

# 주파수영역 모델링을 이용한 Least-Squares Migration

윤광진<sup>1)</sup>, 신창수<sup>1)</sup>, 서정희<sup>1)</sup>, 고승원<sup>2)</sup>, 양승진<sup>2)</sup>

## 1. 서론

반사법 탄성과 탐사의 목적은 지구 내부의 구조적, 층서적인 영상화에 있으며, 지구물리학자들은 여러 가지 수학적 도구를 이용하여 영상화에 대한 연구를 수행해 왔다. 이러한 도구로는, 빠르고 경제적이거나 탄성파의 도달시간만을 고려하는 파선이론에 입각한 Kirchhoff 구조보정(Bleistein, 1987)에서부터, 많은 계산비용이 요구되지만 파동방정식 외삽에 기반을 둬으로써 진폭을 고려할 수 있는 방법(Berkhout and Wapenaar, 1993; Gazdag and Squazzero, 1984) 등을 들 수 있다.

탄성과 역산에서는 측정된 현장자료와 모델링한 자료 사이의 최소자승 오차를 최소화하기 위해 Gradient, Gauss-Newton, full Newton 과 같은 비 선형 최적화 방법이 이용된다(Pratt et al., 1998). 이러한 역산의 해를 구하기 위해서는 지하 매질의 미소변화에 따른 파동장의 변화를 나타내는 Jacobian 행렬(  $\mathbf{J}$  )이 필요하다. 파선을 이용한 역산에서는 Jacobian을 빠르고 경제적으로 구할 수 있지만(Lambare et al., 1992), 파형을 이용한 역산에서는 Jacobian을 계산하는데 매우 많은 비용이 요구된다(Woodhouse and Dziewonski, 1984). Lailly(1983), Tarantola(1984), Geller and Hara(1993), Mora(1987)와 Pratt et al.(1998)은 Jacobian을 직접 구하지 않고 adjoint state technique을 이용하여 목적함수  $\mathbf{J}^T \mathbf{d}$  (  $\mathbf{d}$  는 측정자료)의 최대 하향경사 방향(steepest descent direction)을 구하여 역시간 구조보정(reverse time migration)을 수행하였다. 또한 잔여오차를 역 전파하여 모델링한 자료와 상호 상관 시켜서 오차의  $l_2$  norm의 gradient를 계산하였다.

본 논문에서는 임의의 음원-수진기 배열에 대해서 역 시간 구조보정이나 파형역산을 수행할 수 있도록 Jacobian을 직접 계산하였다. 탄성과 자료의 영상화 및 역산을 위한 Jacobian을 계산하기 위해서, 우선, 주파수영역 유한요소법의 효과적인 산재행렬 풀이법(Marfurt and Shin, 1989; Shin, 1988; Pratt et al., 1998)을 적용하여 파동방정식 모델링을 수행하였다. 그리고 음원-수진기 상반성 원리를 적용함으로써 Jacobian 계산에 필요한 연산횟수를 줄였다. 이 방법은 다중반사파, 선두파, 주 반사파 등의 모든 파를 이용하는 음향파 영상에 적용할 수 있으며, Marmousi 자료의 최소자승 영상화에 실험적으로 적용하여 보았다.

## 2. 연구방법 및 이론

최소자승 구조보정은 파형역산의 첫 번째 반복횟수에 해당한다. 완전파동방정식을 이용하여 Jacobian을 직접 계산하고 이를 이용하여 탄성과 자료의 최소자승 구조보정에 적용하였다. 최소자승 영상화 기법은 Gauss-Newton 비 선형 역산을 선형화 한 것이다. 모델 변수(지하의 속도나 밀도 등)의 변화량  $\delta \mathbf{m}$  을 계산하기 위한 Gauss-Newton법은 다음과 같이 나타낼 수 있다(Pratt et al., 1998).

$$\delta \mathbf{m} = - \mathbf{H}^{-1} \nabla_m E \quad (1)$$

여기서,  $\mathbf{H}$  는 Hessian 행렬,  $\nabla_m E$ 는 목적함수  $E$ 의 gradient 벡터이다.  $E=1/2(\delta \mathbf{d}^T \delta \mathbf{d})$ 이고  $\delta \mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_{\text{obs}}$ ,  $\mathbf{d}(\mathbf{m})$ 은 초기모델에 의한 자료,  $\mathbf{d}_{\text{obs}}$ 는 관측자료이다.  $\nabla_m E = \partial E / \partial \mathbf{m} = \mathbf{J}^T \delta \mathbf{d}$ 이며, 해와 근접한 곳에서는 Hessian 행렬  $\mathbf{H}$ 를  $\mathbf{H}_a = \mathbf{J}^T \mathbf{J}$ 로 근사할 수 있다. 여기서,  $\mathbf{J}$ 는 Jacobian으로 모델  $\mathbf{m}$ 에 대한 편미분과동장 ( $\mathbf{J} = \partial \mathbf{d} / \partial \mathbf{m}$ )으로 지하매질의 미소변화에 따른 모델링 자료의 변화를 나타낸다. (1)식에서 초기모델에 의한 자료  $\mathbf{d}(\mathbf{m})$ 을 0으로 놓으면 최소자승 구조보정이다. 이 때, 정규 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1l} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2l} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{l1} & \phi_{l2} & \cdots & \phi_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \vdots \\ \Delta p_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_l \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서,

$$\phi_{ij} = \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} \int_0^{x_{\max}} \frac{\partial u(x, \vec{p}, \omega)}{\partial p_i} \frac{\partial u(x, \vec{p}, \omega)}{\partial p_j} dx d\omega \quad (3)$$

그리고

$$R_i = \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} \int_0^{x_{\max}} \frac{\partial u(x, \vec{p}, \omega)}{\partial p_i} \widetilde{d(x, \omega)} dx d\omega \quad (4)$$

이다. 여기서  $\frac{\partial u(x, \vec{p}, \omega)}{\partial p_i}$ 는 Fourier 변환된 편미분과동장,  $\widetilde{d(x, \omega)}$ 는 Fourier 변환된 측정탄성파자료이며,  $\omega$ 는 각주파수,  $\widetilde{d(x, \omega)}$ 는  $d(x, \omega)$ 의 공액 복소수이다. 주파수영역에서 편미분과동장을 구한다면 Hessian 행렬 및 측정탄성파자료와 편미분과동장과의 영 지연 상호 상관 값을 시간영역에서와는 달리 병렬컴퓨터를 이용하여 효율적으로 계산할 수 있다. 본 연구에서는 편미분과동장들의 상호 상관 값으로 구성된 Hessian 행렬의 크기가 방대하여 역 행렬을 이용하지 않고, 이 역 행렬의 대각요소만을 이용하여 영 지연 상호 상관 값을 정규화 하였다. 즉, 지하구조의 각 격자 점의 영상 값은 다음과 같이 표시된다.

$$\delta p_i = \frac{\int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} \int_0^{x_{\max}} \frac{\partial u(x, \vec{p}, \omega)}{\partial p_i} \widetilde{d(x, \omega)} dx d\omega}{\int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} \int_0^{x_{\max}} \frac{\partial u(x, \vec{p}, \omega)}{\partial p_i} \frac{\partial u(x, \vec{p}, \omega)}{\partial p_j} dx d\omega} \quad (5)$$

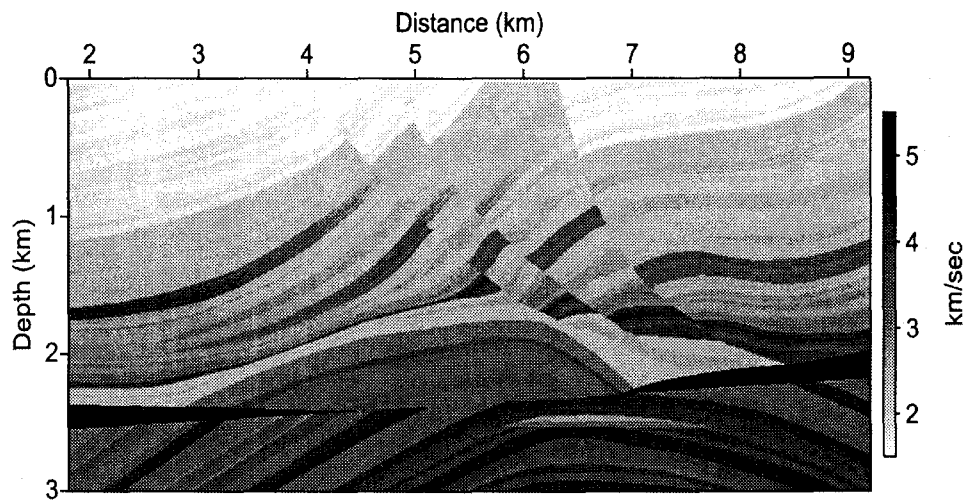
2차원 지질구조 모델이  $N_x \times N_z$ 의 격자 점으로 구성되어 있을 때, Jacobian을 계산하기 위해서는, 한 개의 음원에 대해서 매질을 변화시키고자 하는 격자 점에 또 다른 가상음원을 두어서 파동방정식 모델링을 수행해야 한다. 따라서 한 음원에 대해,  $N_x \times N_z$ 번의 파동방정식 모델링을 수행하여 Green

함수를 구해야 한다. 음원이 지표의 격자 수만큼 존재하면 전체 Jacobian은  $N_x \times N_x \times N_z$  번의 모델링을 통해 구할 수 있다. 그러나 주파수영역 유한요소법, 스칼라 파동방정식 Green 함수의 상반성, 효과적인 산재행렬 풀이법 등을 이용하면, 음원과 수신기가 지표의 각 격자 점에 존재 할 경우,  $N_x$  번의 모델링 만으로 Jacobian을 효과적으로 계산할 수 있다.

### 3. 인용문헌

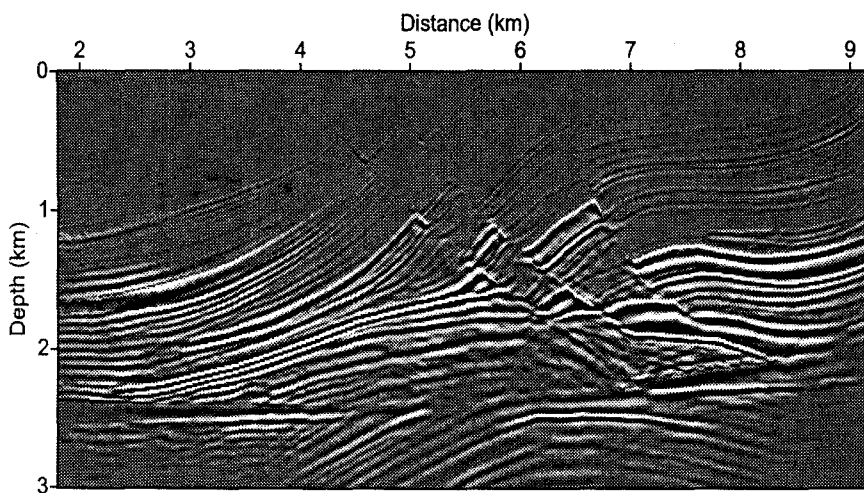
- Bleistein, N., 1987, On the imaging of reflectors in the earth : *Geophysics*, 52, 931-942.
- Berkhout, A. J. and Wapenaar, C. P. A., 1993, A unified approach to acoustical reflection imaging, Part II : The inverse problem : *J. Acoust. Soc. Am.*, 93, No. 4, 2017-2023.
- Gazdag, J. and Squazzero, P., 1984, Migration of seismic data by phase-shift plus interpolation : *Geophysics*, 49, 124-131.
- Geller, R. J. and Hara, T., 1993, Two efficient algorithms for iterative linearized inversion of seismic waveform data : *Geophys. J. Int.*, 115, 699-710.
- Lailly, P., 1983, The seismic inverse problem as a sequence of before stack migration, in *Conference on Inverse Scattering: Theory and Application* : eds Bednar, J. B., Redner, R., Robinson, E. and Weglein, A., SIAM.
- Lambare, G., Virieux, J., Madariaga, R. and Jin, S., 1992, Iterative asymptotic inversion in the acoustic approximation : *Geophysics*, 57, 1138-1154.
- Marfurt, K. J. and Shin, C. S., 1989, The future of iterative modeling of geophysical exploration, in *Supercomputers in Seismic exploration* : ed. Eisner, E., *Seis. Expl.*, 21, 203-228. Elsevier.
- Mora, P., 1987, Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multioffset seismic data : *Geophysics*, 52, 1211-1228.
- Pratt, R. G., Shin, C. and Hicks, G. J., 1998, Gauss-Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion : *Geophys. J. Int.*, 133, 341-362.
- Shin, C., 1988, *Nonlinear elastic wave inversion by blocky parameterization* : Ph. D. thesis, Univ. of Tulsa, Oklahoma.
- Tarantola, A., 1984, Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation : *Geophysics*, 49, 1259-1266.
- Woodhouse, J. H. and Dziewonski, A. M., 1984, Mapping the upper mantle: three-dimensional modeling of earth structure by inversion of seismic waveforms : *J. Geophys. Res.*, 89, 5953-5986.

- 
- 1) 서울대학교 지구환경시스템공학부
  - 2) 한양대학교 시스템응용공학부



Marmousi hard velocity model

Fig. 1 Marmousi hard velocity model used to implement least-squares migration.



Least squares migration of the Marmousi data set using FDM

Fig. 2 Least-squares migration of marmousi data-set. In the calculation of Jacobian, we use frequency domain 25points weighted average FDM technique. The grid size used in imaging is 12m by 12m.