

볼빔에 대한 비선형 제어기 및 관측기 설계

임 규 만*

*초당대학교 전자공학과

Nonlinear Controller and Observer Design for Ball and Beam

Kyu-Mann Im*

*Dept. of Electronics Engineering, Chodang University

*E-mail : kmim@chodang.ac.kr

Abstract

In this paper, We proposed the nonlinear controller and observer design for a ball and beam system. Unfortunately, for the ball and beam system, the control coefficient is zero whenever the angular velocity or ball position are zero. Therefore, the relative degree of the ball and beam system is not well defined. The presented the nonlinear controller and observer design is based on the approximation input-output feedback linearization. And we verified that the proposed nonlinear controller and observer scheme is the feasible through a computer simulation.

Keywords : nonlinear, input-output feedback linearization, controller, observer

I. 서 론

최근들어 미분기하학적 제어이론(differential geometric theory)은 비선형시스템 이론(nonlinear system theory)의 체계적이면서 광범위한 발전을 주도하고 있다. 특히 궤환 선형화 이론(feedback linearization theory)은 그 중에서 가장 성공적으로 실제의 비선형시스템의 제어에 적용되고 있는 분야의 하나이다. 궤환선형화 이론은 비선형시스템에 상태궤환(state feedback)을 가하여 결과적인 궤환시스템이 선형(linear)의 특성을 갖도록하는 것이다. 이는 비선형 시스템을 제어대상으로 할경우에 선형시스템이론(linear system theory)에서 발전된 다양한 제어이론을 그대로 적용할 수 있고, 그 선형의 특성이 Taylor's 급수전개(series expansion)로 얻어지는 선형섭동기법(linear perturbation technique)에 비해 비교적 넓은 유효 적용영역을 갖는다는점에서 비선형시스템의 제어분야에서 매우 효과적인 기법으로 인식되고 있다. 기존의 궤환 선형화 기법은 시스템의 출력은 무시하고 입력과 상태변수간의 관계 즉, 시스템의 상태방정식(state equation)을 선형화시키는 상태 선형화(state linearization-또는 입력-상태선형화(input-state linearization))[1],[2] 그리고 이와는 달리 시스템의 입력과 출력과의 관계인 입출력방정식을 선형화시키는 입출력 선형화(input-output linearization)[3],

[4]로 크게 나누어진다. 따라서 본 연구에서는 입출력 선형화방법을 통하여 ball and beam에 대한 제어기와 관측기를 설계하고자 한다.

본 논문의 구성은 2장에서는 lagrangian 방정식을 이용하여 ball and beam 시스템의 동력학방정식을 유도하였으며, 3장에서는 비선형시스템에대한 출력 궤환 선형화 방법을 통한 선형화된 canonical form을 제안하였다. 4장에서는 VSS이론을 통하여 제어기를 설계하고, 5장에서는 quasi-비선형 관측기를 제안하였다. 6장에서는 4장과 5장에서 제안한 제어기와 관측기에 대한 타당성을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 검증하였으며, 7장에서 결론을 맺는다.

II. 볼빔 동력학적 모델

본 장에서는 다음과 같은 그림1.의 ball and beam 시스템에 대해서 Lagrangian 방정식을 도입하 동력학 방정식을 유도한다.

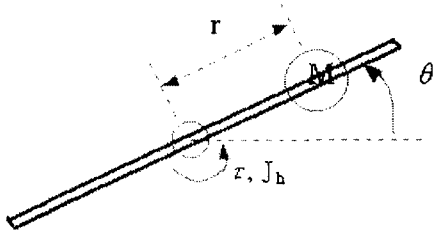


그림 1. 볼빔의 구조

여기서

r : ball의 위치, θ : beam의 각도, r : beam에 가해진토크

J_h : 허브의 관성모멘트, M : ball의 mass를 나타낸다.

그림1.로부터 운동에너지와 위치에너지를 다음과 같이 표현할수 있다.

Kinetic Energy :

$$K.E = \frac{1}{2} J_h \dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2} Mv^2 \quad (1)$$

Potential Energy :

$$\begin{aligned} P.E &= Mgh \\ &= Mgr(t) \sin \theta(t) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $h = r(t) \sin \theta(t)$.

운동에너지와 위치에너지를 Motion Equation을 유도하기위해서 Lagrangian Equation을 도입하고자 한다.

$$L = K.E - P.E$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}(t)} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta(t)} &= \tau \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}(t)} \right] - \frac{\partial L}{\partial r(t)} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

식(3)에 식(1),(2)를 적용하므로써 ball and beam에 동력학 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} (J_h + Mr(t)^2) \ddot{\theta}(t) + 2Mr(t)\dot{r}(t) \dot{\theta}(t) \\ + Mgr(t) \cos \theta(t) &= \tau \\ \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}(t)^2 + g \sin \theta(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

식(4)에서 주어진 미분방정식을 상태방정식으로 표현하기 위해서 다음같이 정의하면

$$\begin{aligned} r(t) &= x_1(t), \dot{r}(t) = x_2(t) \\ \theta(t) &= x_3(t), \dot{\theta}(t) = x_4(t) \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)로부터 식(4)에서 유도된 운동의 라그랑주 방정식은 다음과 같은 동력학 방정식(6)으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)x_4^2(t) - g \sin x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{-2Mx_1(t)x_2(t)x_4(t)}{J_h + Mx_1^2(t)} \\ &\quad - \frac{Mgx_1(t) \cos x_3(t)}{J_h + Mx_1^2(t)} \\ &\quad + \frac{1}{J_h + Mx_1^2(t)} u. \end{aligned} \quad (6)$$

다음 장에서는 유도된 동력학 방정식에 대해서 상대차수가 가장크도록 시스템의 출력을 선정하고, 근사화 출력궤환 선형화 (approximation output feedback linearization)방법을 통하여 선형화된 canonical form을 제안한다.

III. 출력궤환 선형화

본 장에서는 ball and beam 시스템에 대한 동력학 방정식(6)에 대해서 시스템의 상대차수가 가장 크도록 하는 출력을 다음과 같이 설정한다.

$$y = h(x) = x_1 \quad (7)$$

식(7)에 Output Feedback Linearization Method를 적용하면 식(8)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= \dot{x}_1 \\ \dot{y}^{(2)} &= \dot{x}_1^{(2)} \\ \dot{y}^{(3)} &= \dot{x}_1^{(3)} \end{aligned} \quad (8)$$

식(8)으로부터 generalized-state coordinates 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta_1 &= y = h(x) = x_1 = \phi_1(x) \\ \eta_2 &= y^{(1)} = \dot{x}_1 = L_f h(x) = x_2 = \phi_2(x) \\ \eta_3 &= y^{(2)} = \dot{x}_2 = L_f^2 h(x) \\ &= x_1 x_4^2 - g \sin x_3 = \phi_3(x) \\ \eta_4 &= y^{(3)} = \dot{x}_1 x_4^2 + 2x_1 x_4 \dot{x}_4 + g \cos x_3 \dot{x}_3 \\ &= x_2 x_4^2 + g \cos x_3 x_4 \\ &\quad - \frac{4Mx_1^2 x_2 x_4^2 + 2Mgx_1^2 x_4 \cos x_3}{J_h + Mx_1^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2x_1x_4}{J_h + Mx_1^2} u \\
 & = L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x) u = \phi_4(x) \quad (9)
 \end{aligned}$$

식(9)로 부터 centrifugal term 인 $x_1 \dot{x}_4^2 = r \dot{\theta}$ 항이 존재하므로써 ball and beam 시스템의 입-출력 응답을 정확하게 선형화할 수 없다. 즉, $x_4 = \dot{\theta}$ 또는 $x_1 = r$ 이 zero 일 때 제어계수($L_g L_f^2 h(x)$)가 zero가 되므로써 ball and beam 시스템의 상대차수(relative degree)가 정의되지 않는다. 따라서 $x_1 \dot{x}_4^2 = r \dot{\theta}$ 항은 무시할수 있을 만큼 적은 값을 가지므로써 무시하고 상대차수가 4로 최대가 되도록 하면 다음과 같은 Canonical Form을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\
 \dot{\eta}_2 &= \eta_3 \\
 \dot{\eta}_3 &= \eta_4 \\
 \dot{\eta}_4 &= W_1(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \\
 & + W_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)u = \xi(\eta, t) \quad (10)
 \end{aligned}$$

여기서 $\eta_1 = 0, \eta_2 = 0, \eta_3 = 0, \eta_4 = 0$ 로 만드는 제어법칙 u 에 대해서 4장에서 설계를 한다.

IV. VSS 제어법칙 설계

본 장에서는 VSS 이론을 도입하여 제어기를 설계한다. 따라서 제어 문제는 식(10)에서 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \rightarrow 0$ 로 보내는 u 를 설계하는것이 제어의 목적이며 이를 위하여 VSS 이론을 도입한다. 식(10)의로 부터 Switching Surface를 다음과 같이 설정한 다음 $s \dot{s} < 0$ 이 되도록하는 Control Law u 를 설계한다. 여기서 Switching Surface를 다음과 같이 설정한다.

$$s = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + c_3 \eta_3 + \eta_4 \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 s \dot{s} &= s(c_1 \dot{\eta}_1 + c_2 \dot{\eta}_2 + c_3 \dot{\eta}_3 + \dot{\eta}_4) \\
 &= s[c_1 \eta_2 + c_2 \eta_3 + c_3 \eta_4 + W_1(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \\
 & + W_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)u] < 0 \quad (12)
 \end{aligned}$$

여기서 c_1, c_2 는 Hurwitz 하게 설정하면, 제어법칙은 다음과 같이 선택할 수 있다.

$$u = k \operatorname{sgn} \{ W_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \} \quad (13)$$

여기서

$$k = \sup_{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \in \mathbb{R}^n} \frac{|c_1 \eta_2 + c_2 \eta_3 + c_3 \eta_4 + W_1(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)|}{|W_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)|}$$

V. 비선형시스템에 대한 관측기 설계

본 절에서는 식(6)과 같은 비선형 동력학 방정식에 대하여 비선형 관측기를 설계하기 위해서 다음과 같은 비선형 시스템을 고려하고자 한다.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\
 \dot{x}_n(t) &= \xi(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\
 y &= h(x) = x_1 \quad (14)
 \end{aligned}$$

식(14)과 같은 비선형 시스템에 대해서 다음과 같은 정리를 통하여 관측기 설계를 제안하고자 한다.

정리1:식(14)과 같은 시스템에 대해 $|\xi(x, t) - \xi(z, t)| \leq k \|x - z\|, x, z \in \mathbb{R}^n$ 를 만족하는 양의 상수 k 가 존재하면 실수의 집합 $\{\lambda_i, i \in n, \lambda_i > 0, \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j\}$ 에 대하여, 임의의 $\sigma \geq \sigma_0$ 에 대해서 다음과 같은 state observer를 만족하는 positive constant σ_0 가 존재한다.

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 + \alpha_1(y - z_1) \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{n-1} &= z_n + \alpha_{n-1}(y - z_1) \\
 \dot{z}_n &= \xi(z, t) + \alpha_n(y - z_1) \quad (15)
 \end{aligned}$$

여기서 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 는 실수이고 $\{-\sigma \lambda_i; i \in n\}$ 는 다음과 같은 다항식의 근이다.[5]

$$\lambda^n + \sigma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \sigma_n = 0 \quad \blacksquare$$

정리1을 통하여 식(10)을 다시쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\
 \dot{\eta}_2 &= \eta_3 \\
 \dot{\eta}_3 &= \eta_4 \\
 \dot{\eta}_4 &= W_1(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \\
 & + W_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)u(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \quad (16)
 \end{aligned}$$

식(16)에 정리1. 적용하므로서 Quasi-Nonlinear Observer를 다음과 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + a_1(\eta_1 - z_1) \\ \dot{z}_2 &= z_3 + a_2(\eta_1 - z_1) \\ \dot{z}_3 &= z_4 + a_3(\eta_1 - z_1) \\ \dot{z}_4 &= W_1(z_1, z_2, z_3, z_4) \\ &\quad + W_2(z_1, z_2, z_3, z_4)u(z_1, z_2, z_3, z_4) \\ &\quad + a_4(\eta_1 - z_1) \end{aligned} \quad (17)$$

VI. 컴퓨터 시뮬레이션

본 장에서는 앞장에서 근사화 출력궤환 선형화 방법을 통하여 제안된 ball and beam 시스템에 대한 비선형 제어기와 관측기에 대해서 ball의 위치와 beam의 각도에 대해서 그 타당성을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 보여준다.

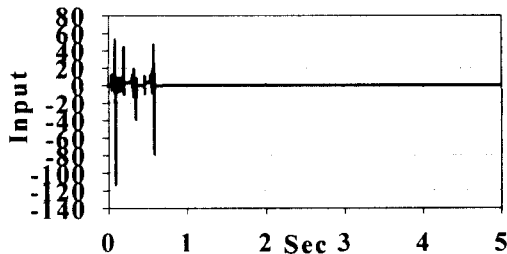


그림2. 제어입력

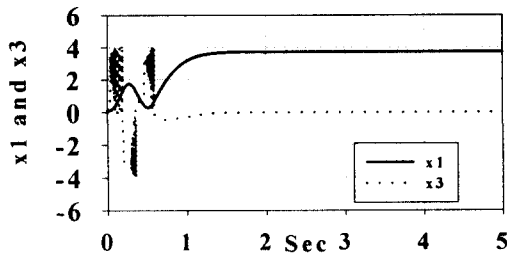


그림3. 상태 x_1 와 x_3

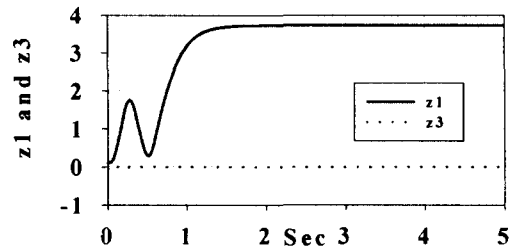


그림4. z_1 와 z_3

VII. 결론

본 논문에서는 ball and beam 시스템의 경우 centrifugal term으로 인하여 상대차수가 정의되지 않음(상대차수가 3 또는 4)을 알 수 있었으며, ball and beam 시스템의 비선형 동역학 방정식으로 부터 근사화 output feedback linearization 방법을 적용하여 상대차수가 4로서 최대가 되도록 하였다. VSS 이론을 통하여 비선형 제어법칙과 비선형 관측기 설계에 관하여 제안 하였으며, 제안된 제어법칙과 관측기에 대해서 그 타당성을 보일 수 있었다. 앞으로 더욱 연구 되어야 할 부분으로서는 slotine, Isidori, Vidyasagar에 의하여 제안된 입-출력궤환 선형화 방법은 특별한 형태의 비선형 시스템에만 국한하므로 일반적인 비선형 시스템에도 적용 할 수 있는 입-출력궤환 선형화 방법 및 입력-상태궤환 선형화방법, 그리고 비선형 관측기의 observability criterion 대해서 연구를 진행할 계획이다.

참고문헌

- [1] W.Dayawansa, W.M.Boothby, and D.L.Elliott, "Global state and feedback equivalence of nonlinear systems," Systems & Control Letters, vol.6, pp.229-234, 1985.
- [2] R.Su, "On the linear equivalents of nonlinear systems," Systems & Control Letters, vol.3, no.1, pp.48-52, July 1982.
- [3] A.Isidori, "The Matching of a Prescribed Linear Input-Output Behavior in a Nonlinear System," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-30, no.3, pp.258-265, March 1985.
- [4] A.Isidori, R.Ruberti, "On the synthesis of linear input-output responses for nonlinear systems," Systems & Control Letters, vol.4, pp.17-22, North-Holland, February 1984.
- [5] Yu-Fan Zheng and Shu-Zhong Chen, "Design of Observer for Nonlinear Control Systems," Proceedings of Asian Control Conference Tokyo, pp.341-344, July, 27-30, 1994.