

## 반복계산에 의한 고유치 계산 알고리즘에서의 고유치 감도분석

김덕영  
군산대학교

### An Eigenvalue Sensitivity Analysis of the Iterative Eigenvalue Calculation Algorithm

Deok Young Kim  
Kunsan National University

**Abstract** - This paper presents a new eigenvalue sensitivity analysis method based on AESOPS algorithm. The additional calculation steps are derived from the original AESOPS algorithm. The additional calculation steps are performed directly from the AESOPS algorithm after iteratively calculating electro-mechanical oscillation modes in small signal stability problems. Owing to the structural characteristics of partitioned sub-matrix of state space equations, the partial differentiation terms of system state matrix for obtaining eigenvalue sensitivity indices can be calculated very simply. By the method presented in this paper, the AESOPS algorithm can be used in controller design problem as well as analysis of small signal stability problem.

#### 1. 서론

전력계통의 미소신호 안정도 해석을 위한 고유치 해석법으로 상태행렬을 구성하지 않고 회전자각의 진동과 관련있는 전기기계적 진동모드에 해당하는 고유치만을 선별적으로 계산하는 계산방법이 개발되었으며, AESOPS (Analysis of Essentially Spontaneous Oscillations in Power Systems) 알고리즘으로 알려져 있다. AESOPS 알고리즘은 고유치의 함수인 외부토크를 특정발전기의 회전자에 가하고, 계통의 대수방정식을 반복계산하여 한 번에 하나씩 전기기계적 진동과 관련있는 고유치를 구하게 된다. 상태행렬을 구성하지 않고 반복계산에 의해 고유치를 구하므로 250개의 발전기와 2000개의 모선 그리고 3600개의 선로로 구성된 대규모 전력계통의 해석이 가능하다. 고유치 계산에 많은 메모리를 필요로 하지 않으며, 전체 진동모드가 아닌 미소신호 안정도에서 주요 관심대상이 되는 전기기계적 진동모드에 해당하는 고유치와 진동모드의 물리적 의미를 설명해 주는 발전기 속도편차를 계산할 수 있다는 장점이 있다. 반면에 AESOPS 프로그램은 계통의 전체 고유치가 아닌 전기기계적 진동과 관련된 고유치만을 구하게 되고 그 밖의 진동모드에 해당하는 고유치는 구할 수 없는 단점이 있다. 또한 상태행렬을 구성하고 고유치 해석을 하는 방법과는 달리 고유벡터와 감도계수 등과 같은 정보를 구하는 것이 곤란하여 사용범위도 주로 안정도 해석용으로 제한을 받아왔다.

본 논문에서는 AESOPS 알고리즘을 그대로 사용하면서, 고유벡터와 감도계수 등을 구하는 방법을 개발하고자 한다. 고유벡터와 감도계수를 구하는데 필요한 추가의 계산식은 AESOPS 알고리즘에서 유도하였으며, AESOPS 알고리즘의 장점을 그대로 살리면서 고유벡터와 감도계수 등의 정보를 구하도록 하여, 안정도 해석 뿐만 아니라 제어기 정수 최적화 등의 목적으로도 사용이 가능하도록 하였다.

#### 2. AESOPS 알고리즘의 개요

전력계통의 선형 동적모델에서 하나의 발전기의 회전자 축에 다음과 같은 외부토크가 가해져서 강제적으로 진동하고 있는 경우를 가정한다.

$$T = T_x e^{(\sigma + j\Omega)t} \quad (1)$$

식(1)에서  $T_x$ 는 복소수이고  $\sigma + j\Omega$ 는 고유치의 초기 추정값이다. AESOPS 알고리즘에서는 발전기 단자전압, 내부전압, 속도편차 그리고 외부토크  $T_x$ 를 계산한다. 이들 값을 사용하여 고유치의 추정치를 계산하고, 연속적인 고유치 추정치의 변화가 지정된 오차한계보다 작은 경우 계산을 마치게 된다.

##### 2.1 계통방정식

발전기 단자전압과 내부전압에 대한 계통의 전류방정식을 구성하고, 발전기 단자전압으로 축약한 후의 계통방정식은 다음과 같다.

$$A_{TT} e_T + R_{TC} e^c = 0 \quad (2)$$

계통의 발전기 단자수를  $T$ 라 하고 발전기 수를  $N$ 이라 하면 식(2)는  $(2T+2N)$ 개의 변수가 있고, 방정식의 수는  $2T$ 개이므로  $2N$ 개의 방정식이 더 있어야 풀 수 있게 된다.

##### 2.2 발전기 동적방정식

$N$ 개 발전기에 대한  $2N$ 개의 추가적인 식은 다음과 같은 발전기 동적방정식에서 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & z_{35} & a_{37} & a_{38} & a_{39} & a_{310} \\ & 1 & z_{45} & a_{47} & a_{48} & a_{49} & a_{410} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & z_{55} & & \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & z_{65} & z_{66} & \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & z_{75} & z_{76} & z_{77} & a_{78} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & z_{85} & & a_{87} & z_{88} \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & z_{95} & & z_{99} & a_{910} \\ a_{101} & a_{102} & a_{103} & a_{104} & z_{105} & & a_{109} & z_{1010} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{TR} \\ e_{TI} \\ e_R^c \\ e_I \\ \omega \\ V_E \\ \lambda_{FD} \\ \lambda_{SD} \\ \lambda_{FQ} \\ \lambda_{SQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

식(3)에서  $a_{ij}$ 로 표시된 것은 실수의 원소들이며,  $Z_{ij}$ 로 표시된 것은 복소수의 원소들이다. 복소수의 원소들은 고유치  $S$ 의 함수이며, 고유치의 추정치가 변화에 따라 그 값이 달라지게 된다. 식(3)을 밑에서부터 축약하여 3개의 방정식으로 만들면 다음과 같다

$$\begin{bmatrix} z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & z_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & z_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{TR} \\ e_{TI} \\ e_R \\ e_I \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_X \end{bmatrix} \quad (4)$$

### 비구동 발전기

비구동 발전기는 외부토크가 0인 발전기를 말하며, 식(4)에서 세 번째 행은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\omega = -z_{55}^{-1} [a_{51}e_{TR} + a_{52}e_{TI} + a_{53}e_R + a_{54}e_I] \quad (5)$$

식(5)는 발전기의 단자전압과 내부전압을 구한 후에 발전기의 속도를 계산하는데 사용된다. 식(4)에서 세 번째 행을  $\omega$ 에 대하여 치환한 후의 내부전압은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} e_R \\ e_I \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{31} & Y_{32} \\ Y_{41} & Y_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{TR} \\ e_{TI} \end{bmatrix} \quad (6)$$

### 구동 발전기

구동발전기의 경우는 식(4)의 세 번째 행에서 외부토크  $T_X$ 를 구하게 된다. 이 경우 외부토크  $T_X$ 의 값을 지정하는 대신 구동발전기의 각속도  $\omega_D$ 를 1.0으로 지정하여  $T_X$ 를 계산하게 된다.

$$T_X = a_{51}e_{TR} + a_{52}e_{TI} + a_{53}e_R + a_{54}e_I + z_{55}\omega_D \quad (7)$$

식(7)은 발전기 단자전압과 내부전압이 계산된 후 외부토크  $T_X$ 를 계산하는데 사용되며, 이는 다시 고유치를 계산하는데 사용된다. 식(4)에서 발전기 내부전압은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} e_R \\ e_I \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} z_{33} & z_{34} \\ z_{43} & z_{44} \end{bmatrix}^{-1} \left[ \begin{bmatrix} \omega_D z_{35} \\ \omega_D z_{45} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{31} & z_{32} \\ z_{41} & z_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{TR} \\ e_{TI} \end{bmatrix} \right] \quad (8)$$

식(6)과 식(8)의 발전기 내부전압에 대한 관계식을 식(2)의 계통방정식에 치환하여 단자전압을 계산하고, 이 값을 다시 식(6)과 식(8)에 대입하여 발전기의 내부전압을 계산하게 된다.

### 2.3 고유치 계산과정

종래의 AESOPS 알고리즘에서 사용하는 고유치의 반복 계산식은 그림 1의 발전기 동요방정식의 블록선도에서 유도되었다. 그림 1에서 토크에 대한 표현식을 구하면 다음과 같다.

$$\Delta T = \left[ \frac{2H}{\omega_o} S + K_D(S) + \frac{K_S(S)}{S} \right] \Delta \omega \quad (9)$$

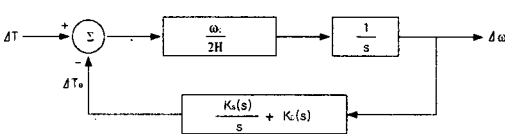


그림 1 발전기 동요방정식의 블록선도 1

Fig. 1 Block diagram 1 of generator swing equation

식(9)에서 토크  $T_X$ 의 고유치에 대한 편미분의 형태는 다음과 같다.

$$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial S} = \left[ \frac{2H}{\omega_o} + \frac{1}{S} \frac{\partial K_S(S)}{\partial S} - \frac{1}{S^2} K_S(S) + \frac{\partial K_D(S)}{\partial S} \right] \Delta \omega \quad (10)$$

식(9)의 특성방정식 조건을 식(10)에 대입하고,  $K_D(S)$ ,  $\partial K_D(S)/\partial S$ ,  $\partial K_S(S)/\partial S$ 가 작다고 가정하여 다음과 같은 직관적이고도 경험적인 방법으로 근사화된 고유치 반복계산식이 사용된다.

$$S_{n+1} = S_n - \left[ \frac{\Delta T(S)}{4H \frac{\Delta \omega}{\omega_o}} \right], \quad \text{단 } H = \sum_{i=1}^N H_i \frac{|\Delta \omega_i|^2}{\omega_o^2} \quad (11)$$

## 3. 고유치 감도해석

### 3.1 감도계수의 일반식

고유치 감도계수의 일반식은 계통정수에 대한 고유치의 편미분으로 정의된다. 계통상태행렬의 특성방정식의 근인 고유치를  $\lambda$ , 우측고유벡터를  $V$ 라고 하면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$AV = \lambda V \quad (12)$$

식(12)를 제어기 정수  $\alpha$ 에 대해 편미분 하고 좌고유벡터  $W_i$ 와의 스칼라적을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \left[ \left[ \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right] V_i, W_i \right] + \left[ A \left[ \frac{\partial V_i}{\partial \alpha} \right], W_i \right] \\ & = \lambda_i \left[ \frac{\partial V_i}{\partial \alpha}, W_i \right] + \frac{\partial \lambda_i}{\partial \alpha} [V_i, W_i] \end{aligned} \quad (13)$$

식(13)에서  $\lambda_i W_i$ 대신에  $A^T W_i$ 를 대치하고 양변을  $[V_i, W_i]$ 로 나누면 다음과 같이 고유치 감도계수의 일반식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \alpha} = \frac{\left[ \left[ \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right] V_i, W_i \right]}{[V_i, W_i]} \quad (14)$$

### 3.2 AESOPS 알고리즘의 상태방정식으로서의 변형

AESOPS 알고리즘으로부터 고유벡터와 감도계수를 구하기 위해 기존의 알고리즘에서 상태방정식 형태를 유도하였다. 식(3)의 발전기 동적방정식은 다음과 같이 두 개의 수식으로 분리할 수 있다.

$$\Delta X = A_g \Delta X + B_g \Delta V + e_g \Delta T \quad (15)$$

$$\Delta i = C_g \Delta X + D_g \Delta V$$

식(15)에서 첫 번째 식은 식(3)의 3행부터 8행의 수식을 나타내며, 두 번째 식은 1, 2행의 수식을 나타낸다. 첫 번째 식의 세 번째 항은 외부토크에 관련되는 항이며,  $\Delta V$ 는 발전기 단자전압과 내부전압, 그리고  $\Delta X$ 는  $\Delta V$ 를 제외한 발전기 상태변수로  $[\omega, \delta, V_E, \lambda_{FD}, \lambda_{SD}, \lambda_{FQ}, \lambda_{SQ}]$ 를 나타낸다. 식(15)의 상태변수에  $\delta$ 를 추가하여 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \Delta\omega \\ \Delta\delta \\ \Delta X_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \\ M \\ \omega_0 \\ a_{r1} \\ a_{r2} \\ A_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1r} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{r1} & a_{r2} & A_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\omega \\ \Delta\delta \\ X_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ B_r \end{bmatrix} \Delta V + \begin{bmatrix} 1/M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T$$

$$\Delta i = [c_1 \quad c_2 \quad C_r] \begin{bmatrix} \Delta\omega \\ \Delta\delta \\ X_r \end{bmatrix} + D_g \Delta V \quad (16)$$

식(16)에서  $X_r$ 은  $\Delta V, \omega, \delta$ 를 제외한 나머지 상태변수를 나타낸다. 식(2)의 계통방정식을 다음과 같이 나타내면

$$\Delta i = Y_N \Delta V \quad (17)$$

식(15)의 두 번째 식과 식(17)을 식(15)의 첫 번째 식에 치환한 후의 상태방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta X &= [A_g + B_g(Y_N - D_g)^{-1}C_g] \Delta X + e_g \Delta T \\ &= A_{state} \Delta X + e_g \Delta T \end{aligned} \quad (18)$$

### 3.3 고유치 감도행렬

식(14)의 제어기 정수에 대한 고유치 감도계수의 일반식을 구하기 위해 식(18)에서 상태행렬의 제어기정수에 대한 편미분 식은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{state}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial A_g}{\partial \alpha} + \frac{\partial B_g}{\partial \alpha} (Y_N - D_g)^{-1} C_g \\ &+ B_g (Y_N - D_g)^{-1} \frac{\partial (Y_N - D_g)}{\partial \alpha} (Y_N - D_g)^{-1} C_g \\ &- B_g (Y_N - D_g)^{-1} \frac{\partial C_g}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (19)$$

식(19)에서 행렬  $B_g, Y_N, D_g, C_g$ 는 제어기를 포함하지 않는 행렬로서 제어기정수에 대한 편미분 행렬은 0인 행렬이 되며, 첫 번째 항의 행렬  $A_g$ 은 제어기를 포함한 행렬로서 제어기정수에 대한 편미분 행렬이 0이 아닌 값을 갖게 된다. 즉 첫 번째 항의 행렬  $A_g$ 만이 제어기를 포함하고 나머지 행렬은 제어기와 무관하므로 간단히 감도행렬  $\frac{\partial A_g}{\partial \alpha}$ 을 구할 수 있다. 행렬  $A_g$ 에서 여자기, 조속기, PSS와 관련된 항은 다음과 같다.

(1) 조속기에 관련된 행렬  $A_g$  요소 :  $Z_{55}$

$$Z_{55} = G_{GOV}(S) + D + 2HS \quad (20)$$

$$\begin{aligned} G_{GOV}(S) &= \frac{K_1(1+ST_2)}{(1+ST_1)(1+ST_3)(1+ST_4)} \\ &\times \left\{ \frac{(1-K_2)(1+ST_5)(1+ST_6) + K_2(1-K_3)(1+ST_7)K_2K_3(1-K_4)}{(1+ST_5)(1+ST_6)} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

(2) 여자기에 관련된 행렬  $A_g$  요소 :  $Z_{76}$

$$Z_{76} = -G_{EXC}(S) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} G_{EXC}(S) &= \frac{K_A(1+ST_c)SK_F}{(1+ST_A)(1+ST_B)(K_E'+ST_E)(1+ST_F)+K_A(1+ST_c)SK_F} \end{aligned} \quad (23)$$

(3) PSS에 관련된 행렬  $A_g$  요소 :  $Z_{65}$

$$Z_{65} = -(1+ST_R)G_{PSS}(S) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} G_{PSS}(S) &= \frac{K_3ST_7(1+ST_1)(1+ST_3)(1+ST_5)}{(1+ST_0)(1+ST_7)(1+ST_2)(1+ST_4)(1+ST_6)} \end{aligned} \quad (25)$$

식(19)의 상태행렬의 제어기정수에 대한 편미분은 첫 번째 항의 행렬  $A_g$ 에서 제어기와 연관된 행렬요소인  $Z_{55}, Z_{76}, Z_{65}$ 의 관련식을 제어기정수에 대해 편미분한 것으로 식(21), (23), (25)으로부터 간단히 구할 수 있게 된다.

### 4. 결론

본 논문에서는 AESOPS 알고리즘으로부터 추가의 계산으로 고유벡터와 제어기정수에 대한 고유치 감도계수를 구할 수 있는 관련수식을 제시하였다. 즉 AESOPS 알고리즘을 사용하여 반복계산으로 전기기계적 진동모드를 구한 후, 한 번의 추가적 계산단계만으로 고유벡터와 감도계수를 구할 수 있게 하였다. 이때 추가의 계산식은 원래의 AESOPS 알고리즘의 계산식으로부터 직접 유도하였으며, 부분행렬의 특성상 간단한 계산에 의해 감도행렬을 구할 수 있도록 하였다. 본 논문에서 제시한 방법은 기존의 AESOPS 알고리즘의 장점을 그대로 살리면서, 고유벡터와 감도계수를 구할 수 있게 되어 안정도 해석 뿐만 아니라 제어기 설계에도 사용이 가능하도록 하였다.

### [참고 문헌]

- [1] P. M. Anderson and A. A. Fouad, "Power system control and stability", Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1977.
- [2] R. T. Byerly, D. E. Sherman, and B. J. Bennon, "Phase II : frequency domain analysis of low frequency oscillations in large electric power systems", Vol. 1, 2, 3, 4, and 5, Research Project 744-1, Electric Power Research Institute, Palo Alto, California, April, 1982.
- [3] P. W. Sauer, C. Rajagopalan and M. A. Pai, "An explanation and generalization of the AESOPS and PEALS algorithms", IEEE 1990 Winter Meeting, Paper No. 90 WM 293-4 PWRs, Atlanta, Georgia.
- [4] D. M. Lam, H. Yee, B. Campbell, "An efficient improvements of the AESOPS algorithm for power system eigenvalue calculation", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 4, pp.1880-1885, November 1994.
- [5] 김덕영, 권세혁, "AESOPS 알고리즘의 고유치 반복계산식과 고유치 초기값 선정의 효율적인 개선에 관한 연구", 대한전기학회 논문지, 제 48권 11호, pp.1394-1400, 1999년.