

민감도 해석 기법을 이용한 베어링 파라미터 규명

이경백*(전남대 대학원 기계공학과), 김영배(전남대 기계공학과)

Identification of Parameter for Bearing Using Sensitivity Analysis Method

K. B. Lee(Mech. Eng. Dept., CNU), Y. B. Kim(Mech. Eng. Dept., CNU)

ABSTRACT

The developed method is proposed to identify rotor dynamic parameters. The method known imbalance vector, which renders over-determined linear system equation. The solution of the system equation can be obtained using least square method. The sensitivity analysis is performed to extract optimized solution, which is considered to be insensitive to inherent measurement errors. As an alternative approach to identify the parameters of bearings and rotor, adding a known imbalance to the rotor produces another equation set to make the system equations over-determined and linearly independent.

Key Words : rotor bearing system (회전체 베어링계), over-determined system (과잉해 시스템), least square method (최소자승법), sensitivity analysis (민감도 해석)

1. 서론

회전체 베어링계는 회전운동을 하는 회전체와 이를 지지하는 베어링으로 이루어진 구조물을 말하며, 회전체의 자이로 효과와 유체윤활 베어링의 회전속도 증속성 때문에 회전 속도가 변화함에 따라 그 동력학적 특성이 변화하는 경향을 갖는다. 회전체가 갖는 자이로 효과는 회전속도가 증가함에 따라 영향이 커지며, 이 영향을 수학적으로 수식화하여 나타낼 수 있다. 구름 베어링은 회전속도의 특성에 따라 특성이 거의 변화하지 않으나, 유체윤활 베어링의 경우는 강성계수와 감쇠계수가 회전속도에 따라 변화한다. 따라서 전체 계의 특성이 회전속도 증속성을 갖게 된다.⁽¹⁾

베어링은 선형이며 회전속도 의존성을 갖는 8개의 계수, 즉 4개의 강성계수와 4개의 감쇠 계수로 표현 한다고 가정하고, 자유진동에 의한 해석은 두 가지로 나눈다 하나는 일정한 회전속도에서 고유진동수와 모우드 형상에 대해 해석하는 경우이며, 다른 하나는 회전속도가 변화할 때 고유진동수의 변화를 계산하는 경우이다. 강제진동의 해석에는 비동기 가진응답 해석이 있고, 또 다른 특별한 경

우로서 불균형 응답 해석도 수행한다. 여기서 임계속도에 대한 해석이 이 두가지 해석에 앞서 선행된다.⁽²⁾

본 논문에서는 고유한 불평형 힘에 일어난 동기진동 신호를 사용하여 베어링의 강성계수와 감쇠계수를 규명하는 방법으로 고유한 불평형을 포함하는 시스템은 최종 방정식이 과잉해가 되기 때문에 다른 행렬식과 해를 구하는 것은 같은 속도에서 이미 알고있는 불평형 질량을 더함으로써 시스템을 과잉해인것과 선형 독립인 다른 식을 추가하여 풀러 베어링의 강성과 감쇠계수와 같은 로터 지지부의 특성을 규명하는 것이다.

2. 운동 방정식

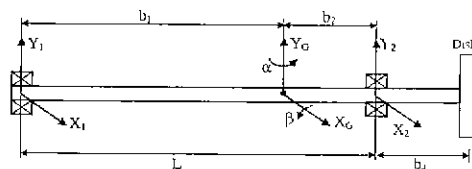


Fig. 1. Rigid rotor model

Fig. 1은 강제된 회전체 모델로 본 논문에서 제시한 방법을 설명할 단순 모델형상으로 무게중심에 대한 힘과 모멘트의 합은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= M \ddot{X}_G = F_{1x} + F_{2x} \\ \sum F_y &= M \ddot{Y}_G = F_{1y} + F_{2y} \\ \sum M_x &= \ddot{\beta} I_t + w \dot{\alpha} I_p = F_{2y} \cdot b_2 - F_{1y} \cdot b_1 \\ \sum M_y &= \ddot{\alpha} I_t - w \dot{\beta} I_p = F_{1x} \cdot b_2 - F_{2x} \cdot b_1 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $F = F^b + F^u$ 이고, F^b, F^u, w 은 각각 베어링력과 불평형력, 축의 속도를 의미하고, 이를 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$[L]\{\ddot{q}\} - w \cdot [G]\{\dot{q}\} = \{\bar{F}\} \quad (2)$$

위 식에서 $[L], [G]$ 은 질량관성 행렬과 자이로 행렬이고, $\{q\}$ 는 무게중심에 대한 변위와 회전의 벡터, $\{\bar{F}\}$ 은 전체 힘에 따른 모멘트이다.

각의 변화는 작다고 가정하고 식(2)를 일반좌표계로 변환하면 다음과 같다.

$$[\bar{L}]\{\dot{p}\} - w[\bar{G}]\{p\} = \{\bar{F}\} \quad (3)$$

여기서 $[\bar{L}], [\bar{G}]$ 는 각각 $[L], [G]$ 의 전달행렬이고, $\{p\} = [X_1, X_2, Y_1, Y_2]^T$ 이고, 최종 운동 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} [\bar{L}]\{\dot{p}\} + [C_{ol}][C] - w[\bar{G}]\{p\} + [C_{ol}][K]\{p\} \\ = \{\bar{F}^u\} + \{\Delta \bar{F}^u\} \end{aligned} \quad (4)$$

(4)식에 변수들은 부록에 나타내었고, 이를 조화운동으로 가정하여 일반좌표계의 특이해는 다음과 같다.

$$\{p\} = \{p_c\} \cos(\omega t) + \{p_s\} \sin(\omega t) \quad (5)$$

여기에서 아래첨자 c와 s는 각각 $\cos(\omega t)$ 과 $\sin(\omega t)$ 성분을 나타낸다. 위의 값 P를 식(4)에 대입하고 $\cos(\omega t)$ 과 $\sin(\omega t)$ 항을 합하여 시간항을 제거하면 8개의 선형 독립의 행렬 방정식이 생성되고, 시스템 방정식의 형태는 다음과 같다.

$$[S] \begin{Bmatrix} \dot{p}_c \\ \dot{p}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_c^u \\ \bar{F}_s^u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \bar{F}_c^u \\ \Delta \bar{F}_s^u \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서

$$[S] \cdot \text{특성행렬 } [8 \times 8] = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= [C_{ol}]\{[K] + [\bar{K}]\} - w^2[\bar{L}] \\ B &= w[C_{ol}]\{[C] + [\bar{C}]\} - w^2[\bar{G}] \end{aligned}$$

$$\{\bar{F}_c^u\} = \{\bar{F}^u\} \text{의 } \cos(\omega t) \text{ 성분}$$

$$\{\bar{F}_s^u\} = \{\bar{F}^u\} \text{의 } \sin(\omega t) \text{ 성분}$$

$$\{\Delta \bar{F}_c^u\} = mRw^2 \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ (b_2 + b_4) \sin \theta \\ -(b_2 + b_4) \cos \theta \end{Bmatrix}$$

$$\{\Delta \bar{F}_s^u\} = mRw^2 \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ (b_2 + b_4) \cos \theta \\ (b_2 + b_4) \sin \theta \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{U}\} = [U_{1x}, U_{2x}, U_{1y}, U_{2y}]^T$$

위의 벡터 $\{U\}$ 는 각각 $U_1 \cos \phi_1, U_2 \cos \phi_2, U_1 \sin \phi_1, U_2 \sin \phi_2$ 이다.

3. 베어링 파라미터

베어링과 회전체에서 8개의 동시에 발생하는 선형방정식과 미지의 12개 파라미터 $K_{1xx}, K_{2xx}, K_{1yy}, K_{2yy}, C_{1xx}, C_{2xx}, C_{1yy}, C_{2yy}, U_{1x}, U_{2x}, U_{1y}, U_{2y}$ 가 나타난다. 식(6)를 전개하고, 시스템 방정식을 다시 쓰면 12개 파라미터에 대해 8개의 식 밖에 없으므로 $\{P_B\}$ 를 구하기 위해 독립된 식이 더 필요하다. 식을 추가하는 것은 같은 속도 w 에서 이미 알고있는 불평형 질량을 더함으로서 시스템을 과잉해인 것과 또 다른 선형 독립인 식을 만들어 나타내면 다음과 같다.

$$[S_1]\{P_B\} = [A_4]\{\bar{v}\} + \{\bar{F}\} \quad (7)$$

여기서

$$[S_0] = \begin{bmatrix} [p_c] & w[p_s] & -w^2[I] \\ [p_s] & w[p_c] & -w^2[C_{ol}] \cdot [C_{ol}] \end{bmatrix} : [8 \times 12]$$

$$[S_1] = \begin{bmatrix} [p_c]_1 & w[p_s]_1 & -w^2[I] \\ [p_s]_1 & -w[p_c]_1 & -w^2[C_{ol}]^{-1} \cdot [C_{ol}] \\ [p_c]_2 & w[p_s]_2 & -w^2[I] \\ [p_s]_2 & -w[p_c]_2 & -w^2[C_{ol}]^{-1} \cdot [C_{ol}] \end{bmatrix} : [16 \times 12]$$

$\{P_B\}$: 추정해야 할 베어링 파라미터 $[K_{1xx}, K_{2xx}, K_{1yy}, K_{2yy}, C_{1xx}, C_{2xx}, C_{1yy}, C_{2yy}, U_{1x}, U_{2x}, U_{1y}, U_{2y}]^T$

$$[A_2] = w^2 \begin{bmatrix} [C_{oi}]^{-1} & 0 \\ 0 & [C_{oi}]^{-1} \end{bmatrix} : [8 \times 8]$$

$$[B_2] = w^2 \begin{bmatrix} [\bar{L}] & [\bar{G}] \\ -[\bar{G}] & [\bar{L}] \end{bmatrix} : [8 \times 8]$$

$$\{v\} = \{ \{p_c\}^T, \{p_s\}^T \}^T : [8 \times 1]$$

$$[A_4] = \begin{bmatrix} [A_2][B_2] & 0 \\ 0 & [A_2][B_2] \end{bmatrix} : [16 \times 16]$$

$\{\hat{F}\}$: 추가된 질량에 의해 발생한 가진힘 $[16 \times 1]$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [C_{oi}]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [C_{oi}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta F_c^k \\ \Delta F_s^k \end{bmatrix}$$

위의 $[\cdot]$, 와 $\{\cdot\}_i$ ($i=1,2$) 는 디스크에 불평형 질량 추가 전후에 만들어진 행렬과 벡터이고, 식 (11)은 미지의 파라미터 벡터 $\{P_u\}$ 를 구하는 식이 된다.

4. 민감도 함수

식(7)에서 파라미터 벡터 $\{P_B\}$ 가 응답벡터 $\{v\}$ 에 종속됨을 알 수 있고 또한 동기응답 함수 이므로 응답벡터 $\{v\}$ 나 $\{\bar{v}\}$ 에 관계된 파라미터 벡터 $\{P_B\}$ 를 구하는 것은 시스템 파라미터 민감도의 특성에 대한 양을 정의 함으로써 측정오차까지 계산하게 된다. 식(11)은 $A \cdot X = B$ 와 같은 과잉해선형 시스템으로 표현할 수 있고 파라미터 규명에서 많이 쓰이는 최소 자승법을 이용하여 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.⁽³⁾

$$\| \frac{dX}{dv_i} \| = \left(\frac{1}{|\lambda_{\min}| \text{ of } (A^T \cdot A)} \right) \cdot \| A^T \cdot \bar{E} \| \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \| \bar{E} \| &= \| (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot (V_2 - V_1 \cdot X) \| \\ &\leq \| (A^T \cdot A)^{-1} \| \cdot \| A^T \cdot (V_2 - V_1 \cdot X) \| \\ &= \left(\frac{1}{|\lambda_{\min}| \text{ of } (A^T \cdot A)} \right) \cdot \| A^T \cdot (V_2 - V_1 \cdot X) \| \end{aligned} \quad (9)$$

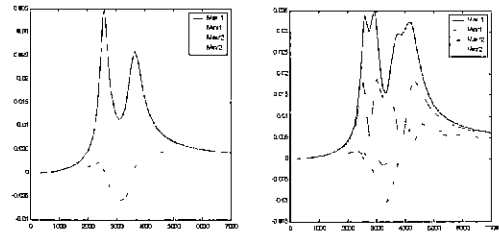
여기서 식(8)와 같이 파라미터 추정에서 오차의 크기는 측정오차를 포함하는 행렬 $(A^T \cdot A)$ 의 최소 고유치에 영향을 받게되고, 실제 시스템에서 행렬 A와 B는 측정오차에 민감하기 때문에 둔감도 함수로 바꾸는 것이 필요하고 다음과 같은 둔감도 함수를 나타낼 수 있다.

$$S_f = |\lambda_{\min}| \text{ of } ([S_f^T] \cdot [S_1]) \quad (10)$$

3. 실험고찰 및 해석

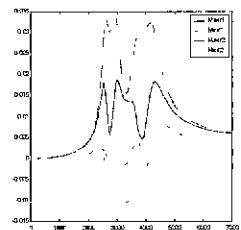
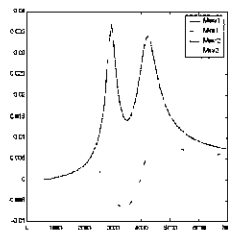
3.1 불평형 응답

질량 불평형을 추가하여 베어링이 위치한 평면에 대하여 그 위상차를 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 로 변화하여 회전체의 응답변화를 해석하였다.



(a)

(b)



(c)

(d)

(a) $\psi_1 = 0^\circ, \psi_2 = 0^\circ$ (b) $\psi_1 = 0^\circ, \psi_2 = 45^\circ$

(c) $\psi_1 = 0^\circ, \psi_2 = 180^\circ$ (d) $\psi_1 = 0^\circ, \psi_2 = 270^\circ$

Fig. 2. Synchronous response of rotor model

Fig. 2(a)의 경우 두 개의 임계속도가 나타나는 것을 알 수 있는데 각각 X축의 임계속도(2609rpm)이고, Y축의 임계속도(3654rpm)이다. 두 임계속도는 원통형 모드이고, 그 사이에는 후향휘돌림(backward whirl) 현상이 발생하였다. Fig. 2(b)는 평면 1의 궤적(orbit)이 평면 2보다 더 높은 진폭을 나타냈고, 임계속도는 적은 변화를 보였으나 궤

적은 더 복잡함을 나타냈다. 그리고 2539, 3548rpm 주위의 두 개의 피크(peak)는 원통형 모드를 나타내고, 다른 두 피크는 원뿔형 모드를 나타낼 것이다. 위상차가 180° 인 (c)의 경우는 (a)와 비슷한 응답특성을 위상차가 270° 인 (d)의 경우는 (b)와 비슷한 응답특성을 나타내는데 이는 위상차의 변화에 대해 평면 2의 불평형에 의한 모멘트 방향 때문이다. 위의 해석을 검증하기 위하여 Fig. 3에 나타낸 실험을 통한 궤적변화와 거의 비슷한 양상을 보여주었다.

둔감도 함수(S_f)는 디스크 평면(0-360°)에 추가된 질량 불평형의 위치에 따라 계산된다. 그러므로 불평형을 추가하는 이전과 이후의 둔감도 확인할 수 있다. 위상차 $\varphi_1 = 10^\circ$, $\varphi_2 = 100^\circ$ 와 3654rpm의 조건에서 입력 파라미터 값과 민감도에 따른 추정된 파라미터의 규명값과 오차를 Table 1에 나타내었다.

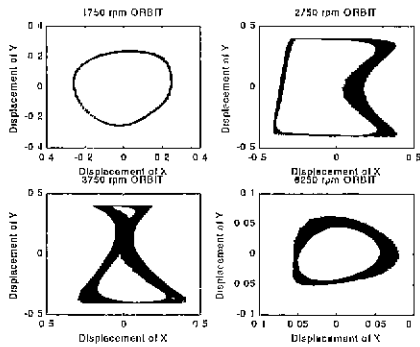


Fig. 3. Measured orbit shapes

Table 1. Input and estimated parameters

Parameter	Input	Estimated	% Error
K_{1xx}	297500	286165.25	-3.81
K_{2xx}	297500	328529.25	10.43
K_{1yy}	717500	717069.50	-0.06
K_{2yy}	717500	716926.00	-0.08
C_{1xx}	437	242.10	-44.6
C_{2xx}	437	219.55	-49.76
C_{1yy}	875	886.73	1.34
C_{2yy}	875	741.91	-15.21
U_{1x}	1.134×10^{-7}	1.131×10^{-7}	-9.10
U_{2x}	-2.0×10^{-9}	-2.57×10^{-9}	-30.25
U_{1y}	2.0×10^{-9}	2.57×10^{-9}	28.33
U_{2y}	1.134×10^{-7}	9.79×10^{-8}	-13.62

4. 결론

본 논문에서는 미지의 파라미터를 규명하기 위해 회전체 고유의 질량 불평형을 고려한 방법으로 민감

도 해석을 통해 측정오차를 줄일 수 있었고, 두 베어링의 X 방향의 강성과 감쇠는 첫 번째 임계속도와 궤적변위에, Y방향의 강성과 감쇠는 이후의 임계속도와 궤적변위에 각각 비례 한다는 것을 알 수 있었다. 그러므로 제시한 방법은 회전체 밸런싱을 수행하는 대안으로 사용할 수 있고, 미지의 회전체 동적 파라미터를 규명할 수 있다.

참고문헌

1. R. Tiwari and I.S. Vyas, "Non-Linear Bearing Stiffness Parameter Extraction from Random Response in Flexible Rotor-Bearing Systems", Journal of Sound and Vibration, Vol.203, pp.389-408, 1997.
2. A. Muszynska "Forward and backward Precession of A Vertical Anisotropically Supported Rotor". Journal of Sound and Vibration, pp.207-222, 1996.
3. S. Seibold, "Identification of Physical Parameters using an Instrumental Variables Technique" Mechanical Systems and Signal Processing, pp.425-439, 1997
4. William J. Palm III, "Matlab for Engineering Applications", McGraw-Hill, 1998

부록

A. 질량관성 행렬, 자이로 행렬, 변환행렬

$$[L] = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_y \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_p \\ 0 & 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} b_2 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{L}] = [L] \cdot [T], \quad [\bar{G}] = [G] \cdot [T]$$

B. 계수행렬

$$[C_{o1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -b_1 & b_2 \\ b_1 & -b_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C_{o2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$