

# 직교이방성 층과 반무한체 사이의 계면균열에 대한 좌굴

정경문\*(전남대 대학원 기계공학과), 범현규(전남대 기계공학과)

## Buckling for an Interface Crack Between an Orthotropic Layer and a Half-Space

K M Jeong(Mech. Eng Dept., CNU), H G Beom(Mech. Eng. Dept., CNU)

### ABSTRACT

The buckling of an orthotropic layer bonded to an isotropic half-space with an interface crack subjected to compressive load under plane strain is considered. Basic stability equations derived from the mathematical theory of elasticity are applied to describe the buckling behavior. A system of homogeneous Cauchy-type singular integral equations of the second kind is solved numerically by utilizing Gauss-Chebyshev integral formulae. Numerical results for the buckling load are presented for various delamination geometries and material properties of both the layer and half-space.

**Key Words** Orthotropic(직교이방성), Interface crack(계면균열), Half-space(반무한체), Buckling(좌굴)

### 1. 서론

복합재료에서 자주 발견되는 층간박리는 제조과정이나 축방향으로 하중을 받을 때 여러 가지의 손실을 가져온다. 층간박리가 충분히 크면, 적층판은 비교적 작은 압축하중에서도 좌굴이 발생한다. 결국, 층간박리는 좌굴 후 진전하게 되어 재료의 안정성에 영향을 준다. 이러한 층간박리의 존재로 인한 재료 강도의 감소에 대한 이해가 복합재료 구조의 설계에 아주 중요하다.

복합재료의 압축강도에 대한 층간박리의 영향에 대해서는 많은 연구자들이 수행해왔다.<sup>(1),(2)</sup> 그들은 보(beam)와 평판의 고전적인 구조역학이론을 적용하여 좌굴 하중을 평가하였다. 최근에 Wang과 Takao<sup>(3)</sup>는 계면균열이 있는 반무한체에 접합된 등방성 층에 대한 좌굴을 해석하였다. 그들은 탄성학의 평형방정식과 균열선단에서의 정확한 경계조건을 이용하여 좌굴하중을 평가하였다.

본 연구의 목적은 탄성학의 평형방정식으로부터 유도된 안정성(stability) 방정식을 층과 반무한체에 각각 적용하여 좌굴 하중에 미치는 직교이방성의 영향에 대하여 해석하고자 한다. 계면균열을 갖는 직교이방성 층이 등방성 반무한체와 접합되었을 때의 좌굴하중을 재료 물성치와 기하학적 변수에 따라 해석한다.

### 2. 문제의 수식화

계면균열을 갖는 반무한체에 접합된 직교이방성 층의 형상을 Fig 1에 나타내었다. 적층구조는 자유 표면과 평행하게 균일한 압축변형을  $\epsilon_0$ 를 받고 있다. Fig 1에서 1과 2는 각각 층과 반무한체를 나타내며 앞으로 사용하게 될 수식에서 하첨자로 표기하였다. 탄성안정성을 이용하여 좌굴된 상태의 평형조건은 미소변위 증분과 압축하중,  $P_i$ 의 항으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{C_{11}}{C_{112} + C_{36}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{C_{55}}{C_{112} + C_{36}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x \partial y} - \frac{P_i}{C_{112} + C_{36}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{C_{55}}{C_{112} + C_{36}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{C_{22}}{C_{112} + C_{36}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y} - \frac{P_i}{C_{112} + C_{36}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (i=1, 2) \quad (1)$$

여기서 체력(body force)은 무시하고, 압축하중,  $P_i$ 는 다음과 같다.

$$P_1 = \frac{E_{111}}{1 - \nu_{121}\nu_{112}} \epsilon_0, \quad P_2 = \frac{E_{211}}{E_{111}} \frac{1 - \nu_{121}\nu_{112}}{1 - \nu_{221}\nu_{212}} P_1 \quad (2)$$

여기서  $E$ 는 Young 계수이고  $\nu$ 는 Poisson 비이다. 식 (1)의 미분방정식을 풀기 위해 다음과 같은 함수

$\phi_i(x, y)$ 를 도입한다.

$$u_i = -\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y}$$

$$v_i = \left( \frac{C_{11} - P_i}{C_{12} + C_{66}} \right) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{C_{66}}{C_{12} + C_{66}} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \quad (3)$$

식 (3)을 식 (1)에 대입하면, 첫 번째 식은 자동적으로 만족하고, 두 번째 식은 다음과 같다

$$\xi_{11} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^4} + \xi_{21} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial y^4} = 0 \quad (4)$$

$$\text{where } \xi_{11} = \frac{(C_{66} - P_i)(C_{11} - P_i)}{C_{22}C_{66}},$$

$$\xi_{21} = \frac{C_{66} - P_i}{C_{22}} + \frac{C_{11} - P_i}{C_{66}} - \frac{(C_{12} + C_{66})^2}{C_{22}C_{66}}, \quad (i=1, 2).$$

식 (4)의 미분방정식을 풀기 위해 함수  $\phi_i(x, y)$ 는 다음과 같이 가정한다.

$$\phi_i(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_i(x, t) \cos(tx) dt, \quad (i=1, 2) \quad (5)$$

식 (5)를 식 (4)에 대입하면  $\phi_i(x, y)$ 는 다음과 같다

$$\phi_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (A_1 e^{i\alpha_1 y} + B_1 e^{i\alpha_2 y} + C_1 e^{-i\alpha_1 y} + D_1 e^{-i\alpha_2 y}) \cos(tx) dt$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (A_2 e^{i\alpha_3 y} + B_2 e^{i\alpha_4 y}) \cos(tx) dt \quad (6)$$

여기서  $\alpha_n$  ( $i, j=1, 2$ )는 다음과 같다.

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\xi_{21} + \sqrt{\xi_{21}^2 - 4\xi_{11}}}{2}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\xi_{21} - \sqrt{\xi_{21}^2 - 4\xi_{11}}}{2}} \quad (7)$$

식 (6)을 식 (3)에 대입하고, 직교이방성 재료에 대한 응력-변위 증분 관계를 이용하여 층( $i=1$ )과 반무한체 ( $i=2$ )에 대한 변위와 응력 증분은 다음과 같다

$$u_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^2 (A_i \alpha_i e^{i\alpha_i y} + B_i \alpha_{2i} e^{i\alpha_{2i} y} - C_i \alpha_i e^{i\alpha_i y} - D_i \alpha_{2i} e^{i\alpha_{2i} y}) \sin(tx) dt$$

$$v_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^2 (A_i \beta_i e^{i\alpha_i y} + B_i \gamma_i e^{i\alpha_{2i} y} + C_i \beta_i e^{i\alpha_i y} + D_i \gamma_i e^{i\alpha_{2i} y}) \cos(tx) dt$$

$$\sigma_{xy} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^3 (A_i \alpha_{ic} e^{i\alpha_i y} + B_i \alpha_{id} e^{i\alpha_{2i} y} - C_i \alpha_{ic} e^{-i\alpha_i y} - D_i \alpha_{id} e^{-i\alpha_{2i} y}) \cos(tx) dt$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^3 C_{66} [A_i (\alpha_{1i}^2 - \beta_i) e^{i\alpha_i y} + B_i (\alpha_{2i}^2 - \gamma_i) e^{i\alpha_{2i} y} + C_i (\alpha_{1i}^2 - \beta_i) e^{-i\alpha_i y} + D_i (\alpha_{2i}^2 - \gamma_i) e^{-i\alpha_{2i} y}] \sin(tx) dt \quad (i=1, 2) \quad (8)$$

여기서  $C_2 = 0$ ,  $D_2 = 0$ 이다

$$\alpha_{ic} = \alpha_i (C_{12} + \beta_i C_{22}), \quad \alpha_{id} = \alpha_{2i} (C_{12} + \gamma_i C_{22}),$$

$$\beta_i = \frac{\alpha_{1i}^2 C_{66} - C_{11} + P_i}{C_{12} + C_{66}}, \quad \gamma_i = \frac{\alpha_{2i}^2 C_{66} - C_{11} + P_i}{C_{12} + C_{66}} \quad (9)$$

6개의 미지의 함수  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2$ 는 계면에서 연속조건과  $y=h$ 에서의 경계조건에 의해 결정된다

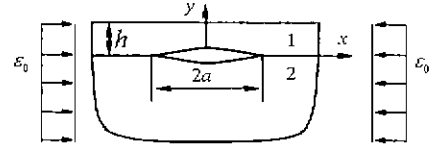


Fig. 1 A calculation model of delamination buckling

$$\sigma_{1xy}(x, h) = 0, \quad \sigma_{1x0}(x, h) = 0, \quad |x| < \infty$$

$$\sigma_{1xy}(x, 0) = \sigma_{2xy}(x, 0), \quad \sigma_{1xy}(x, 0) = \sigma_{2xy}(x, 0), \quad |x| < \infty$$

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0), \quad v_1(x, 0) = v_2(x, 0), \quad |x| > a \quad (10)$$

$$\sigma_{1xy}(x, 0) = \sigma_{2xy}(x, 0) = \sigma_{1xy}(x, 0) = \sigma_{2xy}(x, 0) = 0, \quad |x| < a$$

식 (8)을 식 (10)에 대입하면 다음과 같다

$$A_1 \alpha_1 e^{i\alpha_1 h} + B_1 \alpha_{1d} e^{i\alpha_1 h} - C_1 \alpha_1 e^{-i\alpha_1 h} - D_1 \alpha_{1d} e^{-i\alpha_1 h} = 0$$

$$A_1 (\alpha_{11}^2 - \beta_1) e^{i\alpha_1 h} + B_1 (\alpha_{12}^2 - \gamma_1) e^{i\alpha_1 h} + C_1 (\alpha_{11}^2 - \beta_1) e^{-i\alpha_1 h} + D_1 (\alpha_{12}^2 - \gamma_1) e^{-i\alpha_1 h} = 0$$

$$A_1 \alpha_{1c} + B_1 \alpha_{1d} - C_1 \alpha_{1c} - D_1 \alpha_{1d} = A_2 \alpha_{2c} + B_2 \alpha_{2d}$$

$$C_{166} [A_1 (\alpha_{11}^2 - \beta_1) + B_1 (\alpha_{12}^2 - \gamma_1) + C_1 (\alpha_{11}^2 - \beta_1) + D_1 (\alpha_{12}^2 - \gamma_1)] = C_{266} [A_2 (\alpha_{21}^2 - \beta_2) + B_2 (\alpha_{22}^2 - \gamma_2)]$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^2 [A_1 \alpha_{11} + B_1 \alpha_{12} - C_1 \alpha_{11} - D_1 \alpha_{12} - A_2 \alpha_{21} - B_2 \alpha_{22}] \sin(tx) dt = 0$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^2 [A_1 \beta_1 + B_1 \gamma_1 - C_1 \beta_1 + D_1 \gamma_1 - A_2 \beta_2 - B_2 \gamma_2] \cos(tx) dt = 0$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^3 (A_2 \alpha_{2c} + B_2 \alpha_{2d}) \cos(tx) dt = 0$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} t^3 [A_2 (\alpha_{21}^2 - \beta_2) + B_2 (\alpha_{22}^2 - \gamma_2)] \sin(tx) dt = 0 \quad (11)$$

여기서 두 개의 새로운 미지함수<sup>(4)</sup>를 이용한다.

$$f_u(x) = \frac{d}{dx} [u_1(x, 0) - u_2(x, 0)] \quad (12)$$

$$f_v(x) = \frac{d}{dx} [v_1(x, 0) - v_2(x, 0)]$$

Fig. 1과 관련하여 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$f_u(x) = 0, \quad f_v(x) = 0, \quad |x| > a \quad (13)$$

식 (8)의 변위를 식 (12)에 대입하고 식 (13)을 이용하면 Fourier 변환은 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$t^2 [A_1 \alpha_{11} + B_1 \alpha_{12} - C_1 \alpha_{11} - D_1 \alpha_{12} - A_2 \alpha_{21} - B_2 \alpha_{22}] = F_u(t)$$

$$t^2 [A_1 \beta_1 + B_1 \gamma_1 + C_1 \beta_1 + D_1 \gamma_1 - A_2 \beta_2 - B_2 \gamma_2] = F_v(t) \quad (14)$$

여기서  $F_u(t)$ 와  $F_v(t)$ 는 다음과 같다

$$F_u(t) = \frac{1}{t} \int_0^a f_u(\xi) \cos(t\xi) d\xi \quad (15)$$

$$F_v(t) = \frac{1}{t} \int_0^a f_v(\xi) \sin(t\xi) d\xi$$

식 (11)의 처음 네 개의 방정식과 식 (14)로부터 6개의 미지함수는  $f_u(x)$ 와  $f_v(x)$ 로 나타낼 수 있다.

$$A_1 = C_1 R_{11}(t) + D_1 R_{12}(t), \quad B_1 = C_1 R_{21}(t) + D_1 R_{22}(t)$$

$$A_2 = C_1 R_{31}(t) + D_1 R_{32}(t), \quad B_2 = C_1 R_{41}(t) + D_1 R_{42}(t)$$

$$C_1 = \frac{1}{f_{\Delta}^2} [F_v(t) R_{62}(t) - F_w(t) R_{52}(t)]$$

$$D_1 = \frac{1}{f_{\Delta}^2} [F_v(t) R_{51}(t) - F_w(t) R_{61}(t)] \quad (16)$$

$$\Delta = R_{51}(t) R_{62}(t) - R_{61}(t) R_{52}(t)$$

여기서  $R_v(t)$ 는 부록에 나타내었다.

식 (11)의 나머지 네 개의 적분방정식과 식 (14), (15)와 (16)를 이용하여 제 2종 제차 Cauchy-type 특이적분방정식을 얻을 수 있다

$$\omega_1 f_u(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_v(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a [f_u(\xi) K_{11}(\xi, x) + f_v(\xi) K_{12}(\xi, x)] d\xi = 0$$

$$- \omega_2 f_v(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_u(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a [f_u(\xi) K_{21}(\xi, x) + f_v(\xi) K_{22}(\xi, x)] d\xi = 0$$

$$\int_{-a}^a f_u(\xi) d\xi = 0, \quad |x| < a. \quad (17)$$

여기서  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ 와 kernels  $K_{ij}$ 는 부록에 나타내었다.

식 (17)의 적분방정식을 계산하기 위하여 Wang과 Takao<sup>(3)</sup>의 수치해석방법을 이용하였다. 제 2종 제차 Cauchy-type 특이적분방정식은 Gauss-Chebyshev 적분공식을 적용하면,  $2m$  개의 제차연립 방정식으로

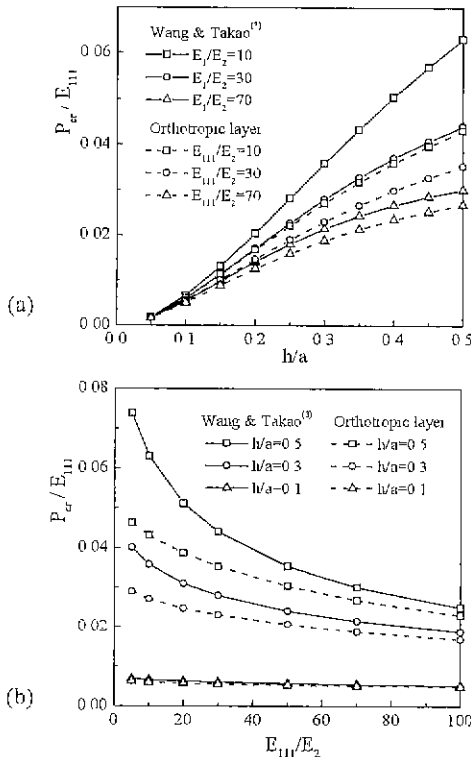


Fig 2 Variation of buckling load with geometrical parameter and with modulus ratio

바꾸어진다. 여기서  $m$ 은 대수방정식의 개수를 나타낸다 제차 연립방정식을 대수방정식으로 표현하면 다음과 같다

$$[a](Y) = 0 \quad (18)$$

여기서 행렬  $[Y]$ 는  $2m$  개의 미지수이고, 행렬  $[a]$ 는 압축하중을 포함한  $2m \times 2m$ 행렬이다. 행렬  $[Y]$ 에 대한 유용해(nontrivial solution)가 존재하기 위해서는 행렬  $[a]$ 의 행렬식(determinant)이 영이 된다는 조건을 이용하여 좌굴하중  $P_{cr}$ 를 구할 수 있다.

### 3. 결과 및 토론

층의 좌굴하중에 대한 수치해석은 이분법(bisection method)을 적용하였다 등방성 반무한체에 접합된 직교이방성 층의 재료는 E-glass/epoxy이고 물성치는 다음과 같다

$$E_{11} = 3.861 \times 10^4 \text{ MPa}, \quad E_{22} = 8.274 \times 10^3 \text{ MPa}$$

$$G_{12} = 4.137 \times 10^3 \text{ MPa}, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = 0.26, \quad \nu_{23} = 0.41$$

등방성 반무한체의 Poisson 비는 0.3으로 Wang과 Takao<sup>(3)</sup>의 해석과 일치시켰다. Fig 2는 직교이방성 층/등방성 반무한체의 좌굴하중과 등방성 층/등방성 반무한체의 좌굴하중<sup>(3)</sup>을 기하학적 변수와 강성비에 따라 나타내었다. 균열이 층의 두께에 비하여 크기

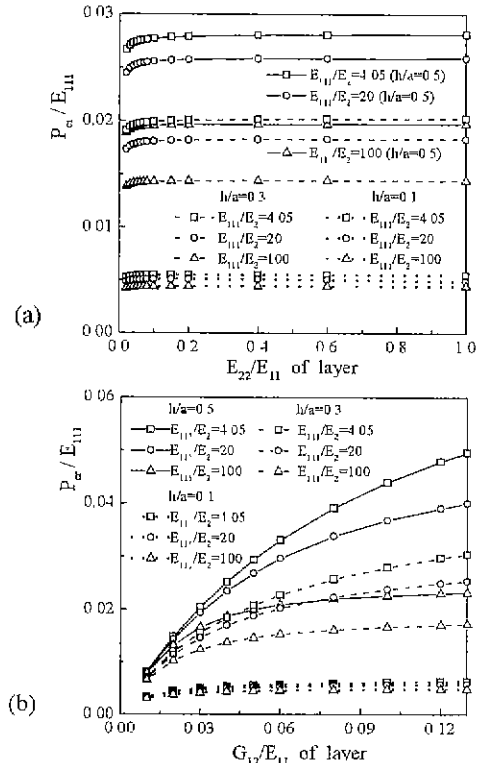


Fig 3 The effect of  $E_{22}$  and  $G_{12}$  for orthotropic layer with isotropic half-space

가 작아지면서 직교이방성 층은 등방성 층에 대한 좌굴하중보다 감소하였다. 또한, Fig 2(b)에서  $h/a$ 가 0.1인 경우에는 재료특성과 강성비에 의존하지 않는다. Fig 3은 직교이방성 층의  $E_{22}$ 와  $G_{12}$ 의 영향을 세 개의 다른 강성비와 기하학적 변수에 따라 나타내었다. 기하학적 변수가  $h/a=0$ 인 경우, 즉, 층의 두께가 작거나 계면균열의 크기가 두께에 비하여 클 때 직교이방성 층의  $E_{22}$ 와  $G_{12}$ 는 좌굴하중에 거의 영향을 주지 않는다. 직교이방성 층의  $E_{22}/E_{11}$ 이 0.1이하이고, 균열의 크기가 작을 때 강성비가 감소하면서 좌굴하중에 미치는 영향이 크다는 것을 알 수 있다(Fig. 3(a))  $h/a$ 가 크고  $G_{12}$ 가 감소하면서 좌굴하중은 급격하게 감소한다(Fig. 3(b)). 따라서 직교이방성이 좌굴에 미치는 영향은 기하학적 변수  $h/a$ 와 재료물성치 변화에 매우 큰 영향을 받는다.

#### 4. 결론

직교이방성 층과 반무한체 사이의 계면균열에 대한 좌굴하중을 평가하였다. 직교이방성 층의 재료물성치의 변화가 강성비와 기하학적 변수에 따라 좌굴에 미치는 영향을 나타내었다. 좌굴하중은 직교이방성 층의  $E_{22}/E_{11}$ 과  $G_{12}/E_{11}$ 이 강성비와 기하학적 변수에 따라 매우 민감함을 알 수 있다. 반무한체에 접합된 직교이방성 층의 구조를 등방성 층의 구조로 근사화 시킨다면 기대되지 않는 파괴가 발생하는 결과를 초래할 수 있다.

#### 후 기

이 논문은 2000년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음

#### 참고문헌

- Whitcomb, J D, "Finite Element Analysis of Instability Related Delamination Growth," J Comp Mater., Vol 15, pp. 403-426, 1981
- Bottega, W J, and Maewal, A., "Delamination Buckling and Growth in Laminates," ASME J. Appl Mech, Vol 50, pp. 184-189, 1983
- Wang, W X, and Takao, Y., "Load Buckling of a Layer Bonded to a Half-Space With an Interface Crack," ASME J. Appl Mech, Vol. 62, pp 64~70, 1995.
- Erdogan, F. and Gupta, G. D, "Layered Composites with an Interface Flaw," Int J Solids Structures, Vol 7, pp 1089-1107, 1971

#### 부 록

$$C_{11} = E_{11} \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta}, \quad C_{22} = E_{22} \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta}, \quad C_{66} = G_{12}$$

$$C_{12} = E_{11} \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta} = E_{22} \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{\Delta}$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$$

$$R_{11}(\dot{t}) = [a_{1c}(a_{12}^2 - \gamma_1) + a_{1d}(a_{11}^2 - \beta_1)]e^{-2t\alpha_{11}h/\Delta_1}$$

$$R_{12}(\dot{t}) = 2a_{1d}(a_{12}^2 - \gamma_1)e^{-t(\alpha_{11} + \alpha_2)h/\Delta_1}$$

$$R_{21}(\dot{t}) = -2a_{1c}(a_{11}^2 - \beta_1)e^{-t(\alpha_{11} + \alpha_2)h/\Delta_1}$$

$$R_{22}(\dot{t}) = -[a_{1c}(a_{12}^2 - \gamma_1) + a_{1d}(a_{11}^2 - \beta_1)]e^{-2t\alpha_{22}h/\Delta_1}$$

$$R_{31}(\dot{t}) = [a_{11}R_{11}(\dot{t}) + a_{12}R_{21}(\dot{t}) + a_{13}]/\Delta_2$$

$$R_{32}(\dot{t}) = [a_{21}R_{12}(\dot{t}) + a_{22}R_{22}(\dot{t}) + a_{23}]/\Delta_2$$

$$R_{41}(\dot{t}) = [a_{31}R_{11}(\dot{t}) + a_{32}R_{21}(\dot{t}) + a_{33}]/\Delta_2$$

$$R_{42}(\dot{t}) = [a_{41}R_{12}(\dot{t}) + a_{42}R_{22}(\dot{t}) + a_{43}]/\Delta_2$$

$$R_{51}(\dot{t}) = \alpha_{11}R_{11}(\dot{t}) + \alpha_{12}R_{21}(\dot{t}) - \alpha_{21}R_{31}(\dot{t}) - \alpha_{22}R_{41}(\dot{t}) - \alpha_{11}$$

$$R_{52}(\dot{t}) = \alpha_{11}R_{12}(\dot{t}) - \alpha_{12}R_{22}(\dot{t}) - \alpha_{21}R_{32}(\dot{t}) - \alpha_{22}R_{42}(\dot{t}) - \alpha_{12}$$

$$R_{61}(\dot{t}) = \beta_1R_{11}(\dot{t}) + \gamma_1R_{21}(\dot{t}) - \beta_2R_{31}(\dot{t}) - \gamma_2R_{41}(\dot{t}) + \beta_1$$

$$R_{62}(\dot{t}) = \beta_1R_{12}(\dot{t}) + \gamma_1R_{22}(\dot{t}) - \beta_2R_{32}(\dot{t}) - \gamma_2R_{42}(\dot{t}) + \gamma_1$$

$$\Delta_i = \alpha_{ic}(a_{i2}^2 - \gamma_i) - \alpha_{id}(a_{i1}^2 - \beta_i) \quad (i = 1, 2)$$

$$a_{11} = \alpha_{1c}(a_{22}^2 - \gamma_2) - \alpha_{2d}(a_{11}^2 - \beta_1)C_{166}/C_{266}$$

$$a_{12} = \alpha_{1d}(a_{22}^2 - \gamma_2) - \alpha_{2c}(a_{12}^2 - \gamma_1)C_{.66}/C_{266}$$

$$a_{13} = -\alpha_{1c}(a_{22}^2 - \gamma_2) - \alpha_{2d}(a_{11}^2 - \beta_1)C_{166}/C_{266}$$

$$a_{21} = a_{11}, \quad a_{22} = a_{12},$$

$$a_{23} = -\alpha_{1d}(a_{22}^2 - \gamma_2) - \alpha_{2c}(a_{12}^2 - \gamma_1)C_{166}/C_{266}$$

$$a_{31} = -\alpha_{1c}(a_{21}^2 - \beta_2) + \alpha_{2c}(a_{11}^2 - \beta_1)C_{166}/C_{266}$$

$$a_{32} = -\alpha_{1d}(a_{21}^2 - \beta_2) + \alpha_{2c}(a_{12}^2 - \gamma_1)C_{166}/C_{266}$$

$$a_{33} = \alpha_{1c}(a_{21}^2 - \beta_2)\alpha_{2c}(a_{11}^2 - \beta_1)C_{166}/C_{266}$$

$$a_{41} = a_{31}, \quad a_{42} = a_{32},$$

$$a_{43} = \alpha_{1d}(a_{21}^2 - \beta_2) + \alpha_{2c}(a_{12}^2 - \gamma_1)C_{166}/C_{266}$$

$$\omega_1 = Q_{11}^{\infty}/Q_{12}^{\infty}, \quad \omega_2 = Q_{22}^{\infty}/Q_{21}^{\infty}$$

$$K_{11}(\xi, x) = \frac{1}{Q_{12}^{\infty}} \int_0^{\infty} [Q_{11}(\dot{t}) - Q_{11}^{\infty}] \cos(t\xi) \cos(tx) dt$$

$$K_{12}(\xi, x) = \frac{1}{Q_{12}^{\infty}} \int_0^{\infty} [Q_{12}(\dot{t}) - Q_{12}^{\infty}] \sin(t\xi) \cos(tx) dt$$

$$K_{21}(\xi, x) = -\frac{1}{Q_{21}^{\infty}} \int_0^{\infty} [Q_{21}(\dot{t}) - Q_{21}^{\infty}] \cos(t\xi) \sin(tx) dt$$

$$K_{22}(\xi, x) = -\frac{1}{Q_{21}^{\infty}} \int_0^{\infty} [Q_{22}(\dot{t}) - Q_{22}^{\infty}] \sin(t\xi) \sin(tx) dt$$

$$Q_{i1}(\dot{t}) = [N_{i1}(\dot{t})R_{62}(\dot{t}) - N_{i2}(\dot{t})R_{61}(\dot{t})]/\Delta,$$

$$Q_{i2}(\dot{t}) = [N_{i2}(\dot{t})R_{61}(\dot{t}) - N_{i1}(\dot{t})R_{62}(\dot{t})]/\Delta, \quad (i = 1, 2).$$

$$Q_{ij}^{\infty} = \lim_{\dot{t} \rightarrow \infty} Q_{ij}(\dot{t}), \quad (i, j = 1, 2)$$

$$N_{11}(\dot{t}) = \alpha_{1c}R_{11}(\dot{t}) + \alpha_{1d}R_{21}(\dot{t}) - \alpha_{1c}$$

$$N_{12}(\dot{t}) = \alpha_{1c}R_{12}(\dot{t}) + \alpha_{1d}R_{22}(\dot{t}) - \alpha_{1d}$$

$$N_{21}(\dot{t}) = (a_{11}^2 - \beta_1)R_{11}(\dot{t}) + (a_{12}^2 - \gamma_1)R_{21}(\dot{t}) + (a_{11}^2 - \beta_1)$$

$$N_{22}(\dot{t}) = (a_{11}^2 - \beta_1)R_{12}(\dot{t}) + (a_{12}^2 - \gamma_1)R_{22}(\dot{t}) + (a_{12}^2 - \gamma_1)$$