

블럭펄스함수를 이용한 MRAC설계

*김진태, *김태훈, **안비오, ***이명규, ****심재선, †안두수
 †성균관대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부, ** (주)마이다스코리아,
 경성대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부, *삼척대학교 전기공학과

The Design of MRAC using Block Pulse Functions

†Jin-Tae Kim, †Tai-Hoon Kim, **Pius Ahn, ***Myung-Kyu Lee, ****Jae-Sun Shim, †Doo-Soo Ahn

†School of Electrical and Computer Eng., Sung Kyun Kwan Univ., **MIDAS KOREA Co. Ltd.,

Dept. of Electrical and Computer Eng., Kyung Sung Univ., *Dept. of Electrical Eng., Samchok National Univ.

Abstract - This paper proposes a algebraic parameter determination of MRAC(Model Reference Adaptive Control) controller using block Pulse functions and block Pulse function's differential operation. Generally, adaption is performed by solving differential equations which describe adaptive low for updating controller parameter. The proposes algorithm transforms differential equations into algebraic equation, which can be solved much more easily in a recursive manner. We believe that proposes methods are very attractive and proper for parameter estimation of MRAC controller on account of its simplicity and computational convergence.

1. 서 론

완전 모델 추종 조건(PMFC : Perfect Model Following Condition)에 기초한 기준 모델 적응 제어(MRAC : Model Reference Adaptive Control)는 모델과 실제 플랜트의 입출력신호를 이용한 제어신호를 플랜트에 가하여 기준모델의 출력과 플랜트 출력의 오차를 0이 되게 하는 적응제어 방법으로 일반적으로 적응 규칙에 의하여 수행된다[2,3]. 제어기의 파라미터를 추정하는 적응규칙은 일반적으로 미분방정식으로 표현되며, 이러한 미분방정식의 해를 구함으로써 제어기 파라미터를 조정하게 된다. 본 연구에서는 블럭펄스함수를 이용함으로써 미분방정식을 대수방정식의 형태로 변환하여 간단한 대수적 계산으로 제어기 파라미터를 구하고자 한다. 블럭펄스함수는 원시함수나 하일함수와 같은 직교함수가 가지는 전개항수의 제약을 가지지 않는다는 장점을 가지고 있고, 또한 일반적으로 정의되는 블럭펄스함수의 적분연산행렬을 사용하지 않고 미분연산식을 이용함으로써 일반적인 직교함수나 블럭펄스함수의 적용에서 나타나는 미분방정식의 해를 구하기 위하여 적분방정식으로 변환하는 과정 없이 바로 적응규칙을 구해내는 방법을 제시하였다.

2. 블럭펄스 함수

블럭펄스함수는 샘플링 구간에서만 1의 값을 갖고 나머지 구간에서는 0의 값을 갖는 함수의 집합으로 구성되며, 구간 $t \in [0, t_f]$ 에서 다음과 같이 정의된다[1,5].

$$\phi_i(t) = \begin{cases} 1, & (i-1)\frac{t_f}{m} \leq t < i\frac{t_f}{m} \\ 0, & \text{그외구간} \end{cases} \quad (1)$$

단 $i = 1, 2, 3, \dots, m$

또한 블럭펄스함수는 다음과 같은 기본특성들을 가지

고 있다.

[비결합성(disjointness)]

블럭펄스함수들은 구간 $t \in [0, t_f]$ 에서 서로 비 결합되어 있다.

$$\phi_i(t) \phi_j(t) = \begin{cases} \phi_i(t), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

단, $i, j = 1, 2, 3, \dots, m$

이러한 성질은 블럭펄스함수의 정의로부터 직접 얻어지며 블럭펄스함수의 비결합성 때문에 결합된 항은 곱셈과 나눗셈 또는 다른 연산이 행하여 질 때 보다 간단한 연산을 할 수 있다.

[직교성(orthogonality)]

블럭펄스함수는 구간 $t \in [0, t_f]$ 에서 서로 직교한다.

$$\int_0^{t_f} \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \begin{cases} h, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

단, $i, j = 1, 2, 3, \dots, m-1$

이 성질은 블럭펄스함수의 비결합성으로부터 직접 얻을 수 있으며 블럭펄스함수 계수벡터를 결합하기 위해 이용된다.

적분 가능한 임의의 함수 $x(t)$ 는 구간 $t \in [0, t_f]$ 에서 블럭펄스함수로 다음과 같이 유한 급수전개 할 수 있다.

$$x(t) \cong \sum_{i=1}^m X_i \phi_i(t) \quad (4)$$

i 번째 블럭펄스함수의 계수벡터 X_i 는 평균자승오차를 최소화하는 값으로 식(5)와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{m}{t_f} \int_0^{t_f} x(t) \phi_i(t) dt \\ &= \frac{m}{t_f} \int_{(i-1)\frac{m}{t_f}}^{i\frac{m}{t_f}} x(t) dt \\ &\cong \frac{1}{2} \left[x\left(i\frac{m}{t_f}\right) + x\left((i-1)\frac{m}{t_f}\right) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

단, $i = 1, 2, 3, \dots, m$

실유계 연속함수 $x(t)$ 에 대한 미분 $\dot{x}(t)$ 는 다음과 같은 블럭펄스함수 미분연산식을 이용하여 구할 수 있다.

원함수 $x(t)$ 에 대한 i 번째 세부구간에서의 블럭펄스함수 계수 X_i 와 미분값에 대한 블럭펄스함수 계수값을 \bar{X}_i 라고 할 때 $x(t)$ 에 대한 i 번째 블럭펄스함수 계수값을 다음과 같이 반복적으로 구할 수 있다[4].

$$\bar{X}_1 = \frac{2m}{t_f} (X_1 - x(0)) \quad (6)$$

$$\bar{X}_i = \frac{2m}{t_f} (X_i - X_{i-1}) - \bar{X}_{i-1} \quad (7)$$

단, $i=1, 2, \dots, m$

3. 블럭펄스함수를 이용한 MRAC설계

다음과 같이 왜란이 없는 MRAC 시스템을 고려하자.

$$\frac{dx_m(t)}{dt} = a_m x_m(t) + b_m r(t) \quad (8)$$

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = a_p x_p(t) + b_p r(t) \quad (9)$$

- m : reference model
- p : plant
- $x_m(t)$: output of reference model
- $x_p(t)$: output of plant
- a_m, b_m : model parameter
- a_p, b_p : plant parameter
- $r(t)$: reference model

플랜트 출력 $x_p(t)$ 가 기준모델출력 $x_m(t)$ 을 따라가도록 하기 위한 제어기 입력은 식(10)과 같다.

$$u(t) = \lambda_1(t)r(t) + \lambda_2(t)x_p(t) \quad (10)$$

여기서 $\lambda_1(t)$ 와 $\lambda_2(t)$ 는 가변 게인이득을 말하며 식(11)로 나타나는 기준모델출력과 모델출력의 오차를 0으로 하는 방향으로 조정된다.

$$e(t) = x_p(t) - x_m(t) \quad (11)$$

제어기 파라미터 조정을 위한 적응규칙은 MIT 규칙에 의하여 다음과 같다.

$$\lambda_1(t) = -\text{sgn}(b_p)\gamma e(t)r(t) = \beta e(t)r(t) \quad (12)$$

$$\lambda_2(t) = -\text{sgn}(b_p)\gamma e(t)x_p(t) = \beta e(t)x_p(t) \quad (13)$$

단 $\beta = -\text{sgn}(b_p)\gamma$

여기서 γ 는 적응이득을 말하며 양의 상수값을 갖는다. 다음으로 식(12), 식(13)으로 나타나는 제어기 파라미터의 적응 규칙을 2장에서 소개된 블럭펄스함수를 이용하여 구하여 보자. 식(12), 식(13)의 영변의 벡터들을 블럭펄스함수로 유한급수전개하면 다음과 같다.

$$\lambda_1(t) = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_1(t) \Phi_i(t) \quad (14)$$

$$\lambda_2(t) = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_2(t) \Phi_i(t) \quad (15)$$

$$e(t) = \sum_{i=1}^m E_i \Phi_i(t) \quad (16)$$

$$r(t) = \sum_{i=1}^m R_i \Phi_i(t) \quad (17)$$

$$x_p(t) = \sum_{i=1}^m X_{p_i} \Phi_i(t) \quad (18)$$

식(12)와 식(13)에 식(14~18)의 관계 및 식(6), 식(7)로 나타나는 미분연산의 관계를 도입하여 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\lambda}_{1_i} = \lambda_{1_i}(0) + \frac{t_f}{2m} (\beta E_1 R_1) \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{1_i} &= \lambda_{1_i-1} + \frac{t_f}{2m} (\beta E_i R_i) + \frac{t_f}{2m} (\beta E_{i-1} R_{i-1}) \\ &= \lambda_{1_i-1} + \frac{t_f}{2m} \beta (E_i R_i + E_{i-1} R_{i-1}) \end{aligned} \quad (19b)$$

$$\dot{\lambda}_{2_i} = \lambda_{2_i}(0) + \frac{t_f}{2m} (\beta E_1 X_{p_1}) \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{2_i} &= \lambda_{2_i-1} + \frac{t_f}{2m} (\beta E_i X_{p_i}) + \frac{t_f}{2m} (\beta E_{i-1} X_{p_{i-1}}) \\ &= \lambda_{2_i-1} + \frac{t_f}{2m} \beta (E_i X_{p_i} + E_{i-1} X_{p_{i-1}}) \end{aligned} \quad (20b)$$

단 $i=2, 3, 4, \dots, m$

식(19)와 식(20)을 이용하여 제어기 파라미터를 구할 수 있으며 전체 시스템의 구성도를 그림 1에 나타내었다.

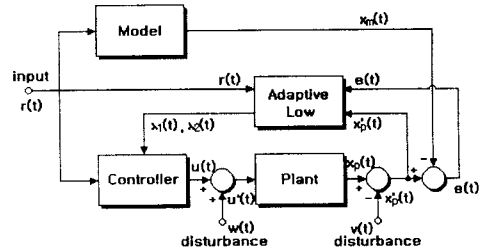


그림 1. MRAC 시스템
Figure 1. MRAC System

4. 적 용 예

다음과 같은 1차 시스템을 고려하자[3].

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + 3u(t) \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

기준모델은 식(22)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= -4x_m(t) + 4r(t) \\ x_m(0) &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

또한 제어기 파라미터 조정법칙은 다음과 같다.

$$\dot{\lambda}_1(t) = -2e(t)r(t) \quad (23a)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -2e(t)x(t) \quad (23b)$$

시구간 $t \in [0, 10]$ 에서 기준입력을 $r(t) = 4\sin(3t)$ 로 하고 제어기파라미터의 초기값을 0으로 하였을 때의 모

델출력과 플랜트의 출력을 그림2에 나타내었고, 그림3에는 제어기의 파라미터를 나타내었다. 또한 샘플링타임을 0.01초로하고 MATLAB V5.3을 이용하여 시뮬레이션하였다.

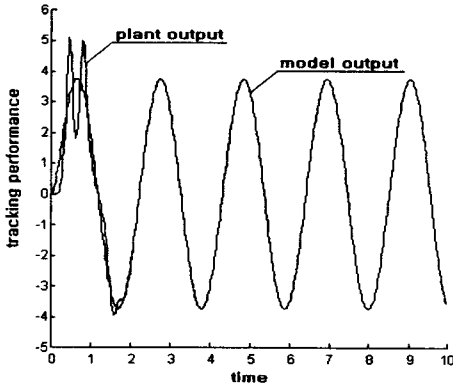


그림 2. 모델출력과 플랜트 출력
Figure 2. Model output & plant output

을 인가하였을 경우의 모델출력과 플랜트출력, 그리고 제어기 파라미터 값을 각각 나타내었다.

$$u'(t) = u(t) + w(t) \quad (24)$$

$$x_p'(t) = x_p(t) - v(t) \quad (25)$$

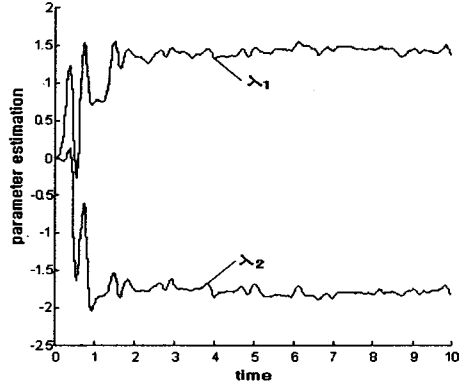


그림 5. 왜란인가시의 계수 추정
Figure 5. Parameter estimation with disturbance

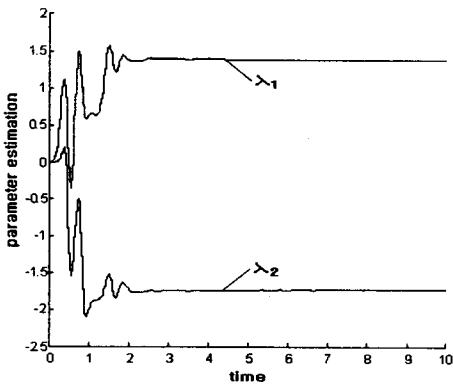


그림 3. 제어기 계수 추정
Figure 3. Parameter estimation

그림 2~5에서 보듯이 제안된 방법에 의한 제어기 파라미터 추정이 잘 이루어지고 있음을 알 수 있고 또한 기준 모델 출력에 대한 플랜트 출력의 추종 역시 잘 이루어짐을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 블럭펄스함수를 이용하여 기준 모델 적응제어에서의 제어기 파라미터를 대수적 방법으로 구하는 방법을 제안하였다. 일반적으로 제어기의 파라미터를 추정하는 적응규칙은 일반적으로 미분방정식으로 표현되며, 이러한 미분방정식의 해를 구함으로써 제어기 파라미터를 조정하게 된다. 본 연구에서는 블럭펄스함수를 이용함으로써 미분방정식을 대수방정식의 형태로 변환하여 간단한 대수적 계산으로 제어기 파라미터를 구하였다. 블럭펄스함수 미분연산식을 이용하여 일반적인 직교함수에서 나타나는 적분방정식으로의 변환 없이 적응규칙을 구해내는 방법을 제시하였다. 또한 제안된 방법을 1차 시스템에 적용하여 그 유용성을 확인하였다. 제안된 방법은 단순한 대수적 계산에 의하여 제어가 수행되므로 기준 모델 적응 제어 시스템의 실시간 구현 시 더욱 빠른 수렴속도가 얻어질 것으로 기대된다.

[참고문헌]

- (1) N. S. Jiang and W. Schaufelberger, *Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems*, Springer-Verlag, 1992
- (2) K. J. Åström and B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Addison Wesley Publisher, 1995
- (3) J. L. Li and A. Watanabe, "Local coefficients of Walsh functions and their applications to model reference adaptive control", Proc. 35th Conference on Decision and Control, 1996
- (4) AHN, P., KIM, M. H., and AHN, D. S., "A novel approach to unknown input observer design via block pulse function's differential operation", Proc. of IFAC World Congress, Beijing, D. 255-260, 1999
- (5) 안두수, *WALSH함수와 시스템 제어*, 복두출판사, 2000

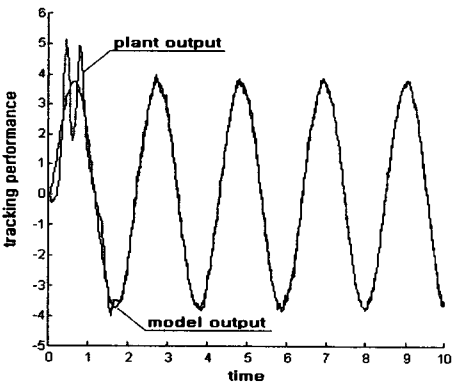


그림 4. 왜란인가시의 출력
Figure 4. Model output & plant output with disturbance

그림4와 그림5에는 식(24), 식(25)와 같이 제어입력과 플랜트 출력에 평균이 0이고 분산이 0.2인 백색잡음