

단일 입력 퍼지논리제어기의 안정성 분석

Stability Analysis of Single-input Fuzzy Logic Controller

최 병 제
대구대학교 정보통신공학부

Byung-Jae Choi
School of Computer and Communication Eng., Taegu University
E-mail : bjchoi@taegu.ac.kr

ABSTRACT

According as the controlled plants become more complex and large-scaled, the development of more intelligent control schemes is required in the control field. A fuzzy logic control (FLC) is one of proper schemes for this tendency. Recently, fuzzy control has been applied successfully to many industrial applications due to a number of advantages. But it still has some disadvantages. The conventional FLC has many tuning parameters: membership functions, scaling factors, and so forth. In order to improve this problem, a single-input fuzzy logic control (SFLC) which greatly simplifies the design process of the conventional FLC was proposed. Many research has also been proposed to develop the stability analysis of the FLC. In this paper we analyze the absolute stability of the SFLC. We first expand a nonlinear controlled plant into a Taylor series about a nominal operating point. And a fuzzy control system is transformed into a Lure system with nonlinearities. We also prove that the closed-loop system with the SFLC satisfies the sector condition globally.

Keywords : Fuzzy Logic Control, Absolute Stability, Perturbed Lure System, Sector Condition

1. 서 론

산업 사회의 발달이 가속화되면서 제어 대상 시스템은 점점 더 복잡해지고 대규모화되고 있다. 이러한 시스템의 대규모화와 복잡성은 보다 더 지능적인 제어 기법을 요구하게 되는데, 그 하나의 방안으로 퍼지 이론이 널리 연구되고 있다.

최근에 퍼지논리제어기(FLC)는 제어 알고리즘 자체가 가지고 있는 많은 장점들로 인하여, 다양한 분야의 산업 응용에서 성공적으로 적용되고 있다. 그러나 퍼지논리제어기가 가지고 있는 문제점도 많이 존재한다.

특히, 안정성 분석 도구의 부족과 조정 변수의 과다 현상은 퍼지논리제어기의 산업 현장 적용을 주저하게 만드는 요인이 되고 있다.

기존의 퍼지논리제어기는 많은 조정 변수를 가지고 있다. 예를 들면, 멤버쉽 함수, 스케일링 변수 등의 조정을 필요로 하는 변수의 수가 너무 많다. 만약 오차와 오차의 변화

만을 입력 변수로 사용하는 비교적 간단한 퍼지논리제어기라 할지라도 이들의 적절한 선택은 매우 까다로운 문제가 아닐 수 없다. 하지만 전형적인 퍼지논리제어기는 이들 두 변수 뿐만 아니라 모든 상태 변수들을 필요로 한다. 이 때, 제어기 설계의 복잡성은 거의 기하급수적으로 증가하게 된다.

이러한 조정 변수의 수를 줄이기 위한 연구는 이미 오래전부터 다양하게 진행되어 왔다. 참고문헌[1]에서는 슬라이딩 모드 제어 기법에 근거한 퍼지논리제어기의 설계를 제안하였고, 참고문헌[2-3]에서는 제어 대상인 플랜트가 최소 위상 특성을 나타낼 경우에는 단지 하나의 전건부 변수만을 가지는 단일 입력 퍼지논리제어기(SFLC)를 설계할 수 있음을 보였다. 아울러 제안된 제어기가 가지는 다양한 특성들도 분석하였다. 참고문헌[4]에서도 퍼지논리제어기의 간단한 설계 방안을 제시하고 있다. 이들 외에도 퍼지논리제어기의 간단한 설계에 대한 다양한 방법들이 제안되고 있다.

퍼지논리제어기의 안전성 분석에 관한 연구

결과들도 널리 발표되고 있다. 참고문헌[5]에서는 퍼지논리제어기의 안정성 분석을 위하여 기술 함수(describing function) 기법을 사용하였고, 참고문헌[6]에서는 퍼지논리제어기를 가지는 SISO 및 MIMO 시스템의 경우에 원 기준법(circle criteria scheme)을 사용할 수 있음을 보였다. 참고문헌[7]에서는 안정성 분석을 수행하기에 적합한 새로운 형태의 퍼지논리제어기를 제시하였다. 그리고 참고문헌[8]에서는 기존 퍼지논리제어기의 강인 안정성 분석을 제시하였다.

본 논문에서는 참고문헌[2-3]에서 제안하였던 단일 입력 퍼지논리제어기(SFLC)에 대하여 안정성 분석을 제안한다. 이를 위하여 먼저 비선형 제어 대상 플랜트를 어떤 동작점(nominal operating point)에 대하여 Taylor 급수로 전개한다. 그 결과 단일 입력 퍼지논리제어기를 가지는 전체 시스템이 비선형 성분을 가지는 Lure의 시스템으로 변환됨을 보인다. 또한 본 논문에서는 단일 입력 퍼지논리제어기를 가지는 전체 시스템이 전역적으로 섹터 조건(sector condition)을 만족함을 보인다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 먼저 다음의 제2장에서는 참고문헌[2-3]에서 제안하였던 단일 입력 퍼지논리제어기의 설계에 대하여 간략하게 설명하고, 계속해서 본 논문의 핵심인 단일 입력 퍼지논리제어기의 안정성 분석을 제3장에서 제시한다. 마지막으로 제4장에서 결론을 기술한다.

II. 단일 입력 퍼지논리제어기

제어 대상 시스템이 최소 위상의 특성을 가지고 있으면, 이들을 위한 퍼지논리제어기의 제어 규칙표는 스큐 대칭(skew-symmetric)인 특징을 보인다[1-3]. 이러한 사실로부터 단일 입력 퍼지논리제어기(Single-input Fuzzy Logic Control)를 설계할 수 있다[2-3].

먼저 제어 대상 플랜트는 다음과 같이 선형 혹은 비선형의 n -차 상태 방정식으로 표현할 수 있다:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u), \\ y &= x \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,

$$\begin{aligned} x &= [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \\ &= [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T, \end{aligned} \quad (2)$$

이고, $F(x, u)$ 는 플랜트의 동력학과 미지의 외란을 나타내며, 부분적으로만 알려진 어떤 연속 함수이다. $x(t) \in R^n$ 는 플랜트의 상태 벡터이고, $u(t) \in R$ 와 $y(t) \in R$ 은 각각 시스템의 입력과 출력을 나타낸다.

제어 목적은 출력 $y(t)$ 가 기준 입력 신호인

$x_d(t)$ 를 추종하게 하는 것이다. $e(t)$ 는 다음과 같이 정의되는 추종 오차 벡터이다.

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - x_d(t) \\ &= [e(t), \dot{e}(t), \dots, e^{(n-1)}(t)]^T. \end{aligned} \quad (3)$$

오차와 오차의 변화를 제어 규칙의 전진부 변수로 사용하는 기존의 2-입력 퍼지논리제어기(PD-type FLC)는 다음과 같은 제어 규칙 형태를 가진다.

$$\begin{aligned} R_{old}^i: & \text{ If } e \text{ is } LE_i \text{ and } \dot{e} \text{ is } LDE_j, \\ & \text{ then } u \text{ is } LU_{ij}, \\ i &= 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

여기서 LE , LDE , 그리고 LU 는 각각 플랜트의 상태 변수 e , \dot{e} , 그리고 제어 입력 u 에 의하여 취해지는 언어 값(linguistic value)이다.

그런데 만약 제어 대상 플랜트가 최소 위상의 특성을 가진다면, 퍼지논리제어기를 위한 제어 규칙표는 스큐-대칭인 형태를 보이게 된다. 즉, 제어 입력 신호의 절대 크기인 $|u|$ 가 스윙칭 직선으로 불리는 어떤 직선으로 부터의 거리에 비례하게 된다. 이것을 관계식으로 표현하면 다음과 같다.

$$u \propto -d_s, \quad (4)$$

여기서 d_s 는 다음과 같이 정의되는 부호를 가지는 거리(signed distance)라는 하나의 새로운 변수이다.

$$d_s = \frac{\dot{e} + \lambda e}{\sqrt{1 + \lambda^2}}. \quad (5)$$

이 때, 퍼지논리제어기의 제어 규칙표는 페이즈 플랜(phase plane)의 2-차원 대신에 d_s 라는 하나의 변수에 의해서 결정되는 1-차원상에서 구축될 수 있다. 이를 단일 입력 퍼지논리제어기(SFLC)라고 하고, 다음과 같이 간단한 제어 규칙 형태를 가진다.

$$R_{new}^k : \text{ If } d_s \text{ is } LDL_k \text{ then } u \text{ is } LU_k,$$

여기서 LDL_k 는 k -번째 규칙에서 부호를 가지는 거리 변수의 언어 값이다. 이를 제어 규칙표로 정리하면 다음의 표1과 같다.

표 1. 단일 입력 퍼지논리제어기를 위한 제어 규칙표

d_s	LDL_{-2}	LDL_{-1}	LDL_0	LDL_1	LDL_2
u	LU_2	LU_1	LU_0	LU_{-1}	LU_{-2}

표 1에서, 아래 첨자인 $-2, -1, 0, 1$, 그리고 2 는 각각 Negative Big (NB), Negative Small

(NS), ZeRo (ZR), Positive Small (PS), 그리고 Positive Big (PB)을 나타내는 퍼지 언어 값이다.

단일 입력 퍼지논리제어기에서 제어 규칙의 수는 제어 대상 플랜트의 전체 상태 변수를 입력으로 사용하는 경우는 물론이고, 2-입력 퍼지논리제어기에 비해서도 상당히 줄어 들었다. 따라서 제어 규칙의 설정이나 재조정 등이 매우 쉽게 이루어 질 수 있다. 뿐만 아니라 참고문헌[2-3]에서 입증하였듯이 제어 성능 또한 기존의 퍼지논리제어기에 비하여 떨어지지 않는다.

이상의 논의는 n -차원의 일반적인 경우로 쉽게 확장할 수 있다. 이 경우에는 제어 입력의 절대 크기가 스위칭 직선이 아닌 스위칭 초평면(switching hyperplane)에서의 거리에 비례하게 된다. 따라서 2-차원에서 부호를 가지는 거리 변수였던 d_s 는 이제 다음과 같이 일반화된 부호를 가지는 거리 변수인 D_s 로 바뀌게 된다.

$$D_s = \frac{e^{(n-1)} + \lambda_{n-1}e^{(n-2)} + \dots + \lambda_2\dot{e} + \lambda_1e}{\sqrt{1 + \lambda_{n-1}^2 + \dots + \lambda_2^2 + \lambda_1^2}} \quad (6)$$

이 경우에도 단일 입력 퍼지논리제어기를 위한 제어 규칙표는 d_s 대신에 D_s 가 사용된 것을 제외하고는 앞에서 제시하였던 표 1과 같다.

III. 단일 입력 퍼지논리제어기의 안정성 분석

먼저 비선형의 제어 대상 플랜트를 다음과 같이 어떤 동작점과 입력 값인 (x_0, u_0) 에 관하여 Taylor 급수로 전개한다.

$$\dot{x} = A_0x + B_0u + g(x, u), \quad (7)$$

$$y = C_0^T x,$$

여기서

$$A_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)}, \quad (8)$$

$$B_0^T = [0 \quad b(x_0)], \quad (9)$$

그리고

$$C_0^T = [1 \quad 0]. \quad (10)$$

여기서 $g(x, u)$ 에는 모델링 오차, 불확실 성분, 그리고 외란 등을 포함한다. 이 때, 식(7)은 perturbed Lure system이라고 한다.

본 논문에서의 안정성 분석은 제2장에서 제시하였던 단일 입력 퍼지논리제어기를 대상으로 한다. 따라서 n -차원의 일반적인 경우에서의 단일 입력 퍼지논리제어기를 고려하면 제어 규칙의 형태는 R_{new}^k 와 비슷하게 다

음과 같이 정의된다.

$$R_{GSI}^k : \text{If } D_s \text{ is } LGDL_k \text{ Then } u \text{ is } LU_k.$$

표 1로부터 단일 입력 퍼지논리제어기의 출력은 영 동작(zero action)에 대하여 대칭이고, 어떤 선형 이득에 의하여 제한된다는 사실을 알 수 있다. 따라서 제어 입력 u 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u = -\phi(D_s) \quad (11)$$

즉, $\phi(\cdot)$ 는 섹터 $[0, \tau]$ 에 포함되는 임의의 비선형 함수이고, 여기서 τ 는 양의 상수이다.

단일 입력 퍼지논리제어기를 가지는 전체 폐회로 시스템을 블록 다이어그램으로 표현하면 다음의 그림 1과 같다.

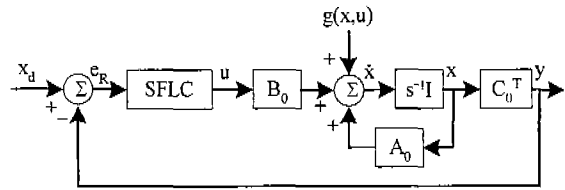


Fig. 1. SFLC를 가지는 전체 시스템의 블록 다이어그램

$x_d = 0$ 일 때, D_s 는 다음과 같이 요약될 수 있다.

$$\begin{aligned} D_s &= \frac{e^{(n-1)} + \lambda_{n-1}e^{(n-2)} + \dots + \lambda_2\dot{e} + \lambda_1e}{\sqrt{1 + \lambda_{n-1}^2 + \dots + \lambda_2^2 + \lambda_1^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}} (x^{(n-1)} + \lambda_{n-1}x^{(n-2)} + \dots \\ &\quad + \lambda_2\dot{x} + \lambda_1x) \\ &= C_{d0}^T x, \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$C_{d0}^T = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 1], \quad (13)$$

$$\lambda_n = 1.$$

이 때, 식(7)의 Lure 시스템은 다음과 같이 요약된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + g(x, u), \\ u &= -\phi(D_s), \end{aligned} \quad (14)$$

$$D_s^T = C_d^T x,$$

여기서 $A = A_0, B = K_u B_0$ 이고, $C_d^T = K_d C_{d0}^T$ 이다.

식(11)에서 설명했듯이 $\phi(\cdot)$ 는 다음의 섹터 조건(sector condition)을 전역적으로 만족하는

시불변(time-invariant) 비선형 성분이다.

$$\phi(D_s)[\phi(D_s) - \tau D_s] \leq 0 \quad (15)$$

이제 다음과 같이 제안된 비선형의 단일 입력 퍼지논리제어기가 절대적으로 안정하다(absolutely stable)는 사실을 입증할 수 있다.

먼저 식(14)의 시스템을 고려하자. 여기서 A는 Hurwitz이고, (A, B, C_d)는 G(s) = C_d(sI - A)⁻¹B의 minimal realization이다. 그리고 비선형 성분인 g(x,u)는 다음과 같이 제한된다.

$$\|g(x,u)\|_2 \leq \nu \|x\|_2 \leq \frac{\varepsilon_g}{2\|P\|_{12} + 2\eta\tau^2\|C_{d1}\|_2^2} \|x\|_2, \quad (16)$$

여기서

$$\|P\|_{12} = [\lambda_{\max}(P^*P)]^{1/2}, \quad \nu > 0, \quad \varepsilon_g > 0, \quad (17)$$

이고, $\phi(\cdot)$ 는 섹터 조건 (15)를 전역적으로 만족하는 시불변 비선형 성분이다. 이 때, 다음의 부등식 (18)이 만족되도록 하면서 A의 고유치로 $-\frac{1}{\eta}$ 을 취하지 않는 $\eta \geq 0$ 가 존재하면, 그 시스템은 절대적으로 안정하다.

$$\text{Re}[1 + (1 + j\eta\omega)\tau G(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

여기서

$$G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + j \text{Im}[G(j\omega)]. \quad (19)$$

이러한 사실은 다음과 같이 입증할 수 있다. 먼저 다음의 식(20)과 같이 Lure-형의 리아푸노부 함수(Lure-type Lyapunov function)를 고려하자[9].

$$V_s = x^T P x + 2\eta \int_0^{D_s} \phi(\sigma)\tau d\sigma \quad (20)$$

식(20)의 양 변을 시간에 대하여 미분하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= x^T(PA + A^T P)x + 2x^T P B u \\ &\quad + 2x^T P g + 2\eta\tau \dot{D}_s \phi \\ &= x^T(PA + A^T P)x - 2x^T P B \phi \\ &\quad + 2x^T P g + 2\eta\tau\phi C_{d1}(Ax + Bu + g). \end{aligned} \quad (21)$$

섹터 조건으로부터 다음의 식(22)가 만족됨을 알 수 있다.

$$-2\phi(D_s)[\phi(D_s) - \tau D_s] \geq 0. \quad (22)$$

따라서,

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &\leq x^T(PA + A^T P)x - 2x^T P B \phi + 2\eta\tau\phi C_{d1}(Ax + Bu) \\ &\quad + 2x^T P g + 2\eta\tau\phi C_{d1}g - 2\phi(\phi - \tau C_{d1}x) \\ &\leq x^T(PA + A^T P)x - 2x^T(PB - \eta\tau A^T C_{d1}^T - \tau C_{d1}^T)\phi \\ &\quad - (2 + 2\eta\tau C_{d1}B)\phi^2 + 2x^T P g + 2\eta\tau\phi C_{d1}g. \end{aligned} \quad (23)$$

양의 상수 η 는 다음 식이 만족되도록 선택한다.

$$2(1 + \eta\tau C_{d1}B) = w^2. \quad (24)$$

주어진 조건 (18)로부터 다음의 식(25)를 만족하는 대칭이면서 양한정 행렬(symmetric positive-definite matrix)인 P와 P₀, 어떤 벡터 L, 그리고 양의 상수 ε_p 가 존재한다[9].

$$PA + A^T P = -L^T L - \varepsilon_p P$$

$$PB = \tau C_{d1}^T + \eta\tau A^T C_{d1}^T - wL^T \quad (25)$$

$$\varepsilon_p P = \varepsilon_p P_0 + \varepsilon_g I.$$

그러므로,

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &\leq -\varepsilon_p x^T P x + 2x^T P g + 2\eta\tau\phi C_{d1}g \\ &\quad - [x^T L^T L x - 2w\phi x^T L^T + w^2 \phi^2] \\ &\leq -\varepsilon_p x^T P x - [Lx - w\phi]^T [Lx - w\phi] \\ &\quad + 2\|x\|_2 \|P\|_{12} \|g\|_2 + 2\eta\tau^2 \|C_{d1}\|_2^2 \|x\|_2 \|g\|_2. \end{aligned} \quad (26)$$

식 (17)과 (18)로부터 부등식 (26)은 다음과 같이 요약된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &\leq -x^T(\varepsilon_p P - \varepsilon_g I)x \\ &\leq -\varepsilon_p x^T P_0 x, \end{aligned} \quad (27)$$

즉, 제안한 단일 입력 퍼지논리제어기를 가지는 전체 시스템은 절대적으로 안정하다.

IV. 결론

본 논문에서는 먼저 참고문헌[2-3]에서 제시한 단일 입력 퍼지논리제어기에 관하여 간단히 설명하였다. 이들이 가지는 여러 가지 특징들은 참고문헌에서 자세히 분석하였으므로 여기서는 생략하였다.

계속해서 본논문의 핵심인 절대 안정성에 관하여 분석하였다. 즉, 단일 입력 퍼지논리제어기가 섹터 조건을 만족한다는 사실과 제어 대상 시스템이 Lure-형의 시스템으로 변환될 수 있다는 사실로부터 단일 입력 퍼지논리제어기를 채택한 전체 시스템은 절대적으로 안정하다는 사실을 입증하였다.

추후 과제로는 최소 위상 특성을 나타내는 임의의 비선형 시스템에 대하여 수치적인 예를

통하여 입증하고자 한다.

VI. 참고문헌

- [1] R. Palm, "Robust Control by Fuzzy Sliding Mode", *Automatica*, vol. 30, no. 9, pp. 1429-1437, 1994.
- [2] B.-J. Choi, S.-W. Kwak and B. K. Kim, "Design and Stability Analysis of a Single-Input Fuzzy Logic Controller," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.(B)*, vol. 30, no. 2 pp. 303-309, 2000.
- [3] B.-J. Choi, S.-W. Kwak and B. K. Kim, "Design of a Single-Input Fuzzy Logic Controller and Its Properties," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 106, no. 3, pp. 299-308, 1999.
- [4] H.-X. Li and H. B. Gatland, "Conventional Fuzzy Control and Its Enhancement," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.(B)*, vol. 26, no. 5, pp. 791-797, 1996.
- [5] W. J. M. Kickert and E. H. Mamdani, "Analysis of A Fuzzy Logic Controller," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1, no.1, pp. 29-44, 1978.
- [6] K. S. Ray and D. D. Majumder, "Application of Circle Criteria for Stability Analysis of Linear SISO and MIMO Systems Associated with Fuzzy Logic Controller," *IEEE Trans. Syst., Man, and Cyb.*, vol. 14, no. 2, pp. 345-349, 1984.
- [7] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, pp. 135-156, 1992.
- [8] C.-C. Fuh and P.-C. Tung, "Robust Stability Analysis of Fuzzy Control Systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 88, pp. 289-298, 1997.
- [9] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Co., New York, 1996.
- [10] S. Galichet and L. Foulloy, "Fuzzy controllers : Synthesis and Equivalences," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 3, no. 2, pp. 140-148, 1995.
- [11] H. L. Malki, H. Li, and G. Chen, "New design and stability analysis of fuzzy PD control systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 2, no. 4, pp. 245-254, 1994.