Non-Uniform Rational B-Splines의 Blending Function 분석에 대한 연구

김 정 욱*, 김 희 중*, 정 재 현**

A Study on Analyzing the Blending Function of NURBS

Kim Jeong Wook, Kim Heui Jung, Jung Jae Hyun

* 한국해양대학교 대학원 기계공학과
** 한국해양대학교 기계·정보공학부

Abstract: The paper introduce the basic concept for the variable graph description of blending fuctions in NURBS using some control method; the control points, knot vectors and weight points in 3D space.

Key words: NURBS, blending function (혼합함수), knot vector (노트벡터), multiple knots (복스 노트), knot insert (노트 삽입)

1. 서 론

제품 개발을 위한 형상 모델링에 있어 자유형상의 설계는 필수적 요건이 되고 있다. 이러한 가운데 컴퓨터 시스템의 발전으로 예전에는 그 구현에 많은 비용이 요구되는 NURBS와 같은 고급 비선형 모델링 기법을 개인용 컴퓨터 수준에서도 운용이 가능하게 되었다. 본 논문에서는 NURBS 모델링의 효율적 운용을 위한 NURBS의 핵심 기하 요소인 혼합함수의 분석을 연구하였다. 이를 이용하여 다양한 모델링 인터페이스 개발에 적용하고자 한다.

2. NURBS 혼합함수

NURBS를 포함한 스플라인 기법에 의한 자유형상 표현은 각 혼합함수의 선택에 따라 그 형상의 특질이 달라진다. 그러므로, 혼합함수의 분석은 각 자유형상 생성 기법의 본질을 분석하는 첫 단계이다. 본 연구에서는 B-스플라인 형상의 각 컨트럴 포인트는 개별 조건의 혼합함수에만 관련된다는 사실을 바탕으로, B-스플라인 혼합함수에 의해 표현되는 기하 특성을 분석한다.

매개변수 t의 함수로서 임의 곡선 상의 점에 대한 위치벡터를 P(t)라 할 때, B_i가 n+1개의 제어 다각형 점의 위치벡터이고, $N_{i,k}$가 B-스플라인 기본함수인 B-스플라인 곡선의 일반식은 Eq. (1)과 같다.[1]

$$P(t)=\sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t) \quad t_{\min}\le t < t_{\max},\ \ 2\le k < n+1 \tag{1}$$

Eq. (1)에서 임의 k 계 (k-1 차) B-스플라인 기본함수는 Eq. (2)와 같이 정의한다.

$$N_{i,k}(t)=\frac{(t-x_i)}{x_{i+k-1}-x_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{(x_{i+k}-t)}{x_{i+k}-x_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$

$$N_{i,1}(t)=\begin{cases}1, x_i\le t < x_{i+1}\\ 0, otherwise\end{cases} \tag{2}$$

Eq. (2)에서 $x_i \le t < x_{i+1}$의 조건을 유지하는 x_i가 혼합함수의 성질을 결정하는 노트벡터이다. 식에서 B-스플라인 곡선은 k 계 (k-1)차 다항 스플라인 함수이다. P(t)는 구간 에서 k-1 차 다항식이며, P(t)와 그 1, 2, ..., k-2 차 도함수는 곡선 전체에서 연속이다. 즉, 4계 B-스플라인 곡선은 3계 곡선 집합이다

Eq. (2)의 임의 계수의 기본함수는 한 단계 낮은 계수의 기본함수들로 구성된다.

B-스플라인 형상은 혼합함수에 의해 결정되므로, 혼합함수 식에서 사용자가 직접 입력하는 컨트럴 포인트 B_i를 제외하면, 추가적인 제어 요소로 될 수 있는 것은 x_i , 노트벡터가 된다. 즉, B-스플라인 형상 식은 기본함수와 컨트럴 포인트로

구성된 다항식이다.

노트벡터는 B-스플라인 곡선에서 각 컨트럴 포인트가 전체 곡선 형상에 미치는 영역과 그 영역에서의 영향력을 나타낸다. 이는 각 노트 값 구간에서의 매개변수 변화를 출력하므로써 그 결과를 알 수 있다. 이것을 그래프로 나타낸 것이 혼합함수 곡선이다.

B-스플라인 형상은 형상을 생성하는 컨트럴 포인트 수에 관하여 다른 스플라인 기법보다 많은 유연성을 가지고 있다. B-스플라인 형상은 곡선의 최대 계수가 최소한 컨트럴 포인트 수와 일치되어야 한다는 조건 만이 유지되면, 컨트럴 포인트의 수와 상관없이 자유형상을 생성할 수 있다. 즉,

곡선 계수 + 컨트럴 포인트 수 = 노트벡터 수

의 식을 만족하면 된다. 이 관계를 만족하는 상태에서 노트벡터는 여러가지 형태로 배열된다.

2.1 유니폼 노트벡터

B-스플라인 혼합함수를 구성하는 노트벡터의 노트 값들이 등간격으로 증가하면서 배열된 경우를 유니폼 노트벡터 (uniform knot vector)라 한다. 모든 노트는 정수 혹은 실수 값으로 다루어질 수 있다. 즉,

[0 1 2 3 4 5]

[0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0]

Fig. 1의 혼합함수 곡선은 네 개의 컨트럴 포인트를 가진 계수 3의 유니폼 B-스플라인 곡선의 경우를 나타낸 것이다.

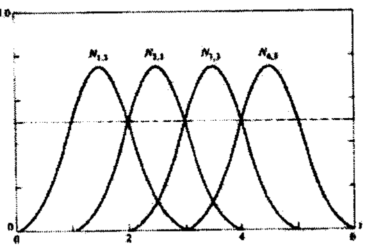

Fig. 1 A blending func. curve, knot vector [0 1 2 3 4 5]

혼합함수 곡선에서 그래프가 0에서부터 증가하여 최고 지점을 지난 후 다시 0으로 내려와 값이 지속되는 사항이 각 컨트럴 포인트 별로 나타난다. 각 그래프는 사용자가 입력하는 해당 컨트럴 포인트에 것이나, 이것은 단지 컨트럴 포인트 자체가 가지는 곡선 형상에 대한 영향력의 변화를 나타낸 것으로, 컨트럴 포인트의 위치 벡터와는 아무 관련이 없다. 즉, 컨트럴 포인트는 곡선 형상의 결정에 큰 영향을 미치지만 곡선 형상의 기하 특성에는 영향을 미치지 않는다.

유니폼 노트벡터의 혼합함수 곡선은 각 컨트럴 포인트가 곡선 형상에 대하여 동일한 형태의 영향력을 가지는 것을 알 수 있다. 즉, 혼합함수 간의 관계를 다음과 같이 등 간격으로 정렬할 수 있다.

주요한 사항은 B-스플라인 원리에 대한 것이다. B-스플라인 혼합함수 Eq. (2)의 $N_{i,k}$를 계산하기 위해서는 x_i와 x_{i+k}가 필요하다. 즉, 계산에 필요한 노트는 0에서 $n+k$ 번 째 까지이다. 하지만, Fig. 1에서 B-스플라인 원리에 의해 임의 매개변수에서의 혼합함수의 합은 1이므로, 노트벡터가 0에서 시작하게 되더라도, 실제 이 원리를 만족하는 매개변수 범위는 k-1에서 n+1까지이다. 결국 실제 생성되는 B-스플라인 곡선의 전체 매개변수 구간보다 작다. 유니폼 B-스플라인 곡선에서 계수가 증가할 수록은 곡선 형상은 부드러워 지나, 그 길이가 감소한다. 일반적으로 한 단위의 매개변수 범위가 감소하면 각 끝 노트에서 k-1 노트 값이 손실된다. 이러한 경우를 유니폼/피리어딕 (periodic) B-스플라인 곡선이라 하며, 노트벡터의 수는 $n+k+1$ 개 이다. 피리어딕 B-스플라인 곡선에서 모든 기본함수는 $t=n+k+1$에서 정확하게 0이다. 컴퓨터 그래픽 표현을 위해 피리어딕 B-스플라인 곡선의 행렬식은 매개변수 범위를 0과 1 사이로 일반화하여 모든 기본 함수가 단위 구간에서 동일한 형태를 가지게 한다. 그러므로 실제 Fig. 1은 피리어딕 B-스플라인 곡선의 혼합함수 곡선이다.

3.2 오픈 유니폼 노트벡터

오픈 유니폼 노트벡터는 노트 배열이 양 끝에서 계수 k 만큼 노트가 반복되면서, 내부 노트는 유니폼 노트벡터와 같이 동일한 간격으로 증가되는 형태를 가진다.

[0 0 1 2 3 3]

[0.0 0.0 0.33 0.33 1.0 1.0]

오픈 유니폼 노트벡터 (open uniform knot vector)는 일반적인 B-스플라인 형상의 생성에 사용되며 Fig. 2와 같은 혼합함수 곡선을 출력한다. 모든 매개변수 구간에서 B-스플라인 원리가 만족되므로 컨트럴 포인트에 형상의 시작과 끝점이 일치되는 형상으로 구성된다.

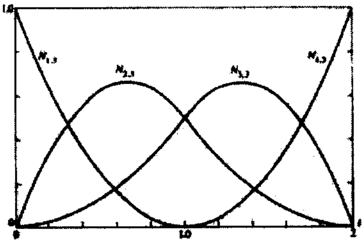

Fig. 2 A blending func. curve, knot vector [0 0 1 2 3 3]

오픈 유니폼 노트벡터의 노트들은 다음과 같은 조건들에 의해 결정되어 기본 함수에 적용된다.

$x_i = 0 \qquad 1 \le i \le k$

$x_i = i-k \qquad k+1 \le i \le n+1$

$x_i = n-k+2 \qquad n+2 \le i \le n+k+1$

매개변수 범위는 0에서 최대 노트 값 $0 \le t \le n-k+2$까지 이므로 노트 수는 $n+k+1$ 개이다.

그러므로 피리어딕 노트벡터와 오픈 유니폼 노트벡터를 비교하면, 형상 시작과 끝을 제어 다각형 점에 일치시키는 것은 양 끝에서 계수 만큼 반복된 노트 임을 알 수 있다. 또한 복수 노트에 의한 곡선을 컨트럴 폴리곤에 접근시키는 효과로 판단할 수 있다

2.3 넌유니폼 노트벡터

넌유니폼 노트벡터 (non uniform knot vector)는 각 노트들이 불규칙하게 배열되면서, 동시에 내부에 복수 노트를 가질 수 있는 경우를 말한다.

[0 0 0 1 3 4 4 4]

[0.0 0.0 0.0 0.7 0.9 1.0 1.0 1.0]

복수 노트값은 임의 제어점에서 단을 발생시켜 0 길이의 스팬을 생성할 수도 있다. 이러한 경우는 기본함수의 곡선 형상에 대한 지원 범위가 감소되는 기능을 제공한다.

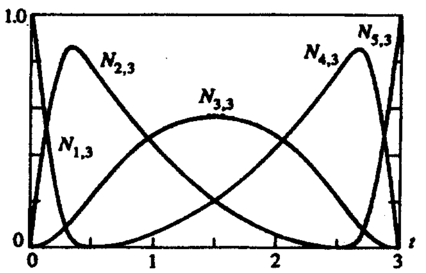

Fig. 3 A blending func. curve, knot vec. [0 0 0 1 3 4 4 4]

넌유니폼 B-스플라인 형상의 혼합함수 곡선은 다른 노트벡터에 비하여 변화가 다양한 그래프를 보이고 있다. 혼합함수 곡선에서 알 수 있듯이 실제 제어 측면에서 넌유니폼 노트벡터는 오픈 유니폼이나 피리어딕 노트벡터에 비하여 컨트럴 포인트가 곡선에 미치는 영향력을 다양하게 변화될 수 있도록 해준다.

3. 혼합함수 기하 분석

혼합함수의 기하분석은 NURBS 형상 모델링의 제어 요소로서 사용되는 노트벡터에 의한 형상 변화의 거동을 분석하는 것이라 할 수 있다. 노트벡터의 사용은 컨트럴 포인트만의 사용에 비하여 자유 형상 제어의 유연성을 더욱 높일 수 있다. 본 연구에서는 특히 복수 노트를 이용한 형상 제어에 대한 사항의 경우를 분석한다.

3.1 혼합함수 모델링

혼합함수를 이용한 NURBS 모델링을 위해 먼저 List. 1과 같이 혼합함수를 구현할 수 있는 알고리즘을 구성하였다.[2]

```
static float KnotPts[];          노트벡터 배열
static int deg = 2;              형상 차수
static long num = 0;

float basis(int i, int k, float t) {
  float denom1, denom2, denom3, denom4, value;
  if ( k == 1) {
    if ((i == NumPts(CtrlPts)-1) && (t > 1.0)) {
      value = 1.0;
    }
  value = 0.0;
  } else {
    denom1 = KnotPts[i+k-1] - KnotPts[i];
    if (denom1 != 0.0)
      denom3 = (t - KnotPts[i]) * basis(i,k-1,t)/denom1;
    else   denom3 = 0.0;
      denom2 = KnotPts[i+k] - KnotPts[i+1];
    if (denom2 != 0.0)
     denom4 = (KnotPts[i+k] - t) * basis(i+1,k-1,t)/denom2;
    else   denom4 = 0.0;
      value = denom3 + denom4;
    if ((KnotPts[i] <= t) && (t<KnotPts[i+1]))
      value = 1.0;
    else   value = 0.0;
    }
```

```
  return(value);              혼합함수 값
}
```

List 1 NURBS 혼합함수 모델링

알고리즘은 노트벡터만을 계산하기 위해 작성되었기 때문에 웨이트 포인트에 대한 사항은 기본값으로 처리했다.

3.2 복수 노트 제어

복수 노트의 이용한 곡선의 제어는 넌유니폼 노트벡터를 사용한다는 것으로 해석될 수 있다. 넌유니폼 노트벡터에서 내부 노트가 계수 만큼 반복하면 단이 생성된다. 즉, 복수 노트벡터는 0 길이의 스팬을 만들게 된다. 이것은 오픈 유니폼과 동일한 수학적 내용을 가지며, 그 결과 기본함수의 지원 범위가 감소하게 된다.

만일 노트벡터가 제공되지 않은 형상에서 노트값을 제어하기 위해서는 스팬 길이에 비례하는 내부 노트값을 구성한다.[3] 이러한 경우는 정확하게 오픈 넌유니폼 B-스플라인 곡선이된다.

곡선의 각 스팬의 길이를 $c_i=|B_{i+1}-B_i|$라 할 때 노트벡터의 각 노트 값은 다음과 같다.

$$x_i=0$$

$$x_{i+k}=\left(\frac{\left(\frac{i}{n-k+2}\right)c_{i+1}+\sum_{j=1}^{i}c_j}{\sum_{i=1}^{n}c_i}\right)(n-k+2)$$

$$1\le i < n-k+1$$

$$x_i=n-k+2 \qquad n+1\le i < n+k$$

동일하게 공간을 점유하는 제어점은 등간격을 가지는 정수 내부 노트를 가지면서 오픈 유니폼 노트벡터를 구성하기 때문에 제어점 간의 상대적 거리가 급속히 변화하지 않는 경우는 넌유니폼과 오픈 유니폼 B-스플라인 곡선은 큰 차이를 보이지 않는다.

복수 제어점과 복수 노트 값을 비교할 때, 가장 큰 차이는 복수 노트 값은 관련된 노트에서 형상의 연속성을 감소시킨다는 점이다. $m\le k-1$인 m개의 복수 노트 값은 x_i에서 C^{k-m-1}의 연속성을 가지게 된다. 그러므로, 복수 노트 값의 사용은 형상에서의 불연속성을 발생시키는 단을 만들게 된다. 즉, 복수 노트 값을 사용하므로써 제어 다각형의 정점에서 형상을 분리시킬 수 있다.

3.2 노트 삽입에 의한 분할

정의된 노트벡터에 추가적인 노트 값의 삽입으로 보다 유연성을 증가시킬 수 있다. 이 효과로, 주어진 노트 값 간격에 대해 분할 다항 구간을 등간격으로 두 개 구간으로 나눈다. 즉, 노트 삽입에 의한 B-스플라인 곡선의 제어가 가능하게 된다. 정의된 노트 벡터에 복수 개의 노트값을 동시에 삽입할 수도 있다. 이러한 것은 근본적인 형상의 변화없이 곡선의 유연성을 제어할 수 있다.

이러한 방법은 특정 B-스플라인 곡선을 표현할 수 있는 데에는 최소한의 정점 갯수만이 요구된다는 것에서 출발한다. 즉, 하나의 B-스플라인 곡선에 대하여 최소 이상의 정점을 가지는 정의 다각형은 무한히 존재한다는 것이다. 기본 노트벡터의 곡선 $P(t)$에 대하여, 새로운 노트벡터 [Y]를 가지는 곡선 $R(s)$를 다음과 같이 정의한다. $m>n$일 때,

$$R(s)=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i,j}^{k}B_i \tag{3}$$

$[Y]=[\ y_1\ y_2\ \dots\ y_{m+k+1}\ ]$

이다. 여기에서 $P(t)=R(s)$가 되는 새로운 정의 다각형 정점 C_j는 $\sum_{i}^{n+1}\alpha_{i,j}^{k}=1$일 때

$$C_j=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{i,j}^{k}B_j \qquad 1\le i\le n,\ 1\le j\le m \tag{4}$$

$$\alpha_{i,j}^{1}=\begin{cases}1, & x_i\le y_j < x_{i+1}\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

$$\alpha_{i,j}^{k}=\frac{y_{j+k-1}-x_i}{x_{i+k-1}-x_i}\alpha_{i,j}^{k-1}+\frac{x_{j+k}-y_{j+k-1}}{x_{i+k}-x_i+1}\alpha_{i+1,j}^{k-1} \tag{5}$$

로 된다. 결론적으로 원래 노트 벡터가 유니폼인 경우는 노트 삽입이 발생한 후에는 넌유니폼으로 변화된다.

4. 결론

본 연구에서는 모델링 인터페이스 제작에 활용을 목적으로 수행되었다.

① NURBS 형상 모델링의 제어 시스템으로서 혼합함수의 세가지 기하요소 (컨트럴 포인트, 노트벡터, 그리고 웨이트 포인트) 중 사용자의 제어가 어려운 노트벡터에 대한 기하분석을 시도하여,

그 형상 제어 특성을 파악했다.

② 노트벡터가 제공하는 컨트럴 형상의 변형없는 사용자 제어를 위한 방법으로, 복수 노트를 이용하는 방법을 적용하여, 형상을 분리시키는 방법으로 응용했다.

③ B-스플라인 형상의 노트벡터에 대한 추가적인 노트 삽입을 형상 제어 요소로 이용하여, 컨트럴 포인트 입력에 의한 생성 형상의 재구성에 응용할 수 있음을 파악했다.

참고문헌

[1] Piegl, Les, "The NURBS BOOK" pp. 50, 1995, Springer (USA)
[2] 김희중, 정재현, "B-스플라인 자유형상체 생성 알고리즘 개발에 관한 연구" '97년 한국정밀공학회 춘계학술대회
[3] Rogers, David & Adams, J. "Mathematical elements for CG" pp. 328, 1990, McGraw Hill (USA)