

출력관측 오차의 필터링을 이용한 비선형 계통의 강인한 신경망 관측기 설계

박장현, 윤필상, 박귀태
고려대학교 전기·전자·전파공학부 자동제어연구소

Robust Adaptive Neural-Net Observer for Nonlinear Systems Using Filtering of Output Estimation Error

Jang-Hyun Park, Pil-Sang Yoon, Gwi-Tae Park
School of Electrical Engineering, Korea Univ.

Abstract - This paper describes the design of a robust adaptive neural-net(NN) observer for uncertain nonlinear dynamical system. The Lyapunov synthesis approach is used to guarantee a uniform ultimate boundedness property of the state estimation error, as well as of all other signals in the closed-loop system. Especially, for reducing the dynamic order of the observer, we propose a new method in which no strictly positive real(SPR) condition is needed with on-line estimation of weights of the NNs. No *a priori* knowledge of an upper bounds on the uncertain terms is required. The theoretical results are illustrated through a simulation example.

1. 서 론

적응 관측기는 시스템의 미지의 파라미터와 상태변수를 동시에 추정하여야 하며, 이는 매우 어려운 문제로 알려져 있다. 본 논문은 Linearly Parameterized Neural Network(LPNN)[1,2]을 이용하여 단일입력 단일출력 비선형 계통에 대한 관측기를 설계하는 새로운 방법을 제시한다.

LPNN은 임의의 연속함수를 원하는 정확도로 근사화할 수 있는 범용 근사화기(universal approximator) 성질이 증명된 바 있으며, 이 사실을 이용하여 제어 대상 계통의 미지의 비선형 항을 근사화 한다. 그리고 이 근사항을 이용하여 관측기를 설계하며, 신경망의 가중치 갱신법칙은 관측기의 리아프노브 안정도가 보장되도록 설계한다. 기존의 연구결과들[3,4]와 달리 본 논문에서 제시하는 출력 관측 오차를 필터링하는 방법을 사용하면 리아프노브 안정도 증명시 Strictly Positive Real(SPR) 조건이 필요치 않게 된다. 따라서 기존의 결과들에서 사용된 범용 함수 근사기(신경망, 적응퍼지 시스템등)의 기저함수벡터(basis function vector)의 필터링이 필요치 않으며 이는 관측기의 동차수를 현저히 감소시킨다는 장점을 제공한다. 또한 [5]에서와 같이 계통의 미지의 비선형 함수가 측정가능한 출력만의 함수로 나타나는 계통으로 변환가능하다는 가정도 필요치 않다. 본 논문에서 $|y|$ 은 y 가 스칼라이면 절대값을, y 가 벡터이면 2-노름(norm)을 의미한다. 시간의 함수인 벡터 $x(t)$ 의 노름은 다음을 사용한다.

$$\|x\|_{2\infty} = \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} x(\tau)^T x(\tau) d\tau \right)^{1/2}$$

그리고 행렬 A 의 최대(최소) 고유치는 $\lambda_{\max}(A)$ ($\lambda_{\min}(A)$)로 표기한다.

2. 신경망 모델

본 논문에서는 다음과 같은 신경망 모델을 사용한다.

$$\hat{h}(x, W_h) = W_h^T \phi(x) \tag{1}$$

여기서 $x \in R^n$ 은 신경망의 입력, $W_h \in R^L$ 는 가중치를 나타내며 $\phi(\cdot): R^n \rightarrow R^L$ 은 활성화함수로서 근사화 영역내에서의 기저함수벡터를 나타낸다. (1)과 같이 표현되는 LPNN은 범용 함수 근사기라는 사실은 입증된바 있으며 이를 정리하면 다음과 같다.

정리 1. 임의의 연속 함수 $h(x)$ 는 $x \in \Omega_x \subset R^n$ 에 대해서 다음과 같이 재기술된다.

$$\begin{aligned} h(x) &= W_h^T \phi(x) + \varepsilon_h(x) \\ &= \hat{h}(x, W_h^*) + \varepsilon_h(x) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $\varepsilon_h(x)$ 는 근사화 오차로서 모든 $x \in \Omega_x \subset R^n$ 에 대해서 $|\varepsilon_h(x)| < \varepsilon_h^*$ 를 만족하며 임의로 작은 양의 상수 ε_h^* 에 대해서 (2)와 같이 기술될 수 있는 최적의 가중치 W_h^* 와 활성화 함수벡터 $\phi(\cdot)$ 가 존재한다.

3. 강인한 적응 신경망 관측기 설계

3.1 신경망 관측기 설계

본 논문은 다음과 같은 단일입력 단일출력 비선형 계통을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(n)} &= f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u + d \\ y &= x \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 f 와 g 는 미지의 연속함수이고, $u \in R(|u| < \bar{u})$, $y \in R$ 는 각각 계통의 입력과 출력을 나타내며 d 는 $|d| \leq \bar{d}$ 를 만족하는 외란이다. 그리고 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$ 는 계통의 상태변수 벡터이고 이 중 x 만이 측정가능하다고 가정한다. (3)을 재기술하면 다음과 같다

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b[f(x) + g(x)u + d] \\ y &= c^T x \end{aligned} \tag{4}$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이다. (4)에 대한 관측기를 다음과 같이 설계한다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + b[\hat{f}(\hat{x}) + \hat{g}(\hat{x})u - v] + K(y - c^T \hat{x}) \\ \hat{y} &= c^T \hat{x} \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 \hat{x} 는 상태변수의 추정치를 나타내고 $K = [k_1 \dots k_n]^T$ 는 $A - Kc^T$ 가 안정하도록 정해지는 관측기 이득 벡터를 나타낸다. 함수 \hat{f} , \hat{g} 는 각각 (1)과 같이 표현되는 f 와 g 의 근사함수이다. 그리고 v 는 강인항으로서 외란과 근사화오차를 보상해주는 항으로서 뒤

에서 정의된다. $\hat{x} = x - \hat{x}$, $\hat{y} = y - \hat{y}$ 로 정의하면 (4)와 (5)로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\dot{\hat{x}} = A_0 \hat{x} + b [f(x) - \hat{f}(\hat{x}) + (g(x) - \hat{g}(\hat{x}))u + v + d] - c^T \hat{x} \quad (6)$$

여기서 $A_0 = A - Kc^T$ 이다. 오차 동특성식 (6)은 다음과 같이 재기술될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_0 \hat{x} + b [W_f^T \phi - W_f^T \hat{\phi} + (W_g^T \phi - W_g^T \hat{\phi}) \\ &\quad + \varepsilon_f + \varepsilon_g u + v + d] \\ &= A_0 \hat{x} + b [-W_f^T \hat{\phi} - W_g^T \hat{\phi} u + v + w_0] \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 ϕ 와 $\hat{\phi}$ 는 각각 $\phi(x)$ 와 $\phi(\hat{x})$ 를 줄인 표기이고 $\varepsilon_f = f - W_f^T \phi$, $\varepsilon_g = g - W_g^T \phi$ 로서 근사화 오차를 나타내고, $\bar{W}_f = W_f - W_f^*$, $\bar{W}_g = W_g - W_g^*$ 이며

$$w_0 = W_f^T (\hat{\phi} - \phi) + W_g^T (\hat{\phi} - \phi)u + \varepsilon_f + \varepsilon_g u + v + d \quad (8)$$

이다. w_0 는 상태변수 관측오차와 근사화오차 그리고 외란에 의해서 발생하는 항들을 표기한다.

FACT 1. w_0 는 유계이다. 즉 어떤 양의 상수 \bar{w}_0 에 대해서 다음이 성립한다.

$$|w_0| \leq \bar{w}_0 \quad (9)$$

(9)는 활성화 함수의 정의와 정리 1 그리고 입력과 외란 d 는 유계라는 사실에서 쉽게 증명될 수 있다.

3.2 출력 관측 오차의 필터링

[3,4]에서는 관측 오차 동특성식이 SPR조건을 만족하도록 하기 위해서 추가적인 필터를 설계하고 이 과정에서 활성화함수 벡터 ϕ 를 필터링하여 안정도 증명을 하고 있다. 일반적으로 활성화 함수 벡터는 차원이 크며 이를 필터링하는 과정에서 관측기의 동차수는 필터의 차수와 비례하여 커지게 된다. 본 논문에서는 이를 회피하기 위해 출력관측 오차를 필터링한 후 이를 이용하여 신경망 가중치 갱신법칙을 유도하고 안정도를 증명한다. 다음과 같은 필터 $L(s)$ 를 고려하자.

$$L(s) = \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^{-1} \quad (10)$$

여기서 $\lambda > 0$ 는 설계상수이다. 필터링된 관측오차의 동특성식은 다음과 같다

$$\dot{\hat{x}}_0 = A_0 \hat{x}_0 + b [-W_f^T \hat{\phi} - W_g^T \hat{\phi} u + v + w_m] \quad (11)$$

여기서

$$w_m = W_f^T \hat{\phi} + W_g^T \hat{\phi} u - v - L(s) [W_f^T \hat{\phi} + W_g^T \hat{\phi} u - v] + w_0 \quad (12)$$

이고 w_m 는 w_0 의 필터링된 신호를 의미한다. (11)의 우변이 미지의 파라미터를 포함하므로 \hat{x}_0 를 발생시키는 데 (11)을 사용할 수 없으며, \hat{x}_0 를 \hat{y} 를 필터링해서 얻을 수 있음을 유의하자. (11)은 안정도 해석에만 사용되는 식이다.

가정 1. w_m 은 유계이다. 즉 어떤 양의 상수 ψ^* 에 대해서 다음이 성립한다.

$$|w_m| \leq \psi^* \quad (13)$$

정리 2. 관측기 (5)에 대해서 강인함 v 를 다음과 같이 결정한다.

$$v(t) = -\psi \tanh \left(\frac{\hat{y}(t)}{\varepsilon} \right) \quad (14)$$

여기서 ψ 는 ψ^* 의 추정치이다. 그리고 신경망의 가중치

갱신법칙을 다음과 같이 결정하고

$$\begin{aligned} \dot{W}_f^* &= \gamma_f \left(\hat{y} \hat{b} \phi - \sigma W_f \right) \\ \dot{W}_g^* &= \gamma_g \left(\hat{y} \hat{b} \phi u - \sigma W_g \right) \end{aligned} \quad (15)$$

ϕ 의 갱신법칙을 다음과 같이 결정하면

$$\dot{\phi} = \gamma_\phi \left(\hat{y} \hat{b} \tanh \left(\frac{\hat{y} \hat{b}}{\varepsilon} \right) - \sigma \psi \right) \quad (16)$$

여기서 γ_f , γ_g , $\gamma_\phi > 0$ 은 학습률로서 설계상수이다. 강인함 (14)와 갱신법칙 (15)-(16)을 사용하면 $|\hat{x}|$, $|\bar{W}_f|$, $|\bar{W}_g|$, $|\hat{\phi}|$ 는 uniformly ultimately bounded(UUB)이다.

증명: 다음과 같은 리아프노브 함수를 고려하자.

$$V = \frac{1}{2} \hat{y}^T \hat{y} + \frac{1}{2\gamma_f} W_f^T W_f + \frac{1}{2\gamma_g} W_g^T W_g + \frac{1}{2\gamma_\phi} \psi^2 \quad (17)$$

(11)을 이용하여 (17)의 시간 도함수를 구하면 다음과 같다

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \hat{y}^T A_0 \hat{y} + \hat{y}^T b (-W_f^T \hat{\phi} - W_g^T \hat{\phi} u + v + w_m) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_f} W_f^T \dot{W}_f + \frac{1}{\gamma_g} W_g^T \dot{W}_g + \frac{1}{\gamma_\phi} \dot{\psi} \end{aligned} \quad (18)$$

(15),(16)을 위식에 대입하고 다음의 부등식을 이용하면

$$\begin{aligned} \hat{y}^T A_0 \hat{y} &\leq -|\hat{y}|^2, \lambda \in [-\lambda_{\max}(A_0)] \\ 0 &\leq |\eta| - \eta \tanh \left(\frac{\eta}{\varepsilon} \right) \leq \kappa \varepsilon, \kappa = 0.2785 \end{aligned}$$

다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -|\hat{y}|^2 - \sigma W_f^T W_f - \sigma W_g^T W_g + \hat{y}^T b v + |\hat{y} \hat{b}| \psi^* + \frac{1}{\gamma_\phi} \dot{\psi} \\ &= -|\hat{y}|^2 - \sigma W_f^T W_f - \sigma W_g^T W_g \\ &\quad + \hat{y}^T b \tanh \left(\frac{\hat{y} \hat{b}}{\varepsilon} \right) \psi^* + |\hat{y} \hat{b}| \psi^* - \hat{y}^T b \tanh \left(\frac{\hat{y} \hat{b}}{\varepsilon} \right) \psi + \frac{1}{\gamma_\phi} \dot{\psi} \\ &\leq -|\hat{y}|^2 - \sigma W_f^T W_f - \sigma W_g^T W_g - \sigma \psi + \kappa \varepsilon \psi^* \end{aligned} \quad (19)$$

다음의 부등식을 이용하면

$$\begin{aligned} W_i^T W_i &\geq -\frac{1}{2} |W_i|^2 + \frac{1}{2} |W_i^*|^2, i = f, g \\ \dot{\psi} &\geq -\frac{1}{2} \psi^2 + \frac{1}{2} \psi^{*2} \end{aligned} \quad (20)$$

최종적으로 리아프노브 함수의 시간도함수에 대한 다음 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -|\hat{y}|^2 - \frac{\sigma}{2} |\theta_f|^2 - \frac{\sigma}{2} |\theta_g|^2 - \frac{\sigma}{2} |\theta_\psi|^2 \\ &\quad + \frac{\sigma}{2} |\theta_f^*|^2 - \frac{\sigma}{2} |\theta_g^*|^2 - \frac{\sigma}{2} |\theta_\psi^*|^2 + \kappa \varepsilon \psi^* \end{aligned} \quad (21)$$

따라서 다음과 같은 집합 $\Omega_{\lambda/c}$ 에 대해서

$$\Omega_{\lambda/c} = \left\{ V(t); V(t) \leq \frac{\lambda}{c} \right\} \quad (22)$$

$$c = \max \left\{ \frac{2I}{\lambda_{\max}(P)}, \gamma_f \sigma, \gamma_g \sigma, \gamma_\phi \sigma \right\}$$

$$\lambda = \frac{\sigma}{2} |\theta_f^*|^2 + \frac{\sigma}{2} |\theta_g^*|^2 + \frac{\sigma}{2} |\theta_\psi^*|^2 + \kappa \varepsilon \psi^* \quad (23)$$

$|\hat{x}|$, $|\bar{W}_f|$, $|\bar{W}_g|$, $|\hat{\phi}|$ 가 UUB임을 알 수 있다. $|\hat{x}|$ 의 유계임을 보이기 위해서 (7)식으로부터 다음과 같은 \hat{x} 의 해를 고려한다.

$$\dot{x}_1 = e^{-\alpha t} \dot{x}_1(0) + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \mathbf{b} \left[-\mathbb{W}_1^T \hat{\phi} - \mathbb{W}_2^T \hat{\phi} u + v + w_m \right] d\tau \quad (24)$$

어떤 양의 상수 m, α 에 대해서 부등식 $|e^{-\alpha(t-\tau)}| \leq m e^{-\alpha(t-\tau)}$ 가 성립함을 이용하면 (24)로부터 다음을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} |\dot{x}_1| &\leq m |\dot{x}_1(0)| e^{-\alpha t} + m \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left[|\mathbb{W}_1^T \hat{\phi}| + |\mathbb{W}_2^T \hat{\phi}| |u| + |v| + |w_m| \right] d\tau \\ &\leq m_0 + \frac{m}{\sqrt{\alpha}} \left(m_1 |\mathbb{W}_1|_{2\alpha} + m_2 |\mathbb{W}_2|_{2\alpha} + |\psi|_{2\alpha} + \bar{w}_m \right) \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 m_0 는 초기조건으로 야기되며 지수적으로 감소하는 항이고 m_1, m_2 는 양의 상수이다. 앞에서 $|\mathbb{W}_1|_{2\alpha}, |\mathbb{W}_2|_{2\alpha}, |\psi|_{2\alpha}$ 는 유계임을 보였으므로 (25)로부터 $|\dot{x}_1|$ 도 유계임을 알 수 있다. ■

4. 모의실험

제시한 관측기의 성능을 보기 위해서 다음과 같은 역진자계통에 대해서 관측기를 설계한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - m x_2^2 \cos(x_1) \sin(x_1)}{m_c + m} + \frac{\cos(x_1)}{l \left(\frac{4 - m \cos^2(x_1)}{3 m_c + m} \right)} u \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 $x_1 = \theta$ 는 진자의 각도, x_2 는 진자의 각속도, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 는 중력가속도, m_c 는 수레의 질량, m 은 막대의 질량, l 은 막대의 길이의 절반, u 는 제어입력을 나타낸다. 모의실험 파라미터는 $m_c = 1 \text{ kg}, m = 0.1 \text{ kg}$ and $l = 0.5 \text{ m}$ 로 설정한다. 관측기의 파라미터는 다음과 같고

$$\begin{aligned} \gamma_f = 1000, \gamma_g = 10, \gamma_v = 1 \\ \sigma = 0.01, \varepsilon = 0.005 \end{aligned}$$

제어입력은 $u = 0.05 \sin(t)$ 로 인가하며 출력 관측 오차의 필터링을 위한 필터는 $L(s) = 100/(s+100)$ 으로 선정했다. 계통의 미지의 비선형항들을 근사화하기 위해서 본 논문에서는 Radial Basis Function Networks(RBFNs)[2]를 사용한다. RBFN의 활성화 함수 벡터 ϕ 는 다음과 같고

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{\|x - c_i\|}{2\sigma_i^2}\right), i = 1, L, 25 \quad (27)$$

(29)의 파라미터는 다음과 같이 선정한다.

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\frac{\pi}{12}}, c_i = \{(x_1, x_2) | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}, i = 1, \dots, 25 \\ S_j &= \{-0.2\pi, -0.1\pi, 0, 0.1\pi, 0.2\pi\}, j = 1, 2 \end{aligned}$$

그리고 신경망 가중치의 초기값은

$$\begin{aligned} \{W_i\}_{i=0} &= 0, i = 1, \dots, 25 \\ \{W_{\varepsilon}\}_{i=1} &= 1, i = 1, \dots, 25 \end{aligned}$$

으로 선정한다. 모의실험 결과가 그림 1에 도시되어 있다. 그림 1에서 확인할 수 있듯이 제시한 관측기는 시스템의 상태변수를 잘 추정함을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문은 Linearly Parameterized Neural Network(LPNN)을 이용하여 단일입력 단일출력 비선형 계통에 대한 관측기를 설계하는 새로운 방법을 제시한다. LPNN의 범용근사화 성질을 이용하여 제어 대상 계통의 미지의 비선형 항을 근사화 하고 이 근사항을 이용하여 관측기를 설계하며, 신경망의 가중치 갱신법칙은 관측기의 리아프노프 안정도가 보장되도록 설계한다. 기

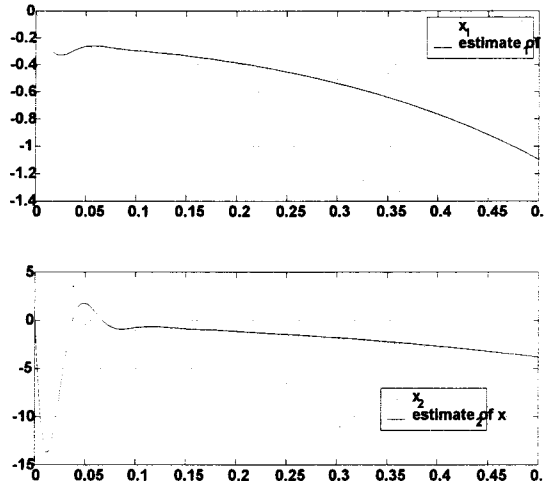


그림 1. (a) x_1 와 \hat{x}_1 의 궤적 (b) x_2 와 \hat{x}_2 의 궤적
Fig. 1. Trajectories of (a) x_1 and \hat{x}_1 (b) x_2 and \hat{x}_2

존의 연구결과들과 달리 본 논문에서 제시하는 출력 관측 오차를 필터링하는 방법을 사용하면 리아프노프 안정도 증명시 Strictly Positive Real (SPR) 조건이 필요치 않게 된다. 따라서 범용 함수 근사기(신경망, 적응퍼지시스템등)의 기저함수벡터(basis function vector)의 필터링이 필요치 않으며 이는 관측기의 동차수를 현저히 감소시킨다는 장점이 있다.

(참 고 문 헌)

- [1] M. M. Polycarpou, P. A. Ioannou, "Identification and Control of Nonlinear Systems Using Neural Network Models: Design and Stability Analysis," *Technical Report of Dept. Elect. Eng. Syst., Univ. Southern Calif, Los Angeles*, no. 91-09-01, 1991.
- [2] J. Park, I. Sandberg, "Universal approximation using radial basis function networks," *Neural Computation*, vol. 3, pp. 246-257, 1991.
- [3] Y.-H. Kim, F. L. Lewis, and C. T. Abdalla, "A dynamic recurrent neural-network-based adaptive observer for a class of nonlinear systems," *Automatica*, vol. 33, no. 8, pp. 1539-2543, 1997.
- [4] Y.-G. Leu, T.-T. Lee, and E.-Y. Wang, "Observer-based adaptive fuzzy-neural control for nonlinear dynamical systems," *IEEE trans. Syst. Man Cybern.-Part B: Cybern.*, vol. 29, no. 5, pp. 583-593, 1999.
- [5] J. Y. Choi, J. Farrell, "Observer-based Backstepping Control Using On-line Approximation," *Proc. of the American Control Conference*, pp. 3646-3650, 2000.