2001년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2001.7.18-20

有限要素法에 있어서의 非對稱 疎行列方程式의 組合과 解法

辛 興敎 · 金 相吉
慶尙大學校 電氣工學科

Assembling and Analyzing Method of Non-symmetric Sparse Matrix Equation in FEM

Heung-kyo, SHIN · Sang-gil, KIM
Dept. of Electrical Eng., Gyeongsang Nat'l Univ.

Abstract - In this paper, we developed the algorithm for assembling and iterative numerical analyzing of non-symmetric sparse matrix equation in finite element method. Developed program in this study is applicable and very useful to analyze the electromagnetic characteristics of the electric machinery considered with the movement of the secondary.

1. 序 論

有限要素法은 컴퓨터의 발전에 힘입어 偏微分方程式으로 표현되는 物理場의 가장 강력한 數値解析 수단으로 확립되었다[1,2]. 이러한 有限要素法을 적용하여 物理場을 解析하는 경우 計算時間 및 解析結果의 精密度는 大次元 行列方程式을 얼마나 빠르고도 정확하게 풀어내느냐 하는 것에 가장 많이 좌우된다. 그런데 이 때 풀어야 하는 大次元 行列方程式은 대부분의 경우 係數行列이 對稱 正定値(symmetric positive-definite)로 나타나지만 速度를 고려한 電氣機器의 解析 등과 같은 경우에는 係數行列이 非對稱으로 나타나[3,4] 行列方程式의 解法으로서 前處理 共軛句配法(pre-conditioned conjugate gradient method)[5~7] 등과 같은 기존의 反復法 알고리즘을 適用할 수 없다는 問題點이 있어 Gauss 消去法으로 대표되는 直接法을 適用할 수 밖에 없어 막대한 計算時間과 더불어 解析結果의 精密度와 관련한 問題點[8]으로 인해 非對稱 行列方程式의 反復解法의 開發과 관련된 硏究가 매우 시급한 실정이다.

이에 따라 本 硏究에서는 行列의 疎性(sparsity)을 고려한 大次元 非對稱 行列方程式의 組合과 이의 反復解法에 관한 알고리즘을 開發하고, 이를 有限要素法 適用過程에 있어서의 matrix solver 用 subroutine으로 확립하고자 한다.

本 稿는 이러한 硏究에 대한 中間報告로서 지금까지 硏究된 非對稱 行列方程式의 反復解法 알고리즘 및 行列의 疎性을 고려한 非對稱 系 係數行列(non-symmetric system coefficient matrix)의 組合 알고리즘을 紹介한다. 그리고 本 硏究에서의 알고리즘에 따라 作成중인 프로그램에 의한 速度를 고려한 線形 및 回轉형 誘導電動機의 電磁氣的 特性解析에 따른 有用性 檢討結果는 차후에 다시 報告하고자 한다.

2. 非對稱 疎行列方程式의 數値計算

2.1 非對稱 行列方程式의 演算論理

大次元 行列方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

을 直接法을 적용하여 푸는 경우에는 計算機 演算論理는 가장 간단하지만 行列方程式의 次元이 커짐에 따라 곱셈, 나눗셈의 重疊演算으로 인한 막대한 計算時間의 增加와 더불어 重疊演算으로 쌓여지는 round-off error로 인해 計算結果의 正確度가 급격히 減少하게 되어 大次元 行列方程式의 解法으로는 反復法이 훨씬 유리한 것으로 알려져 있다[9~11]. 또한 式(1)을 反復法으로 푸는 경우 係數行列 A가 對稱 正定値인 경우에는 前處理 共軛句配法이 計算時間 및 解의 正確度의 面에서 가장 效果的인 解法으로 확립되었다[6,12].

그러나 A가 非對稱인 경우에는 句配法의 演算論理를 그대로 적용할 수 없어 直接法(direct method)으로 풀거나, 式(1)의 兩邊에 係數행렬 A의 轉置行列 A^T를 곱하여 구해지는 行列方程式

$$A'\mathbf{x} = \mathbf{b}' \tag{2}$$

의 係數行列 A'는 對稱 正定値로 주어지므로 式(2)에 前處理 共軛句配法을 적용하여 解를 구하는 方法을 이용해 왔다[11]. 여기서 $A' = A^TA$, $\mathbf{b}' = A^T\mathbf{b}$ 이다. 이와 같은 原 方程式의 變形을 이용한 反復法에 의하여 非對稱 大次元 行列方程式을 푸는 것은 直接法을 적용하는 경우보다는 計算時間이나 解의 正確度의 面에서 훨씬 유리하다. 그러나 式(2)의 係數行列 A'는 行列의 疎性(sparsity)을 喪失하게 되므로 計算機 記憶容量이나 計算時間의 側面에서 생각한다면 式(1)을 직접 反復法으로 풀 수 있는 알고리즘의 開發이 필요하다고 사료된다. 이를 위한 알고리즘으로서 本 硏究에서는 有限差分法에 의한 場問題 解析에 관한 硏究나 文獻들에서 많이 채용된 바 있는 共軛殘差法의 論理를 적용하기로 한다[13].

그런데 有限差分法의 경우 係數行列이 2次元 解析時에는 5-對角行列(penta-diagonal matrix), 3次元 解析時에는 7-對角行列(hepta-diagonal matrix)의 形態로 나타나지만[14~16] 有限要素法의 경우에는 要素分割 및 節點番號 附與 形態에 따라 不規則한 形態의 疎行列이 나타나므로 기존의 5-對角行列 알고리즘 또는 7-對角行列 알고리즘 등 有限差分法에서의 알고리즘을 그대로 適用할 수는 없으며, 有限要素法에 適合한 sparsity 알고리즘을 開發하여 적용하여야 한다.

2.2 共軛殘差法의 演算論理

共軛殘差法의 演算論理는 다음과 같다. 즉, 非對稱 行列方程式

$$\mathbf{f} - S\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{3}$$

에 k번째 近似解 $\mathbf{x}_k$를 代入하면

$$\mathbf{f} - S\mathbf{x}_k = \mathbf{r}_k \neq 0 \tag{4}$$

가 된다. 여기서 $\mathbf{r}_k$를 k번째 殘差(residual)라 한다. 또한 새로이 改善된 解

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k \tag{5}$$

를 식(3)에 대입하면

$$\mathbf{f} - S\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f} - S(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k) \tag{6}$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k S\mathbf{d}_k \tag{7}$$

가 된다. 이 때 $\mathbf{d}_k$를 k번째 探索方向(search direction)이라 한다. 殘差法은 k번째 探索方向 $\mathbf{d}_k$에서 구해지는 殘差 $\mathbf{r}_{k+1}$이 最小가 되도록 α_k를 결정하는 方法이다. 이를 위하여 殘差 汎函數

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathbf{r}_{k+1}) &= \mathbf{r}_{k+1}{}^T\mathbf{r}_{k+1} \\ &= \mathbf{r}_k{}^T\mathbf{r}_k - 2\alpha_k \mathbf{r}_k{}^T S\mathbf{d}_k \\ &\quad + \alpha_k{}^2 (S\mathbf{d}_k)^T(S\mathbf{d}_k)\end{aligned} \tag{8}$$

을 定義하자. $\mathcal{F}(\mathbf{r}_{k+1})$ 이 最小가 되는 α_k 를 구하면

$$\partial\mathcal{F}/\partial\alpha_k = -2\,\mathbf{r}_k{}^T S\,\mathbf{d}_k + 2\,\alpha_k\,(S\,\mathbf{d}_k)^T(S\,\mathbf{d}_k) = 0 \qquad (9)$$

로 부터

$$\alpha_k = \mathbf{r}_k{}^T S\,\mathbf{d}_k \,/\, (S\,\mathbf{d}_k)^T(S\,\mathbf{d}_k) \qquad (10)$$

가 된다. 그리고 共軛殘差法은 이러한 殘差法의 收斂速度 改善을 위해 直交條件을 이용하여 探索方向을 결정하는 方法으로서 k 번째 探索方向 $\mathbf{d}_k$ 와 식(7)에 의해 구해지는 $k+1$ 번째 殘差 $\mathbf{r}_{k+1}$ 로부터 $k+1$ 번째 探索方向

$$\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k\,\mathbf{d}_k \qquad (11)$$

을 殘差가 가장 빠르게 減少하는 方向이 되도록 β_k 를 결정하는 方法이다. 즉, 임의의 等殘差面의 垂直方向이 殘差가 가장 빠르게 減少하는 方向이 되므로

$$(S\,\mathbf{d}_i)^T(S\,\mathbf{d}_j) = 0 \;\;(i \neq j)$$
$$\neq 0 \;\;(i = j) \qquad (12)$$

와 같은 $(S\,\mathbf{d})$ 直交性(orthogonality)을 이용하여

$$\begin{aligned}(S\,\mathbf{d}_{k+1})^T(S\,\mathbf{d}_k) &= (S\,[\,\mathbf{r}_{k+1} + \beta_k\,\mathbf{d}_k\,])^T(S\,\mathbf{d}_k)\\ &= (S\,\mathbf{r}_{k+1})^T(S\,\mathbf{d}_k) + \beta_k\,(S\,\mathbf{d}_k)^T(S\,\mathbf{d}_k)\\ &= 0 \qquad (13)\end{aligned}$$

에 의해

$$\beta_k = -\,(S\,\mathbf{r}_{k+1})^T(S\,\mathbf{d}_k) \,/\, (S\,\mathbf{d}_k)^T(S\,\mathbf{d}_k) \qquad (14)$$

와 같이 β_k 를 결정한다. 이와 같이 式(5), (7), (10), (11) 및 식(14)를 이용하여 式(4)의 殘差가 許容誤差 以內로 될 때 까지 反復計算하여 式(3)의 數値解를 구하는 方法이 共軛殘差法이다. 단, 最初 計算에는

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{f} - S\,\mathbf{x}_0 \qquad (15)$$

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{r}_0 \qquad (16)$$

을 이용한다. 여기서 $\mathbf{x}_0$ 는 初期解(initial guess)이다.

2.3 非對稱 Sparse matrix의 演算技法

有限要素法에 의한 物理場 問題의 解析에 있어서 系方程式(system equation)의 係數行列이 對稱 疎行列로 나타나는 경우의 sparsity를 고려한 系方程式의 組合 및 演算技法들은 여러 文獻을 통하여 이미 많이 報告되어 있다[2,17]. 그러나 係數行列이 非對稱으로 나타나는 경우에 대한 行列方程式의 組合 및 演算技法에 관한 報告는 有限差分法 적용의 경우 나타나는 5-對角行列 또는 7-對角行列의 記憶 및 演算處理法 등에 관한 研究結果 報告[13~16]를 제외하고는 거의 없는 실정이다. 이에 따라 本 研究에서는 任意 形態의 1次 三角요소를 채택한 有限要素法에 적용 가능한 sparsity를 고려한 非對稱 系方程式 係數行列의 記憶方法을 開發한다.

對稱 疎行列의 概略的인 記憶方法은 다음과 같다. 즉, 零이 아닌 係數行列要素를 一列로 配列하여 記憶시킨 후, 各 要素의 行(row) (또는 列 : column) 番號 및 各 列 (또는 行)의 主對角要素에 해당하는 要素의 番號를 記憶시키면 matrix 演算時 이 두 가지 integer data를 이용하여 任意의 行 番號 및 列 番號에 해당되는 要素의 data의 處理를 遂行할 수 있다. 따라서 이와 같은 形態로 系 係數行列이 構成되어 組合될 수 있도록 要素 matrix 式으로 부터 系方程式을 組合하는 過程에서 零이 아닌 要素가 追加될 새로운 記憶場所가 필요할 때 마다 係數行列 要素數를 하나씩 增加시켜 組合해 가는 앨고리즘을 構成해야 한다[17].

非對稱 matrix를 記憶시키는 경우에도 이와 비슷한 論理를 적용할 수 있다. 즉, 零이 아닌 要素를 一列로 配列하여 記憶시킨 후 各 要素가 어느 行, 어느 列에 해당하는지에 관한 integer 情報를 附加하면 對稱의 경우와 마찬가지로 sparsity를 고려한 matrix의 演算이 可能하게된다. 그림 1과 같은 形態의 係數行列의 경우 이와 같은 integer 情報의 構成方法은 다음과 같다.

方法 1 : 32個의 非零要素 各各의 行 番號 와 列 番號를 記憶시키는 方法

方法 2 : 32個의 非零要素 각각의 行 (또는 列) 番號와 各 列 (또는 行)에 포함되는 非零要素 數를 記憶시키는 方法

方法 3 : 32個의 非零要素 各各의 行(또는 列) 番號와 各 列(또는 行)의 첫 번째 非零要素의 一連番號를 記憶시키는 方法

1	2		3		4	5	
	6	7			8	9	
10		11	12		13		
		14	15		16	17	
	18	19		20	21		
22		23	24		25		
	26	27				28	
		29	30	31			32

(a) Non-symmetric sparse matrix

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
MC	1	2	4	6	7	2	3	6	7	1	3	4	6	3	4	6
MR	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
MC	7	2	3	5	6	2	3	4	6	2	3	7	3	4	5	8
MR	4	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8

(b) Method 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
MC	1	2	4	6	7	2	3	6	7	1	3	4	6	3	4	6
MR	5	4	4	4	4	4	3	4								
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
MC	7	2	3	5	6	2	3	4	6	2	3	7	3	4	5	8

(c) Method 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
MC	1	2	4	6	7	2	3	6	7	1	3	4	6	3	4	6
MR	1	6	10	14	18	22	26	29								
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
MC	7	2	3	5	6	2	3	4	6	2	3	7	3	4	5	8

(d) Method 3

그림 1. 非對稱 sparse matrix의 記憶方法

Fig. 1 Memory of non-symmetric sparse matrix

이와 같은 3 가지 方法 중에서 프로그램 論理는 方法 1이 가장 간단하지만, 記憶容量은 方法 1이 方法 2, 3에 비해 약간 더 많이 必要하게 된다. 하지만 그 差異는 (非零要素의 個數 − 行列의 次元數) × 4byte 에 지나지 않는다. 그리고 方法 2와 3은 거의 大同小異한 記憶方法으로 생각된다.

그런데 有限要素法의 適用에 의한 系方程式의 組合에 있어서 3 × 3 要素 matrixt 式이 節點 番號에 해당되는 system 行列의 行 位置, 列 位置에 組合되게 되므로 行列 자체는 非對稱의 값을 갖게 되지만 非零要素의 位置는 對稱의 分布를 하는 특징을 갖고 있으므로 對稱 sparse matrix의 記憶論理를 그대로 이용하고, 行列 演算時 해당되는 位置가 上三角要素인지, 下三角要素인지를 判別하는 앨고리즘을 하나 附加하면 對稱 疎行列 앨고리즘을 그대로 이용할 수도 있을 것이다. 다만 이 경우에는 行列 演算論理의 構成이 상당히 복잡해져 프로그램의 作成에 많은 주의를 필요로 할 것으로 사료된다.

차후의 本 研究에서의 앨고리즘 適用 結果 報告에는 이상과 같은 4 가지 非對稱 疎行列方程式의 演算論理를 적용한 경우의 計算時間, 記憶容量, 作成 프로그램의 複雜性 등을 서로 比較한 結果를 報告할 예정이다.

3. 有限要素法에 의한 誘導電動機의 磁束分布 解析

3.1 支配方程式의 誘導

變位電流가 무시되는 準定常狀態에서의 電氣機器의 磁束分布 特性을 解析하기 위해 Maxwell의 電磁方程式

$$\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} \tag{17}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathrm{B} / \partial t + \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \mathrm{B}) \tag{18}$$

$$\nabla \cdot \mathrm{D} = 0 \tag{19}$$

$$\nabla \cdot \mathrm{B} = 0 \tag{20}$$

과 補助方程式

$$\mathrm{B} = \mu \mathrm{H} = (1 / \nu) \mathrm{H} \tag{21}$$

$$\mathrm{B} = \nabla \times \mathrm{A} \tag{22}$$

및 Coulomb's gauge

$$\nabla \cdot \mathrm{A} = 0 \tag{23}$$

을 이용하여 벡터포텐셜 **A** 에 관한 Poisson 方程式을 유도하면

$$\nu \nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J} \tag{24}$$

가 된다. 단, $\boldsymbol{v}$ 는 2次側의 移動速度, $\nu = 1/\mu$ 은 媒質의 磁氣抵抗率이다. 式(24)가 電氣機器의 磁氣的 特性解析을 위한 支配方程式이다. 또한 誘導電動機 解析의 경우 磁性體의 導電率을 무시하면 式(24)의 電流密度 **J** 는

(1) 1次 slot에서

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s \tag{25}$$

(2) 1, 2次 磁性體 및 空隙에서

$$\mathbf{J} = 0 \tag{26}$$

(3) 2次 slot 또는 導體에서

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i = \sigma \{ -\partial \mathrm{A} / \partial t + \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \} \tag{27}$$

가 된다. 단 $\mathbf{J}_s$ 는 1次導體의 入力電流密度, $\mathbf{J}_i$ 는 2次導體의 誘導電流密度이며, σ 는 2次導體의 導電率이다[3,4].

式(24)~(27)을 2次元解析의 경우로 變換하면 다음과 같다. 즉, 固定子 入力電流는 z-軸 方向으로 존재하며, 2次 導體版이 x-軸 方向으로 slip s 로 移動하는 경우 벡터포텐셜 **A** 및 모든 電流密度는 z-軸 方向成分만이 존재하므로 式(24)는 다음과 같이 된다.

$$\nu (\partial^2 \mathrm{A} / \partial x^2 + \partial^2 \mathrm{A} / \partial y^2) + \mathrm{J} = 0 \tag{28}$$

여기서, A 및 J 는 벡터포텐셜 **A** 및 전류밀도 **J** 의 z-軸 方向成分이다. 또한 전류밀도 J 는

(1) 1次 slot에서

$$\mathrm{J} = \mathrm{J}_s \tag{29}$$

(2) 1, 2次 磁性體 및 空隙에서

$$\mathrm{J} = 0 \tag{30}$$

(3) 2次 slot 또는 導體에서

$$\mathrm{J} = \mathrm{J}_i = -\sigma \{ \partial \mathrm{A} / \partial t + (1-s) V_s \partial \mathrm{A} / \partial x \} \tag{31}$$

이다. 단, V_s [m/s]는 同期速度이다.

3.2 有限要素法의 適用

式(28)을 有限要素法에 의해 풀기 위해 解析領域을 1次 三角要素로 分割하고 Galerkin 理論을 適用하여 要素 matrix 式을 구하면 다음과 같다[3,4].

$$G^e = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\Delta^e \sigma^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1^e \\ A_2^e \\ A_3^e \end{pmatrix} + \frac{\nu^e}{4\Delta^e} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ \text{sym.} & & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1^e \\ A_2^e \\ A_3^e \end{pmatrix} + \frac{(1-s) V_s \sigma^e}{6} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1^e \\ A_2^e \\ A_3^e \end{pmatrix} + \frac{\Delta^e J_s}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

여기서 Δ^e 는 要素의 面積이며, b_i, c_i 는 각각 $b_i = y_{i+1} - y_{i+2}$, $c_i = x_{i+2} - x_{i+1}$ 이다. 단, i 는 1→2→3→1→2로 循環하는 循環數이다.

式(32)를 全要素에 대하여 組合하면 式(33)과 같은 系方程式을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t} S_t \mathbf{a} + S_d \mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{33}$$

式(33)의 左邊 첫째 項의 處理는 定常狀態 解析의 경우에는 $\partial / \partial t = j\omega$ 를 이용하면 式(33)은 式(34)와 같이 複素 行列方程式으로 변형되므로 複素 非對稱 行列方程式을 푸는 프로그램의 作成이 필요하다[18].

$$(j\omega S_t + S_d) \mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{34}$$

또한 定常狀態 解析이 아닌 경우에는 時間項의 處理에 時間差分法 또는 時間領域 加重殘差法 등을 적용하여 式(33)을 풀면 된다[19,20].

4. 結　論

本 硏究는 非對稱 疎行列方程式의 組合과 解法을 위한 앨고리즘을 開發하고자 한 硏究로서 本 硏究에서 開發되는 프로그램을 현재 많이 사용되고 있는 有限要素法에 의한 電氣機器 및 電磁場 數値解析 software package의 non-symmetric sparse matrix solver로 適用한다면 速度를 고려한 電氣機器의 解析에 있어서 매우 情密하고도 빠른 解析結果를 얻을 수 있어 그 有用性이 매우 기대된다.

[참 고 문 헌]

(1) O. Axelsson, V. A. Barker, "Finite Element Solution of Boundary Value Problems－*Theory and Computation*," Academic Press, Inc., 1984.

(2) S. R. H. Hoole, "Computer-Aided Analysis and Design of Electromagnetic Devices," Elsvier Science Pub. Co., Inc., 1989.

(3) 辛 興敎, "誘導形 Linear Motor의 磁束分布解析을 위한 有限要素法 適用硏究(2次補間法適用)," pp.1~42, 碩士學位論文, 漢陽大學校, 1982.

(4) 金東震, "片側式 線形誘導電動機의 有限要素法에 의한 渦電流特性解析 및 搬送시스템 應用," pp.1~33, 碩士學位論文, 漢陽大學校, 1989.

(5) 名取 亮, 野寺 隆, "大規模行列計算における反復計算," 情報處理, Vol.28, No.11, pp.1452~1459, 1987.

(6) 朱 寬正, "有限要素 適應分割解析을 위한 先調整 共軛句配法들의 比較 硏究," 電算構造工學, Vol.1, No.2, pp.121~130, 1988.

(7) 任 達鎬, 辛 興敎, "有限要素法에 의한 磁界解析에 共軛句配法 適用硏究," 電氣學會 論文誌, Vol.39, No.1, pp.22~28, 1990.

(8) M. L. James, G. M. Smith, J. C. Wolford, "Applied Numerical Methods for Digital Computation," 4th edn., HarperCollins College Publishers, 1993.

(9) J. Ll. Morris, "Computational Methods in Elementary Numerical Analysis," Johs Wiley & Sons, Ltd., 1983.

(10) G. H. Golub, C. F. Van Loan, "Matrix Computations," The Johns Hopkins University Press, 1984.

(11) A. Jennings, "Matrix Computation for Engineers and Scientists," John Wiley & Sons, Ltd., 1977.

(12) 辛 興敎, "非線形 電磁界解析에 있어서의 計算時間 節減," 生産技術硏究所論文集, Vol.7, pp.65~74, 1991.

(13) 村田健郎, 小國 力, 三好俊郎, 小柳義夫, "工學における數値シミュレーション," 丸善株式會社, 1988.

(14) 村田健郎, "前處理つき共役勾配法・共役殘差法," 情報處理, Vol.27, No.51, pp.498~507, 1986.

(15) 名取 亮, "BCG法とCGS法," 京都大數理硏究所講究錄, No.613, pp.135~143, 1987.

(16) 藤野淸次, 張 紹良, "反復法の數理," 株式會社 朝倉書店, 1996.

(17) 辛 興敎, "適應要素分割을 위한 새로운 節點追加 앨고리즘 開發," pp.1~66, 韓國電力公社, 1994.

(18) 金 榮重, "誘導形 Linear Motor의 設計를 위한 磁束分布解析에 有限要素法 適用 硏究," 碩士學位論文, 漢陽大學校, 1980.

(19) 任 達鎬, 金 旻洙, 辛 興敎, "電流벡터포텐셜을 이용한 渦流分布의 有限要素解析에 관한 硏究," 電氣學會 論文誌, Vol.37, No.12, pp.839~846, 1990.

(20) 中田高義, 高橋則雄, "電氣工學の有限要素法," 森北出版株式會社, 1982.

이 論文은 '慶尙大學校 生産技術硏究所 學術硏究財團' 支援에 의한 硏究의 일부임