

2차원 유한요소 해석법에 의한 차량용 와전류 제동기의 해석

이종찬, 김 솔, 김윤현, 전연도, 이 주
한양대학교 전기공학과

Analysis of Eddy Current Brake for the Vehicle by 2-D Upwind FEM

J. C. Lee, Sol Kim, Y. H. Kim, Y. D. Chun, Ju Lee
Dept. of Electrical Eng., Hanyang University

Abstract - This paper presents the performances of eddy current brake for the vehicle. Because travelling magnetic field cannot be analyzed accurately in Galerkin finite element method(FEM) for large cell Peclet number, the characteristics are analyzed by using 2-D upwind FEM. The magnet stack width are compensated in order to increase the precision of the solution. The validity of the analysis results is obtained by comparing with experimental data.

(4)식으로 대치하면 (5)식과 같은 지배방정식이 나온다.

$$\nabla \times (\nabla \times A) = J_0 + \sigma(v \times B) \tag{5}$$

2.1.1 원통좌표계의 사변형 요소

원통좌표계에서의 사변형 요소는 그림 1과 같이 나타내어진다. 요소는 2개의 ρ 축 방향의 직선과 2개의 ϕ 축 방향의 호로 구성되어 있다. 정식화 과정을 간소화하기 위해 각 좌표값은 대칭적인 값으로 주어졌고, 무차원 좌표계로의 변환 과정을 행하지 않았다.

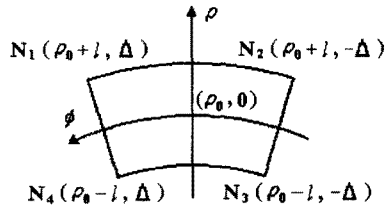


그림 1. 2차원 원통좌표계에서의 사변형 요소

2.1.2 지배방정식의 정식화

벡터식으로 표시된 지배방정식 (5)식을 2차원 원통좌표에서 미분형으로 표시하면, 아래 (6)식이 유도된다.

$$\frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} \right\} = -J_0 + \sigma \omega_\phi \frac{\partial A}{\partial \phi} \tag{6}$$

자기 벡터 포텐셜 A와 여자전류밀도 J_0 는 z축 방향 성분만 가진다. ω_ϕ 는 ϕ 방향의 각속도를 의미하고, σ 는 도체의 도전율, μ 는 투자율이다. 원통좌표계에서 (6)식에 Galerkin법을 적용하면 요소에 대한 계방정식은 (7)식과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^4 \int \int \left\{ \rho \frac{\partial W_i}{\partial \rho} \frac{\partial N_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_i}{\partial \phi} \frac{\partial N_i}{\partial \phi} \right\} A_i d\rho d\phi + \sigma \omega_\phi \int \int \frac{\partial N_i}{\partial \phi} A_i d\rho d\phi = I_0 \int \int \rho W_i d\rho d\phi \tag{7}$$

사변형 요소에서의 보간함수 N_i 와 Upwind 가중함수 W_i 는 다음과 같이 주어진다.

$$N_i = \frac{(\rho_0 \pm l - \rho)}{\pm 2l} \frac{(\pm \Delta - \phi)}{\pm 2\Delta} \tag{8}$$

$$W_i = \frac{(\rho_0 \pm l - \rho)}{\pm 2l} \left\{ \frac{(\pm \Delta - \phi)}{\pm 2\Delta} \pm \frac{3\alpha(\Delta^2 - \phi^2)}{4\Delta^2} \right\} \tag{9}$$

α 는 Heinrich가 제시한 upwinding factor [1]이고,

$$\alpha = \coth\left(\frac{Pe}{2}\right) - \frac{2}{Pe} \text{ 으로 정의된다.}$$

1. 서 론

최근에 들어서, 대형 차량의 보조 제동 장치에 와전류 제동기가 널리 사용되게 되었다. 와전류 제동기의 정확한 특성 해석은 설계에 있어서 차량의 안전성을 높이기 위해 중요한 요소가 되었다.

와전류 제동기는 도체가 자계내에서 움직일 때 발생하는 와전류에 자계의 상호작용에 의해서 제동력이 발생한다는 원리를 이용한다. 따라서, 해석은 운동 자체 문제를 고려하게 되는 데, Galerkin 유한요소 해석법에 있어서는 cell Peclet number ($Pe = \sigma \mu v_\phi h$)가 클 경우에 해의 진동이 일어난다는 사실이 널리 알려져 있다. 그래서, 운동자체 해석에 있어서는 옳은 해를 얻기 위하여 Upwind 유한요소법이 사용되는 데, 지금까지 대부분 해석의 경우 직각좌표계에서 사각형 요소를 적용한 결과가 많았다[1][2]. 이럴 경우 회전을 해석한다 해도 모델을 선형기로 근사화 하여 해석하는 과정이 필요했다. 본 논문에서는 차량용 와전류 제동기를 해석하는 데 선형기로의 변형 과정 없이 원통 좌표계에서의 2차원 Upwind 유한 요소법을 적용하여 그 특성을 살펴보았다. 2차원 해석에서 정확성을 높이기 위해 단위효과를 고려한 유효 적용폭을 계산하였고[3], 해석 결과의 타당성은 실험 결과와 비교되어 입증될 것이다.

2. 본 론

2.1 지배방정식

이 해석의 지배방정식은 맥스웰 방정식과 몇 개의 보조방정식에서 유도된다.

$$\nabla \times H = J_0 + J_e \tag{1}$$

$$B = \mu H \tag{2}$$

$$\nabla \times A = B \tag{3}$$

$$J_e = \sigma(v \times B) \tag{4}$$

Ampere 주회법칙의 미분형인 (1)식에 자계의 보조방정식 (2)식과 자기벡터포텐셜의 정의식 (3)식을 대입하고, 우변의 와전류항을 속도기전력에 의한 와전류식

P_e 는 Peclet number 로서 (10)식과 같이 여러 변수들로 구성된다.

$$P_e = \sigma \mu v_\phi h \quad (10)$$

σ 는 도체의 도전율, μ 는 물질의 투자율, v_ϕ 는 ϕ 축 방향의 속도, 그리고 h 는 ϕ 방향의 요소 크기이다.

2.2 해석모델 및 해석방법

본 논문에서는 3차원 해석 대신 시간단축 및 해석의 효율성을 고려하여 원통 좌표계의 ρ - ϕ 평면에 대한 2차원 해석을 실시하였고, 12극 모델의 각 극당 주기성을 고려하여 1극의 부분만을 해석 모델로 정했다.

2.2.1 실험장치

그림 2는 와전류 제동기 실험장치이다. 총 12극 모델에서 그림에는 90°부분만 표시하였으며, 직류전류가 공급된다. 외부의 드럼이 회전하는 형태이며 드럼 내부에는 0.1mm의 구리를 도금, 도전율을 높여, 와전류 발생량을 증가시켰다. 그 제원은 표 1에 나타내었다. 이 실험장치에서 측정된 자료는 해석치의 타당성을 검증하기 위해서 해석치와 비교되었다.

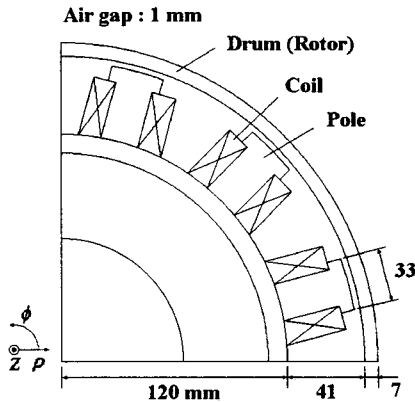


그림 2. 와전류 제동기

표 1. 와전류 제동기의 제원

구분	값	단위
중량	20	[kgf]
극수	12	
극피치	84	[mm]
공극의 길이	1	[mm]
여자전류	3.34×12	[A]
권선수	690	[Turn]
코일의 저항	0.05	[Ω]
기자력	2307	[A · t]

2.2.2 해석모델

그림 3은 실험에 사용된 와전류 제동기에서 1극만 나타낸 1/12 모델이다. 그림에서와 같이 요소는 사변형 요소로 이루어졌으며, 각 경계면에는 고정경계조건과 반주기 경계조건이 주어졌다.

2.2.3 유효 적층폭 계산

와전류 제동기의 해석에 있어서 드럼과 전기자의 서로 다른 적층폭 때문에 발생하는 프링징 현상을 고려하여

3차원 해석을 하는 것이 정확한 해를 얻기 위해 바람직하지만, 2차원 해석이 3차원 해석보다 모델링이나 해석시 더 쉽고 빠르기 때문에 본 논문에서는 2차원 해석을 실시한다. 대신에, 프링징 효과를 보정하고 좀 더 정확한 2차원 해석의 해를 얻기 위해 유효 적층폭을 계산해준다.

공극을 관통하는 자속 Φ 와 공극에 저장된 자기 에너지 W_m 은 다음 식으로 표현된다.

$$\Phi = S \cdot B \quad (8)$$

$$W_m = \int_V \left(\int_B H \cdot dB \right) dV \quad (9)$$

S는 자속이 통과하는 단면적이고, B는 공극에서의 자속 밀도, V는 해석모델 전체의 체적이다. 유효적층폭은 (9) 식과 릴럭턴스의 정의 $R = l / \mu S$ 로부터 (10)식과 같이 구해진다.

$$w_{eff} = \frac{g \Phi^2}{2 W_m l_p \mu_0} \quad (10)$$

w_{eff} 는 유효 적층폭, g 는 공극의 길이, μ_0 는 진공의 투자율, l_p 는 폴의 길이이다.

이 모델의 경우 전기자의 적층길이는 42mm이고, 계산된 유효 적층폭은 43.863mm이다.

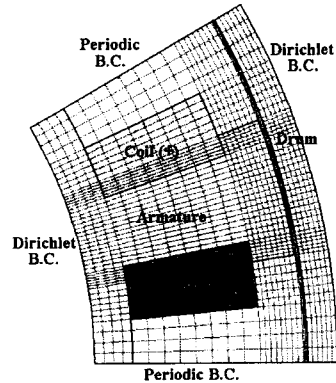


그림 3. 해석모델

2.2.4 제동력의 계산

해석시 제동력의 계산은 Maxwell Stress Tensor법을 사용하였다. 이 경우 접선과 법선방향의 힘밀도는 식 (11), (12)와 같이 주어진다.

$$p_t = \frac{B_n B_t}{\mu_0} \quad (11)$$

$$p_n = \frac{B_n^2 - B_t^2}{2\mu} \quad (12)$$

B_n 과 B_t 는 각각 자속밀도 벡터의 접선방향과 법선방향 성분이고, μ_0 는 진공의 투자율이다. 원통좌표계에서는 그림 4에 볼 수 있듯이 힘이 계산되는 적분 경로가 요소의 중앙을 통과하는 호의 형태가 되고, B_n , B_t 는 각각 B_ρ , B_ϕ 에 대응되며 그 값은 (3)식으로부터 다음의 (13), (14)식으로 근사화된다.

$$B_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \phi} = \frac{1}{\rho_c} \frac{1}{(\rho_1 - \rho_3)(\phi_1 - \phi_3)} \{-\rho_3 A_1 + \rho_3 A_2 - \rho_1 A_3 + \rho_1 A_4 + (A_1 - A_2 + A_3 - A_4) \rho_c\} \quad (13)$$

$$B_s = -\frac{\partial A}{\partial \rho} = \frac{1}{(\rho_1 - \rho_3)(\phi_1 - \phi_3)} (\phi_3 A_1 - \phi_1 A_2 + \phi_1 A_3 - \phi_3 A_4 + (-A_1 + A_2 - A_3 + A_4)\phi_c) \quad (14)$$

여기서, $\rho_{1,2,3,4}$ 및 $\phi_{1,2,3,4}$ 는 각각 사변형 요소의 각 절점의 좌표치이고, ρ_c, ϕ_c 는 요소 중앙의 좌표값이다. $A_{1,2,3,4}$ 는 요소 네 절점의 자기벡터 포텐셜 값을 의미한다.

결국 (11)식에 의해 구해진 접선방향의 힘밀도 F_t 에 적분경로의 전체길이와 유효 적층폭을 곱하여 주변 발생하는 제동력을 계산할 수 있다.

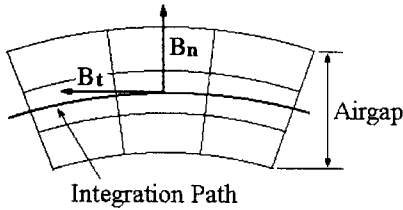
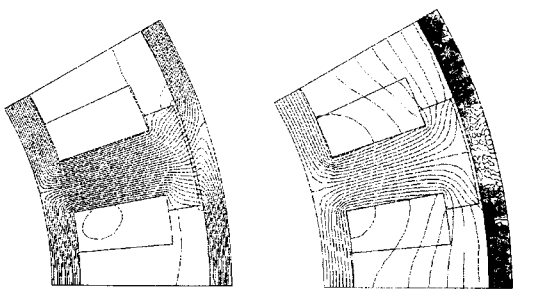


그림 4. 힘의 적분경로

2.3 해석결과

그림 5는 2000rpm에서의 자속 분포도를 나타낸다. (a)그림은 원통좌표계에서 Upwind 유한요소법에 의한 해석결과이고, (b)는 직각좌표계에서 삼각형 요소에 대해 Galerkin 유한요소법으로 해석한 결과이다. 그림(b)와 비교해 볼 때 그림(a)에서는 운동하는 외부 드럼에서 자속의 일그러짐 없이 올바른 해석 결과가 구해짐을 알 수 있다. 그림 6은 그림 4(a)에서 ρ 축 방향의 공극 자속밀도를 나타낸 그래프이다. 자속의 탈출부에서 자속이 집중됨에 따라 밀도가 높아짐을 볼 수 있다.

그림 7은 와전류 제동기의 실험장치에서 측정된 제동력과 해석시 Maxwell Stress Tensor법에 의해 얻어진 제동력을 속도에 따라 비교한 것이다. 그래프에서 알 수 있듯이 원통좌표계에서 사변형 요소를 적용한 해석 결과는 실험에서 얻어진 값과 거의 같은 결과를 나타낸다.



(a) Upwind FEM (b) Galerkin FEM

그림 5. 자속 분포도

3. 결 론

본 논문은 원통좌표계에서 Upwind FEM에 의한 해석 방법과 그 결과를 보여주고, 실측치와 비교하여 그 타당성을 입증하였다. 이 방법은 회전기를 직선기 형태의 모델로 변환하는 과정없이 Upwind FEM을 가능하게 해준다. 그러나, 모든 회전기가 이러한 방법에 적용될 수 있는 것은 아니다. 가령, 해석도면에서 pole의 축면은 ρ 축 방향을 향하고 있다. 그러나, 실제의 제동기

에는 서로 평행한 구조를 지니고 있다. 이러한 구조는 오히려 원통좌표계를 사용하려 할 때 변형을 해야 하는 곤란한 점이 발생한다. 비록 이러한 결점이 있지만 원통좌표계에서의 Upwind FEM 해석법은 해석에 있어서 많은 편리함을 제공한다고 볼 수 있다.

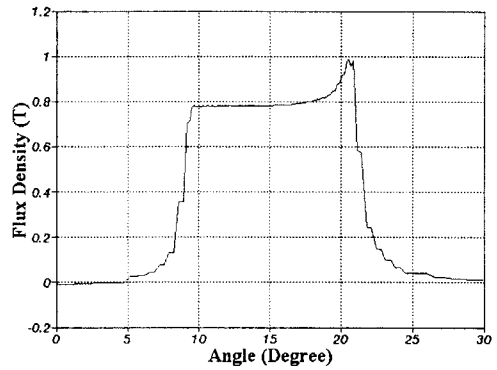


그림 5. 공극에서의 자속밀도

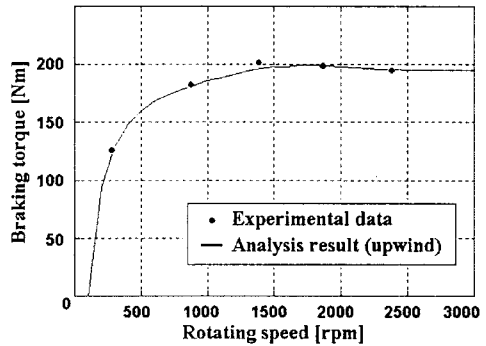


그림 6. 각속도에 따른 제동력

(참 고 문 헌)

- [1] J. C. Heinrich, P. S. Huyakorn, O. C. Zienkiewicz and A. R. Mitchell, "An upwind finite element scheme for two dimensional convective transport equation," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 11, pp. 131-143, 1977.
- [2] T. Furukawa, K. Kbmiya and I. Muta, "An upwind galerkin finite element analysis of linear induction motors," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 26, no. 2, March 1990.
- [3] K. H. Ha, J. P. Hong, G. T. Kim, J. Lee and D. H. Kang, "Study on the design for touch free linear eddy current brake," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 35, no. 5, pp. 4031-4033, September 1999.
- [4] T. Todaka and M. Enokizono, "Traveling magnetic field analysis of electromagnetic retarder by using upwind finite element method," International Conference on Electrical Engineering(ICEE98), vol. 1, pp. 693-696, 1998.
- [5] Y. S. Um, A Study on the Establishment of the Measuring Method and the Evaluation Method of the Magnetic Field on the Electromagnetic Type Eddy Current Brake, Ph. D dissertation, University of Musashi Tech., Japan, 1999.