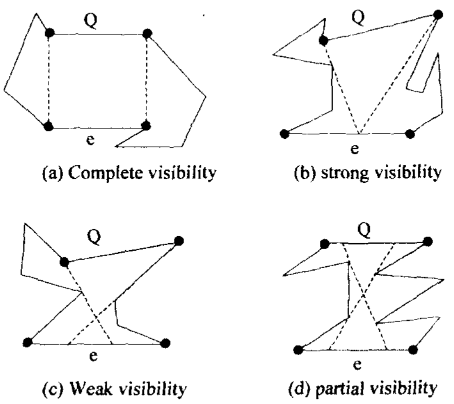

그림 1. 가시성의 유형

자. e_a가 왼쪽에서 오른쪽 방향으로 놓여 있다고 할 때, e_b의 상대적인 위치에 따라 다음과 같이 분류될 수 있다.

(Case 1) L과 M이 교차하는 경우(그림 2)
e_b가 e_a를 연장한 선의 위쪽에 놓여 있다면 e_a는 기껏해야 e_b의 머리와 꼬리밖에 볼 수 없다. 이 경우, e_a와 e_b 사이의 가시성 판별을 위해 e_b의 머리와 꼬리에 해당되는 점에 대해 가시성 다각형을 구하면 된다. 만일, e_a의 일부분이 이 가시성 다각형에 포함되면 e_a는 e_b의 한 점을 볼 수 있다, 즉, e_b는 e_a로부터 부분적으로 가시적이라고 부를 수 있다. 그렇지 않으면 e_a는 e_b를 완전히 볼 수 없다.

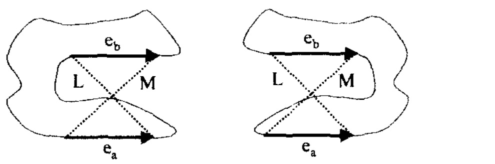

그림 2. L과 M이 서로 교차하는 경우

e_b가 e_a를 연장한 선의 아래쪽에 놓여 있다면, e_a의 머리 또는 꼬리만이 e_b를 볼 수 있을 가능성이 있다(그림 2에서 e_a와 e_b를 바꾸어 참조). 따라서, e_a의 머리와 꼬리에서 구한 가시성 다각형에 e_b가 완전히 포함되면, e_b는 e_a로부터 강가시적이 되고, 일부분만 포함되면, e_b는 e_a로부터 부분적으로 가시적이 된다. 한 점도 포함되지 않으면 e_a는 e_b를 완전히 볼 수 없다.

L과 M이 교차하지 않은 경우는 네 점 e_a, L, e_b, M이 사각형을 구성한다. 이 사각형을 R이라고 하자.

(Case 2) R의 경계선의 방향이 시계방향인 경우(그림 3)
이 경우도 e_b의 머리 또는 꼬리로부터의 가시성 다각형에 e_a의 일부분이 포함되면 e_b는 e_a로부터 부분적으로 가시적이라고 부를 수 있다. 그렇지 않으면 e_a는 e_b를 완전히 볼 수 없다.

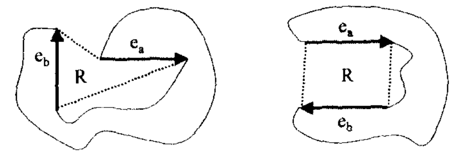

그림 3. R의 경계선의 방향이 시계방향인 경우

(Case 3) R의 경계선의 방향이 반시계방향인 경우
사각형 R의 내부가 완전히 비어 있으면, e_b는 e_a로부터 완전 가시적이다. P의 체인(경계선의 일부)가 R의 내부를 완전히 관통하는 경우는 e_b는 e_a로부터 완전히 볼 수 없다(그림 4 (a)). 그렇지 않은 경우, R의 내부에 포함되는 P의 체인들을 살펴보자. 이 체인들을 양 끝점이 L에 놓여 있는 체인들의 그룹과 양 끝점이 M에 놓여 있는 체인들의 그룹으로 나눌 수 있다(그림 4 (b))

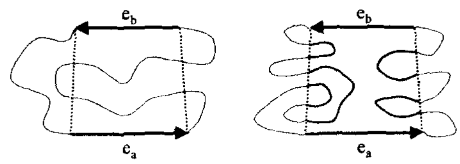

그림 4. R의 경계선의 방향이 반시계방향인 경우

체인들 중 L에 접한 체인들의 집합을 C, M에 접한 체인들의 집합을 D라고 하자. e_a의 머리와 e_b의 꼬리, 그리고 C에 속한 정점 집합에 대한 볼록외피를 CH(C)라고 하고, e_b의 머리와 e_b의 꼬리, 그리고 D에 속한 정점 집합에 대한 볼록외피를 CH(D)라고 하자. 두 볼록 외피가 교차하면 두 에지는 서로 볼 수 없다는 것이 자명하다(그림 5 (a)). 두 볼록외피가 교차하지 않은 경우, 두 볼록외피에 동시에 접하는 접선을 구하면 두 에지 사이의 가시 영역을 구할 수 있다. 이 경우 다음의 조건에 의해 가시성이 결정된다. 두 접선과 e_a가 만나는 점을 x, y라고 하고, 두 접선과 e_b가 만나는 점을 v, w라고 하자.

(A) v, w가 e_b의 양 끝점이고 CH(D)에서 v, w에 인접한 에지를 연장한 두 선이 e_a에 도달하기 앞서 서로 교차하지 않으면, e_b는 e_a로부터 강가시적이다(그림 5 (b)).

(B) v, w가 e_b의 양 끝점이면, e_b는 e_a로부터 약가시적이다(그림 5 (c)).

(C) v, w가 e_b의 양 끝점이 아니면, e_b는 e_a로부터 부분적으로 가시적이다(그림 5 (d)). e_b의 부분 에지 e(v, w) 영역이 e_a로부터 약가시적이다.

3. 알고리즘

본 절에서는 단순 다각형 P의 서로 다른 두 에지 e_a와 e_b가 주어졌을 때, e_a가 e_b를 어떤 유형의 가시성으로 볼 수 있는지의 판별과 해당 가시 영역을 구하는 N×N RMESH 알고리즘을 소개한다, 여기서 N은 다각형의 정점의 개수이다.

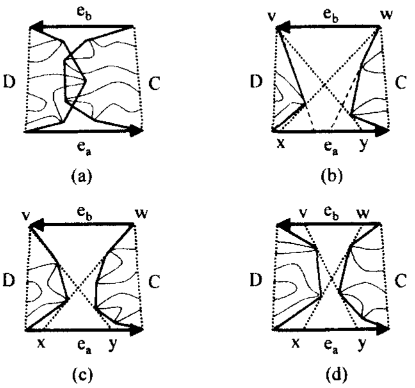

그림 5. 가시성의 결정

알고리즘의 입력으로 다각형 P = (v_0, v_1, … , v_{N-1})과 두 에지 e_a, e_b가 주어진다고 하자. 알고리즘이 시작되기 전의 RMESH의 상태와 종결후의 상태는 다음과 같다.

초기 상태: P의 각 에지가 RMESH RM의 0번째 열에 차례로 배치된다. 즉, RM(i, 0)에는 P의 에지 e(v_i, v_{i+1})이 배치된다. 그리고 RM(0, 0)에 e_a와 e_b가 배치된다.
종결 상태: 두 에지 사이의 가시성 정보 v_type이 RM(0, 0)에 저장된다. v_type이 0이면 e_b는 e_a로부터 비가시적이고, 1이면 완전 가시적이고, 2이면 강가시적이고, 3이면 약가시적이고, 4이면 부분 가시적이다. 또한 e_b 상의 가시 영역 e(v, w)가 저장된다.

알고리즘의 개요는 다음과 같다(용어는 2절 참조).

알고리즘 1: 두 에지 사이의 가시성 판별

단계 1: 두 선분 L과 M이 서로 교차할 경우, 2절의 Case 1에 해당하는 검사를 수행하여 v_type에 0(비가시적), 2(강가시적), 또는 4(부분가시적) 정보를 저장한다. 두 선분이 교차하지 않으면 단계 2로 가고 아니면 종료한다.

단계 2: 사각형 R을 구한다. 사각형 R의 경계선이 시계방향이면, 2절의 Case 2에 해당하는 검사를 수행하여 v_type에 적절한 값을 저장한다. R의 경계선이 반시계 방향이면 단계3으로 가고 아니면 종료한다.

단계 3: R을 관통하는 P의 체인이 존재하면 v_type에 0, R이 비어 있으면 v_type에 1을 저장하고 종료한다. 그렇지 않으면 체인들의 집합 C와 D를 구한다.

단계 4: 볼록 외피 CH(C)와 CH(D)를 구한다.

단계 5: CH(C)와 CH(D)가 교차하면, v_type에 0을 저장하고 종료한다. 그렇지 않으며, 두 볼록 외피의 두 접선 r과 l을 구한다.

단계 6: 2절의 Case 3의 (A), (B), (C)에 해당되는 상태에 따라 가시성을 판별하고 v_type에 적절한 값을 저장한다. 가시 영역은 (v, w)로 둔다.

정리 1. 알고리즘 1은 단순 다각형 P와 두 에지가 주어졌을 때, 두 에지 사이의 가시성 판별 및 가시 영역을 N×N RMESH에서 상수 시간에 구한다, 여기서 N은 P의 정점의 개수이다.
(증명) 알고리즘 1이 올바르게 수행된다는 것은 2절의 내용을 통해 알 수 있다. 이제, 알고리즘의 각 단계를 상세하게 서술함으로써 이 알고리즘이 N×N RMESH에서 상수 시간에 수행될 수 있음을 보인다. (지면상 각 단계의 상세 알고리즘은 생략하고 개략적으로 서술한다.)

단계 1: 한 점으로부터의 가시성 다각형을 구하는 것은 N×N RMESH에서 수행될 수 있으므로[3], 단계 1은 상수 시간에 수행될 수 있다.
단계 2: 단계 1과 비슷한 과정으로 상수 시간에 수행될 수 있다.
단계 3: 선분 L에 교차하는 체인들의 집합 C를 구한다(선분 L에 나가는 방향으로 교차하는 에지를 가진 프로세서는 E 스위치를 끊는다. 사각형 R로 들어오는 방향의 에지를 가진 프로세서가 기호 'C'를 방송한다. 그 기호를 읽은 프로세서를 확인한다). 같은 방식으로 선분 R에 교차하는 체인들의 집합 D를 구한다. 만일 두 기호를 모두 읽은 프로세스가 존재하면 R을 관통하는 체인이 존재하므로 비가시적이다. 어떤 프로세서도 기호를 읽지 않았다면 완전가시적이다. 그렇지 않으면 단계 4를 수행한다. 이 과정은 상수 시간에 수행된다.
단계 4: 기호 'C'를 읽은 프로세서가 가지고 있는 에지들로 볼록외피 CH(C)를 구한다. 같은 방식으로 볼록외피 CH(D)를 구한다. 볼록 외피는 N×N RMESH에서 상수 시간에 구할 수 있으므로[4], 단계 4는 상수 시간에 수행된다.
단계 5: 두 볼록 다각형의 교차 여부를 판별하는 알고리즘[4]과 두 볼록 다각형의 두 개 접선을 구하는 알고리즘[2]을 이용하면, 단계 5는 상수 시간에 수행된다.
단계 6: 단계 5에서 구한 두 접선과 e_b와의 교차점 v, w를 구한다. 이 점들을 이용하여 알고리즘의 종료 상태를 구축할 수 있다. 이 과정도 상수 시간에 수행된다.

참고문헌

[1] R. Miller, V. K. Prasanner Kumar, D. Reisis, and Q. Stout, Meshes with Reconfigurable Buses, Proc. 5th MIT Conf. on Adv. Res. in VLSI, 163-178, 1988.
[2] R. Miller and Q. Sout, Mesh Computer Algorithms for Computational Geometry, IEEE Trans. Computers, Vol. 38, 321-340, 1989.
[3] 김수환, 한 점으로부터의 가시성 다각형을 구하는 상수 시간 RMESH 알고리즘, 부산외대, 외대논총, 제19집 4호, 507-517, 1999.
[4] 김수환, 다각형 교차 문제를 위한 상수 시간 재구성 메쉬 알고리즘, 한국정보과학회, 정보과학회 논문지, 제26권 11호, 1344-1352, 1999.