2001년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2001.7.18-20

리니어프로그래밍을 이용한 균등자장 발생용 마그네트의 최적설계

이상진, 고태국*
위덕대학교 전기공학과
연세대학교 전기 · 전자공학과*

Homogeneous Magnet Design Technique Using Linear Programming

Sang-Jin Lee, Tae Kuk Ko*
Dept. of Electrical Eng., UIDUK University
Dept. of Electrical & Electronic Eng., Yonsei University

Abstract - We introduce a technique for designing homogeneous magnets using linear programming. The method has several advantages over existing techniques including: it allows complete flexibility in arbitrary geometric constraints on both the coil locations and the shape of the homogeneous volume; it guarantees a globally optimal solution, and it automatically choose the minimum number of coils necessary for the constraints.

1. 서 론

MRI나 NMR 또는 각종 연구용으로 사용되는 마그네트의 기본적인 요건은 시간적으로나 공간적으로 매우 균등한 자장을 만드는 경우가 대부분이다. 균등자장을 발생시키기 위한 이론적인 연구는 초기에 Helmholtz에 의해서 수행되어 유명한 Helmholtz 코일이 고안되었으며, Mckeehan은 균등자장 영역의 크기를 증가시키기 위하여, 여러 쌍의 원형 필라멘트 코일을 이용하여 코일간의 간격 및 코일반경을 변수로 하는 해석 해를 제시하였다. 또한 Garret는 축대칭계에서 발생하는 자장에 대하여 Legendre 구(球)함수를 도입하여 해석함으로써 균등자장에 관한 매우 유용한 이론을 제시하였으며, 이러한 이론들을 바탕으로 여러 가지 솔레노이드 형상의 코일이 균등자장 발생용으로 제안되었다.[1]~[6]

이들 방법의 단점은 솔레노이드형 마그네트의 형상을 미리 규격화하여 설계변수를 도출한 다음 최적화하기 때문에 4분할 또는 6분할 등 미리 결정된 권선의 한계를 벗어날 수 없으며, 균등자장을 요구하는 공간의 형상을 임의대로 설정하는 것이 쉽지 않다. 또한 주어진 자장균일도 내에서는 임의의 값으로 설계하여야 하지만 이 값에 맞추어 설계를 하기 때문에 고비용의 원인이 되고 있다는 것이다.

균등자장을 발생시키는 마그네트의 일반적인 설계 방법은 균등자장이 요구되는 공간에서의 자장의 공간적 분포를 수식화하고 이로부터 설계조건을 산출해야 하지만, 최근에는 전자장 수치해석 프로그램과 최적화 프로그램의 발달로 그 과정을 대폭 간소화시킬 수 있게 되었다. 본 논문에서는 일반적인 균등자장 발생용 마그네트의 설계 요구조건을 알아보고, 설계 요구조건을 만족하면서 전력을 적게 소모하는 마그네트의 최적설계 문제를 다루었다. 이를 위하여 먼저 최소전력 마그네트의 최적설계 문제가 리니어프로그래밍(linear programming) 문제로 변형될 수 있다는 것을 보였고, 선형계획법을 이용하여 해를 구할 경우 다분할 솔레노이드 마그네트의 분할 수를 자동적으로 최소화하여 제작가능한 마그네트를 설계할 수 있다는 것을 확인하였다.

2. 설계의 기본개념

2.1 설계조건

균등자장 발생용 마그네트를 설계하기 위해서는 다음과 같은 조건들을 각각 만족시켜야 한다.

첫 번째, 자장을 발생시키는 권선의 형상 및 분할 수 등에 제한이 없어야 한다. 지금까지 연구된 많은 방법들은 먼저 권선의 형태를 double Helmholtz type coil 또는 notched coil, 다분할 마그네트 등으로 그 형상을 미리 정한 다음 설계변수를 결정하여 이를 최적화시켰기 때문에 미리 결정된 권선의 한계를 벗어나는 것이 불가능하였다. 따라서 기계적인 설계 범위의 한계 내에서 분할 수나 전류 값, 형상 등을 자유롭게 결정할 수 있어야 할 것이다.

두 번째는 균등자장을 요구하는 공간에도 제한이 없어야 한다. 대부분의 경우 주어진 구(球) 형태의 공간(DSV; diameter spherical volume)에서 자장균일도를 만족하도록 설계를 하는 것이 일반적이기는 하지만, 최근에는 마그네트의 크기를 보다 줄이기 위하여 균등자장 공간을 원통형으로 설계하기도 한다. 물론 이 경우에는 앞에서 언급한 Legendre 구(球)함수를 이용하는 것이 불가능하다.

세 번째로는 설계 시간을 단축하면서도 전역 최적해(globally optimal solution)를 얻을 수 있어야 한다. 최적화 방법에는 결정론적인 방법(deterministic method)과 확률론적인 방법(stochastic method)이 있는데, 결정론적인 방법은 기울기 정보를 사용하는 방법으로 수렴 속도가 빠르지만 일반적으로 전역 최적해를 구할 수 있는 가능성이 확률론적인 방법보다는 적다. 반면 확률론적인 방법은 확률적인 탐색을 사용하는 방법으로 수렴속도는 느리지만, 전역 최적해를 구할 가능성이 상당히 크다. 따라서 마그네트의 설계에는 결정론적인 방법을 사용하면서도 전역 최적해를 보장할 수 있어야 한다.

네 번째로는 당연한 요구 조건이긴 하지만 마그네트의 설계에서 가장 중요한 내용으로, 제작이 가능한 설계 값을 도출해야 한다는 것이다. 즉, 최적화 과정에서 분할 권선의 수를 자동적으로 최소화하여야 한다. 이는 공간적으로 분할 권선의 수가 많아지면 보빈의 설계 및 권선의 배치 등이 불가능해지기 때문이다.

이상의 내용을 바탕으로 균등자장 발생용 마그네트의 설계에 관한 기본개념을 정리하면 그림 1과 같다. 먼저 주어진 설계 범위 내에서 권선이 위치할 수 있는 가능 영역을 분할하였고, 이들 가능 영역 중에서 최적화 과정에서 분할 수나 전류의 값이 결정되도록 하였다. 또한 균등자장을 요하는 공간의 형태도 임의로 결정할 수 있도록 하였다.

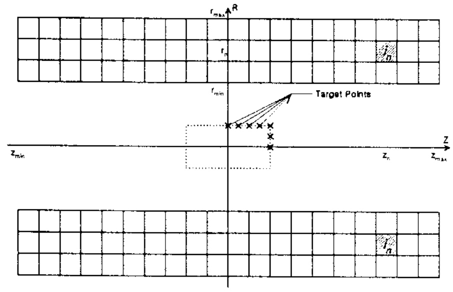

그림 1. 균등자장 발생용 마그네트 설계의 기본개념
Fig. 1. Basic concept for homogeneous magnet design

2.2 목적함수와 구속조건

그림 1에서 결정하여야 할 내용은 설계에서 요구하는 균등자장을 발생시키는 최소의 권선 수 및 전류 값이다. 그림에서 권선이 가능한 영역을 N개의 작은 영역으로 나누었으며, n번째 영역에 흐르는 전류의 값을 i_n으로 정의하였다. i_n이 위치하는 곳은 (r_n, z_n)이며, r_n과 z_n은 각각 $r_{\min} < r_n < r_{\max}$, $z_{\min} < z_n < z_{\max}$의 범위를 만족한다. 여기서 전류에 발생하는 자속밀도 B는 r_n 및 z_n 등의 위치에는 비선형이지만, 위치가 고정된다면 전류값 i_n에는 비례한다는 것을 알 수 있다. 즉, M개의 목표지점(target points)에서 자속밀도는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{i} \tag{1}$$

여기서, A_{mn}은 n번째 전류요소에 흐르는 단위전류에 의해 m번째 목표지점에 발생하는 자속밀도의 값을 의미한다. $M \times N$ 행렬인 $\mathbf{A}$는, 서로 이웃한 권선이 동일한 목표지점에 주는 영향은 서로 비슷하므로 각 요소의 크기가 일정 범위에 있는 행렬이다. 비례상수인 A_{mn}을 구하는 방법은 여러 문헌에서 다루고 있으나 본 논문에서는 상용 전자장해석 프로그램인 영국 Vector Fields사의 opera-2d를 이용하였다.

벡터 $\mathbf{i}$는 $N \times 1$의 크기로 각 권선에 흐르는 전류 값이다. 따라서 설계 목표는 최소전력을 소모하면서 목표지점에 원하는 자장균일도를 갖는 전류벡터 $\mathbf{i}$를 결정하는 것이다.

먼저 목표지점에서 원하는 자장균일도를 얻기 위해서는 다음 식을 만족해야 한다.

$$|b_m - B_0| \le \varepsilon B_0, \quad m = 1, \cdots, M \tag{2}$$

여기서 B_0는 자장균일도가 0일 때 목표지점에서 원하는 자속밀도의 값이며, ε은 자장균일도로 일반적인 설계값으로는 1에서 수십 ppm 정도가 사용된다. 또한 b_m은 m번째 목표지점에서의 자속밀도 값으로 식 (1)에 의하여 구할 수 있으며, 따라서 균등자장이 요구되는 목표지점의 형태를 임의로 취할 수 있다.

식 (2)에서 부등호 구속조건을 사용하는 것은 매우 중요한 내용으로, 등호 구속조건을 사용할 경우 과도설계가 될 수 있기 때문이다. 즉 목표지점에서는 자장균일도 범위 내에서는 임의의 값을 취할 수 있음에도 불구하고 등호 구속조건을 사용할 경우 이를 강제적으로 일정한 자장균일도로 맞추기 때문에 과도설계가 되는 것이다. 식 (2)를 구속조건으로 사용하지 않고 목적함수로 이용하는 경우에도 같은 결과를 초래할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 균등자장 발생용 마그네트의 설계를 마그네트에서 소모되는 전력을 목적함수로 하고 식 (2)를 구속조건으로 하는 최적화문제로 다루고자 한다.

한편, 마그네트에서 소모하는 전력은 식 (3)과 같이 각각의 권선에서 소모하는 전력의 합으로 계산할 수 있다.

$$P = \sum_{n=1}^{N} |i_n|^2 R_n = \sum_{n=1}^{N} |i_n|^2 \left(\frac{2\pi r_n}{\sigma_c S_n} \right) \tag{3}$$

여기서 R_n은 n번째 권선의 저항이며, r_n은 n번째 권선의 반지름, σ_c는 도체의 전도율이며 S_n은 n번째 권선의 단면적을 의미한다. 따라서 $|i_n|/S_n$은 n번째 권선의 전류밀도이며 j_n으로 나타낼 수 있다.

$$P = \frac{2\pi}{\sigma_c} \sum_{n=1}^{N} j_n |i_n| r_n \tag{4}$$

권선으로 구성되는 마그네트의 경우 일반적으로 하나의 전원과 한 종류의 권선 만을 사용하므로 각 권선영역에서의 전류밀도는 일정하다고 할 수 있다. 즉, $j_n = J$이며 마그네트에서 소모하는 전력은 다음과 같이 변형된다.

$$P = \frac{2\pi J}{\sigma_c} \sum_{n=1}^{N} |i_n| r_n \tag{5}$$

따라서 균등자장 발생용 마그네트의 설계는 식 (6)의 목적함수와 구속조건을 갖는 최적화 문제로 귀착된다.

$$\text{목적함수;} \quad \sum_{n=1}^{N} r_n |i_n| \tag{6}$$
$$\text{구속조건;} \quad B_0(1-\varepsilon) \le b_m \le B_0(1+\varepsilon), \quad m = 1, \cdots, M$$

위의 식 (6)은 일반적인 최적화 문제로 리니어프로그래밍(linear programming)으로 변형할 수 있으며, 리니어프로그래밍으로 최소화할 경우 벡터 $\mathbf{i}$의 0이 아닌 항을 최소화시켜 주는 성질이 있다. 즉, 주어진 구속조건을 만족하는 범위에서 권선영역의 수를 자동적으로 최소화할 수 있다는 장점이 있다.

식 (6)을 리니어프로그래밍에 적용하기 위하여 $|i_n| \le t_n$을 만족하는 보조변수 $t_n (n = 1, \cdots, N)$을 도입하여 정리하면 식 (7)과 같다.

$$\text{목적함수;} \quad \sum_{n=1}^{N} r_n t_n \tag{7}$$
$$\begin{aligned} \text{구속조건;} \quad & \mathbf{A}\mathbf{i} \le B_0(1+\varepsilon) \\ & -\mathbf{A}\mathbf{i} \le -B_0(1-\varepsilon) \\ & i_n \le t_n, \quad (n = 1, \cdots, N) \\ & -i_n \le t_n, \quad (n = 1, \cdots, N) \end{aligned}$$

t_n은 $|i_n|$ 보다 항상 크거나 같기 때문에, t_n의 합을 최소화하는 과정에서 $|i_n|$과 같게 된다. 결론적으로 최소전력을 소모하는 균등자장 발생용 마그네트의 설계문제는 $2m + 2n$개의 부등호 구속조건을 갖는 정규화된 리니어프로그래밍의 최소화 문제로 귀결되었다. 본 논문에서는 식 (7)의 최적화 문제를 해결하기 위하여 상용 수치해석 프로그램인 Matlab의 lp() 함수를 사용하였다.

3. 적용사례

본 논문에서 제시하는 방법의 타당성을 검증하기 위하여 균등자장 발생용 솔레노이드형 다분할 마그네트의 최적설계를 다루어 보았다. 먼저 식 (1)에서 비례상수인 A_{mn}을 구하기 위하여 그림 2와 같이 권선이 위치할 수 있는 영역($r_{min} \leq r \leq r_{max}$, $z_{min} \leq z \leq z_{max}$)을 N분할하였고, 균등자장이 요구되는 공간은 50cm DSV를 의미할 수 있도록 ¼분면에만 M개의 목표지점을 설정하였다. 설계범위 및 원하는 중심자장(B_0)과 자장균일도(ε) 등을 표 1에 나타내었다.

표 1. 마그네트의 설계범위

Table 1. Specifications of homogeneous magnet

설계요소	값
r_{min}	500 mm
r_{max}	700 mm
z_{min}	0
z_{max}	1000 mm
N, M	80, 7
B_0	1.0 T
ε	100 ppm

식 (1)의 비례상수인 A_{mn}에 관해서는 여러 문헌에서 주로 해석적인 방법을 제시하고 있으나 본 논문에서는 향후 비선형 문제에도 적용할 수 있도록 상용 전자장해석 프로그램인 영국 Vector Fields사의 opera-2d를 이용하였다. 즉 그림 2와 같이 각각의 권선 영역에 1A의 전류가 흐르고 다른 영역에는 전류가 흐르지 않는 N개의 모델을 만들어서 해석한 후 M개의 목표지점에서 자속밀도의 값을 평가하여 비례상수 행렬을 구하였다.

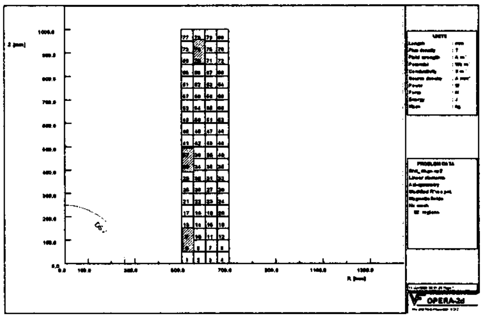

그림 2. 비례상수 A_{mn}을 얻기 위한 해석모델

Fig. 2. Analysis model for the linear constant matrix

이 단계에서 중요한 것은 권선이 위치할 수 있는 영역의 개수가 너무 많으면 리니어프로그래밍이 수렴하지 않는 경우가 발생한다는 것이다. 따라서 영역을 크게 분할한다면 항상 전역 최적해를 얻을 수 있다. 또한 보빈을 분할하여 제작하기가 어려운 경우에는 각 권선의 반지름이 같아지도록 반지름 방향으로는 분할 수를 줄여주거나 하나로 만드는 작업이 필요하다. 이렇게 얻어진 최적해는 그림 2와 같이 각 권선 영역에서의 전류 값이며 그 형상은 고정되어 있다. 또한 전역 최적해를 얻기 위하여 권선이 위치할 수 있는 영역을 크게 분할하였기 때문에 정확한 위치를 얻기 위해서는 일차 최적화 과정에서 얻은 영역을 다시 한 번 분할하는 여러 단계의 최적화 과정이 필요하다. 형상과 관련된 많은 변수들이 설계에 관여하는 경우, 각 설계변수들의 변화가 기기 전체에 미치는 영향을 판단하기란 쉬운 일이 아니며, 또한 설계변수들이 서로 상충되는 경우가 종종 있다. 따라서 본 논문에서는 권선의 단면 형상을 사각형으로 단순화시킨 다음 가로, 세로비 등을 설정하였고, 각 권선의 전류밀도를 일치시키기 위하여 사용가능한 전류밀도를 설정한 다음 최적화하여 구한 전류 값을 나타낼 수 있도록 권선의 면적을 조정하였다. 그림 3은 이러한 과정을 2회 수행한 후 30㎝ DSV에서의 자장균일도를 나타낸 것이다.

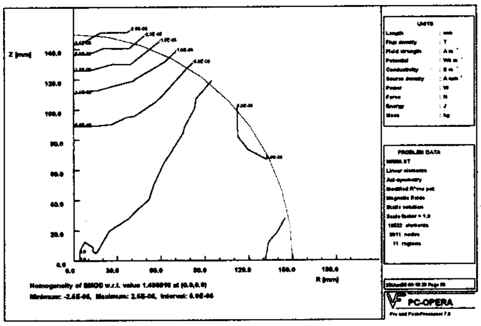

그림 3. 30cm DSV에서의 자장균일도

Fig. 3. Homogeneity in the 30cm DSV

4. 결 론

균등자장 발생용 마그네트의 최적설계 문제를 리니어프로그래밍으로 변환하여 해결하였다. 본 논문에서 제시한 방법은 기존의 여러 가지 방법과 비교하여 다음과 같은 장점을 갖는다.

- 권선 영역의 분할 수를 최소화하면서 자동으로 결정된다.
- 균등자장을 요구하는 공간에 대한 형상을 임의로 설정할 수 있다.
- 항상 전역 최적해를 찾아준다.

이 논문은 1999년도 한국학술진흥재단의 연구비에 의하여 지원되었음(1999-003-E00155)

[참 고 문 헌]

[1] Markus Zahn, Electromagnetic Field Theory, John Wiley & Sons, pp.331, 1979

[2] L. W. Mckeehan, "Combinations of Circular Currents for Producing Uniform Magnetic Fields", Review of Scientific Instruments, Vol.7, pp.150-153, 1936

[3] M. W. Garret, "Axially Symmetric Systems for Generating and Measuring Magnetic Field", Journal of Applied Physics, Vol.22, No.9, pp.1091-1107, 1951

[4] S. T. Loney, "Design of Compound Solenoids to Produce Highly Homogeneous Magnetic Fields", J. Inst. Maths Applics, Vol.2, pp.111-125, 1966

[5] P. A. Colavita, "Optimum Spacing for a Pair of Thick Circular coils of Square Section", Rev. Sci. Instr., Vol.49, pp.1006-1007, 1978

[6] K. Kaminishi, et al., "Practical Method of Improving the Uniformity of Magnetic Fields Generated by single and Double Helmholtz Coils", Rev. Sci. Instr., Vol.52, No.3, pp.447-453, 1981