

## 안정도가 강화된 적응 IIR 필터

남 현도, 권 혁, 서 성대  
단국대학교 대학원 전기공학과

### A Stabilized Adaptive IIR Filter

Hyun-Do Nam, Hyok Kwon, Sung-Dae Su  
Department of Electrical Engineering, Dankook University, Seoul, Korea

**Abstract** - The adaptive IIR filters is more effective than adaptive FIR filters which have the same order of IIR filters. But the IIR filters may have stability problems especially when the adaptive algorithm is not converged.

In this paper, a stabilizing procedure for adaptive IIR filters is proposed, and computer simulation is performed to show the effectiveness of proposed schemes.

#### 1. 서 론

적용 신호 처리를 위한 적응 알고리즘으로는 계산량의 문제 때문에 (LMS) 알고리즘이 많이 쓰이고 있으나 수렴 속도가 느리고 바람직한 특성을 얻기 위해서는 차수가 크야 하는 단점이 있으며, 최소 자승법은 수렴 속도는 빠르나 차수가 큰 경우에 계산량이 많으므로 실시간 처리가 어려운 단점이 있다[1].

적용필터의 구조로는 안정도의 문제 때문에 FIR 구조가 많이 사용되고 있으나 같은 정도의 성능을 얻기 위해서 IIR 구조보다 더 높은 차수의 필터가 필요하게 되어 계산량이 많은 단점이 있어 IIR 구조의 필터에 대한 연구가 활발히 진행되고 있으나, 적응 시스템의 작동 초기에 적응 IIR 필터의 극점이 z평면에서 단위 원 밖으로 나가는 경우 시스템 자체가 불안정해질 수 있다.

본 논문에서는 시스템의 작동 초기에는 IIR 필터의 극점을 원점방향으로 끌어당겨 안정도를 개선하고 정상 상태에는 원위치를 보내 필터 성능에는 영향을 미치지 않는 안정도가 강화된 적응 IIR 필터 알고리즘을 제안하였다.

#### 2. 적응 필터 알고리즘

##### 2.1 LMS 알고리즘 및 NLMS 알고리즘

LMS 알고리즘은 최경사법의 일종으로 매 스텝마다 기울기 벡터를 순시자승오차를 이용하여 추정하며 이를 정리하면 다음 식과 같이 된다.

$$W(n+1) = W(n) - \mu R^{-1} \hat{v}(n) \quad (1)$$

여기에서 R은 입력 correlation 벡터이며, W(k)으로부터 W(k+1)로의 이동이 기울기 벡터의 추정치의 마이너스 방향으로 이루어지므로 적응필터의 계수 벡터는 performance surface의 최경사 경로를 따라 갱신된다. 입력의 power를  $\sigma^2$ 라 두면 식 (1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$W(n+1) = W(n) - \frac{\mu}{(P+1)\sigma^2} \hat{v}(n) \quad (2)$$

여기서  $0 < \mu < 1$  이며 P는 필터의 차수이다.

$E[e^2(n)]$  대신에 순시자승오차  $e^2(n)$ 를 이용하면  $\hat{v}(n)$ 를 훨씬 간편하게 추정할 수 있다.

$$\hat{v}(n) = \frac{\partial e^2(n)}{\partial W(n)} = 2e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial W(k)} = -2e(n)X(n) \quad (3)$$

식 (3)에 평균을 취하면  $E[\hat{v}(n)] = \nabla$  이 되어 unbiased gradient임을 보일 수 있다. 식(3)을 식(2)에 대입하면

$$W(n+1) = W(n) + \frac{2\mu}{(P+1)\sigma^2} e(n)X(n), \quad 0 < \mu < 1 \quad (4)$$

이 되며 이를 NLMS 알고리즘이라 하며 다음 식과 같이 쓸 수도 있다.

$$W(n+1) = W(n) + \frac{\mu_n}{|X(n)|} e(n)X(n) \quad (5)$$

위 식은 입력이 지나치게 작을 때는 발산하는 문제점이 생기게 되므로 다음 식과 같이 수정하여 사용할 수 있다.

$$W(n+1) = W(n) + \frac{\mu_n}{a + |X(n)|} e(n)X(n) \quad (6)$$

이때  $\sigma^2$ 의 추정이 쉽지 않을 경우 식 (4) 대신에 다음 식을 사용한 것이 LMS 알고리즘이다.

$$W(n+1) = W(n) + 2\mu e(n)X(n) \quad (7)$$

그러나 LMS 알고리즘은 W(n+1)의 갱신식이 입력 X(n)에 바로 관계하기 때문에 입력에 잡음이 섞이는 경우 잡음의 영향을 바로 받게 된다 (gradient noise amplification problem).

LMS 알고리즘은 구조가 간단하고 계산량이 적다는 장점 때문에 널리 사용되고 있으나, 음성 신호 등과 같이 참조 신호의 파워가 변하는 경우에는 수렴이 늦고 적절한 수렴 계수를 선정하는 것이 매우 어렵다.

##### 2.2 Recursive LMS 알고리즘의 전개

IIR 필터구조를 이용한 적응 필터는 1976년 Feintuch 에 의해서 소개되었다. recursive LMS 알고리즘을 위한 간단한 블록 다이어그램은 아래의 그림 1과 같이 나타낼수 있다[2]. 여기서 x(n)과 y(n)은 각각 기준 입력값과 제어필터의 출력값이고, d(n)과 e(n)은 각각 제어를 하지않을때의 소음신호와 제어시의 오차값을 의미한다.

x(n)과 y(n)이 입력과 출력인 전달함수 H(z)은

$$H(z) = \frac{A(z)}{1-B(z)} \quad (8)$$

이 되며, L, M차의 A(z)과 B(z)이라 하면

$$H(z) = \frac{a_0(n) + a_1(n)z^{-1} + a_2(n)z^{-2} + \dots + a_{L-1}(n)z^{L-1}}{1 - [b_1(n)z^{-1} + b_2(n)z^{-2} + \dots + b_{L-1}(n)z^{L-1}]} \quad (9)$$

라고 할수 있다.

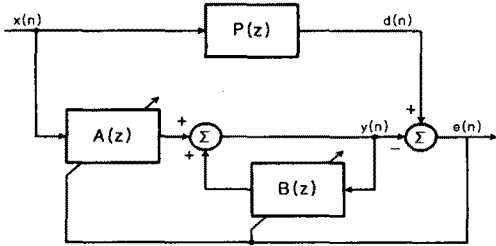


그림 1. IIR LMS 알고리즘 블록 다이어그램

또한, IIR 필터의 계수 벡터 A(n)과 B(n)를

$$A(n) \equiv [a_0(n) \ a_1(n) \ \dots \ a_{L-1}(n)]^T \quad (10)$$

$$B(n) \equiv [b_1(n) \ b_2(n) \ \dots \ b_M(n)]^T \quad (11)$$

$$X(n) = [x(n) \ x(n-1) \ x(n-2) \ \dots \ x(n-L+1)] \quad (12)$$

$$Y(n-1) \equiv [y(n-1) \ y(n-2) \ \dots \ y(n-M)]^T \quad (13)$$

라고 한다면, A(n)과 B(n)은 다음과 같은 업데이트 식으로 나뉘어 쓸 수 있다.

$$A(n+1) = A(n) + \mu_a X(n)e(n) \quad (14)$$

$$B(n+1) = B(n) + \mu_b Y(n-1)e(n) \quad (15)$$

위의 식(14)과 식(15)을 이용하면  $\mu_a$ 와  $\mu_b$ 의 값을 각기 달리 줌으로써 분모항과 분자항을 각각 따로 제어 가능하다.

### 2.3 Recursive LMS 알고리즘의 안정화 기법

Recursive LMS는 앞에서 전개한 것과같이 항상 극점이 존재하므로 안정성에 제한이 있다. 따라서 이 알고리즘을 안정되게 수행하기 위해서는 항상 극점이 단위 원 안쪽에 있도록 극점의 위치를 확인하여 조정해야 한다. 극점의 위치를 추적하는 방법으로 Kharitonov의 이론[4]이 주로 사용되고 있으나 이의 방법으로 극점의 위치를 추적하는데 많은 계산량을 필요로 하므로 실시간으로 소음제어를 하는데는 부적격하다. 따라서 본 논문에서는 실시간으로 소음제어를 위해서 극점의 위치를 추적하지 않고 안정하게 할 수 있는 간단한 방법을 제안한다[3].

일반적으로 적응신호처리 시스템에서 필터계수가 완전히 수렴하기 전에 큰 오차가 발생한다. 이 경우 수렴계수의 크기에 따라서 극점이 크게 변동한다. 따라서 소음제어 초기에 극점이 z평면의 단위 원 밖으로 빠져 나가서 발산하는 경우가 많으므로 초기에 필터계수의 분모항의 업데이트 식에서 극점의 위치를 단위 원쪽으로 조금 옮겨 주는 전처리 과정을 거침으로써 좀 더 안정된 IIR LMS를 적용할 수 있다. 이를 위해 IIR 적응필터의 전달함수중 분모 즉  $1-B(z)$ 대신에 다음식을 대입한다.

$$F(z) = 1 + kb_1(n)z^{-1} + k^2b_2(n)z^{-2} + \dots + k^M b_M(n)z^{-M} \quad (16)$$

$$, 0 \leq k \leq 1$$

IIR LMS의 분모항  $1-B(z)$ 의 근을  $z_1$ 이라 한다면

$$1 - B(z_1) = 1 + b_1(n)z_1^{-1} + \dots + b_M(n)z_1^{-M} = 0 \quad (17)$$

을 만족시키는 F(z)의 근은  $kz_1$ 이 된다. 즉,

$$F(kz_1) = 1 + kb_1(n)(kz_1)^{-1} + k^2b_2(n)(kz_1)^{-2} + \dots + k^M b_M(n)(kz_1)^{-M} = 0 \quad (18)$$

이 된다. 따라서  $1-B(z)$ 을 전처리 함으로써 극점을 k 배 만큼 원점 방향으로 조정이 가능하다. 능동 소음 제어 시에는 초기에 오차가 커서 극점이 크게 변동될 때에는 k를 0에 가까운 값으로 정해 원점으로 당겨주며, 정상상태 시에는 k를 1로 하여 원래의 극점값을 주어야 한다. 즉,

$$k(n+1) = \lambda k(n) + (1-\lambda), \quad k(0) = 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (19)$$

따라서, k값을 위와같이 가변 시켜 가면서 IIR 필터의 분모항  $1-B(z)$ 의 업데이트식을 전처리 함으로써 안정된 소음제어가 가능하다.

### 3 컴퓨터 시뮬레이션

제안된 안정된 적응 IIR 필터 알고리즘의 유용성을 입증하기 위하여 그림 1과 같은 적응 신호처리 시스템에 적용하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

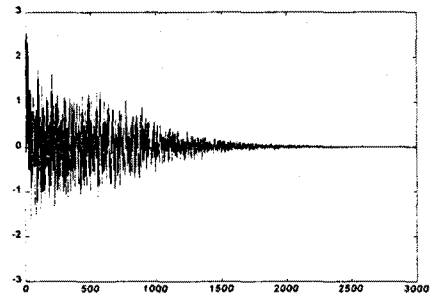


그림 2 Recursive LMS(  $\mu_b=0.03$  인 경우의 오차)

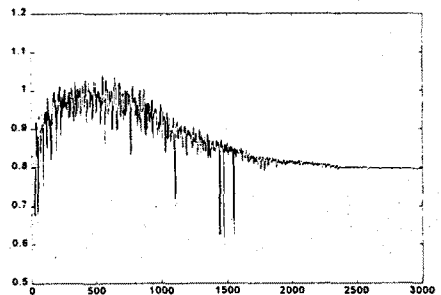


그림 3 Recursive LMS

(  $\mu_b=0.03$  인 경우의 극점 절대값의 최대치)

그림 1에서 A(z)와 B(z)를 오차신호 e(n)을 최소

화하는 방향으로 update하여 적응필터  $W(z)$ 이  $P(z)$ 에 가까워지게 한다. 적응 모델  $P(z)$ 는 다음 식과 같이 두었으며 이것은 eigen value spread가 140이 넘는 ill-conditioned 경우이다.

$$P(z) = \frac{15 - 10z^{-1} + 2.5z^{-2}}{1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-4}} \quad (23)$$

IIR 필터 모델은  $A(z)$ 의 차수를 2차,  $B(z)$ 의 차수를 4차로 하였다.

제한된 안정화된 적응 필터 알고리즘의 안정성을 확인하기 위하여 백색잡음을 기준입력으로 주고 일반적인 recursive LMS 알고리즘과 비교하였다.

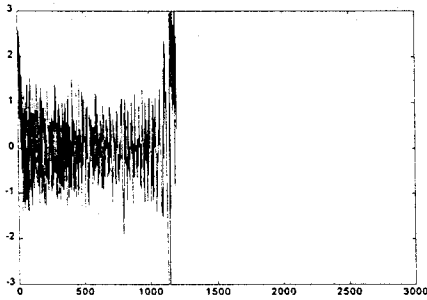


그림 4 Recursive LMS ( $\mu_b=0.04$  인 경우의 오차)

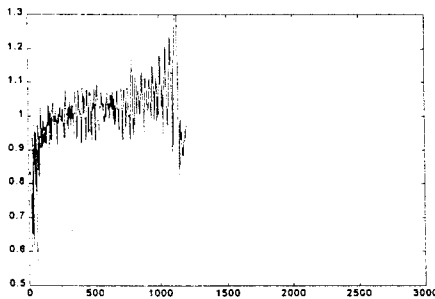


그림 5. Recursive LMS  
( $\mu_b=0.04$  인 경우의 극점 절대값의 최대치)

먼저 이번 실험에 사용한 각 파라미터의 값으로는  $\mu_a=0.01$ ,  $\gamma=0.5$ 로 하였고  $\mu_b$ 의 값을 점차 증가시켜 0.03 과 0.04일 때 두 알고리즘을 비교하였다.

기존의 recursive LMS 알고리즘은 그림 2에서 보듯이  $\mu_b$ 가 0.03일 때는 잘 수렴하는 것을 알 수 있으며 이 때, 적응 필터 극점의 절대치의 최대값을 조사해보면 그림 3에서 보듯이 과도 상태에서 잠시 1을 넘어서서 불안정한 경향을 보이거나 곧 1 이하로 줄어들어 안정을 회복하는 것을 알 수 있다. 그러나  $\mu_b$ 를 0.04로 두면 그림 5에서 보듯이 필터 극점의 절대값이 1을 넘어서 불안정하게 되어 그림 4에서 보듯이 발산함을 알 수 있다.

그러나 제안된 알고리즘은  $\mu_b$ 를 0.4로 하여도 그림 7에서 보듯이 필터 극점의 절대값의 최대치가 1을 넘지 않아 안정하며 그림 6에서 보듯이 잘 수렴함을 알 수 있으며 그림 2의 결과보다 더 나은 특성을 보여주고 있다.

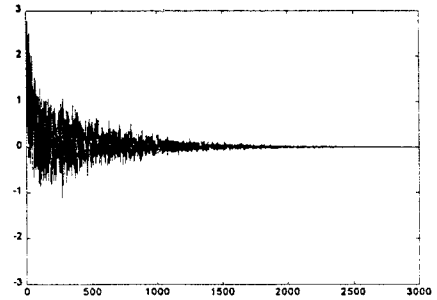


그림 6. 제안된 알고리즘 ( $\mu_b=0.04$ 인 경우의 오차)

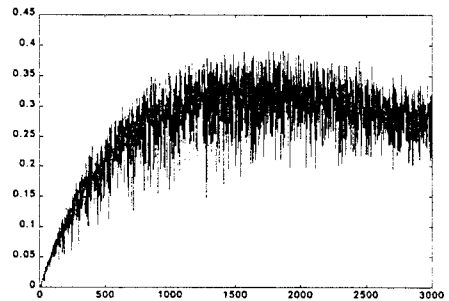


그림 7. 제안된 알고리즘  
( $\mu_b=0.04$  인 경우의 극점 절대값의 최대치)

#### 4. 결 론

본 논문에서는 기존의 recursive LMS 알고리즘의 안정도를 개선한 새로운 적응 IIR 필터 알고리즘을 제안하였다.

제안된 IIR LMS 알고리즘은 필터의 파라미터가 완전히 수렴하기 전에는 필터의 극점을  $z$ 평면의 단위 원 안쪽으로 끌어 당겨서 안정도를 개선하고 수렴한 후에는 다시 원래의 자리로 돌려 놓음으로서 필터의 성능에는 영향을 미치지 않게 하였다.

제안된 알고리즘이 기존의 recursive LMS 알고리즘 보다 안정한 성능을 보이는 것을 시뮬레이션을 통해 확인 할 수 있었다.

#### [참 고 문 헌]

- [1] Widrow B. and Stearns S. D., "Adaptive Signal Processing," Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985.
- [2] P.L Feintuch, "An adaptive recursive LMS filter," Proc.IEEE, vol.64, no.11, pp.1622-1624, 1976.
- [3] B.Friedlander, "A modified prefilter for some recursive parameter estimation algorithms," IEEE Transactions on automatic control, vol.AC-27, no.1, 1982.
- [4] T.Brennan, "Bounding adaptive filter poles using Kharitonov's theorem," Proc. 22nd Asilomar conf. Signals, Systems, Computers, Pacific Grove, California, pp.658-662.