

LQR 제어 알고리즘을 이용한 원운동형 2축 도립 진자의 제어

황언두, 박민호, 이상혁
아주대학교 전자공학부

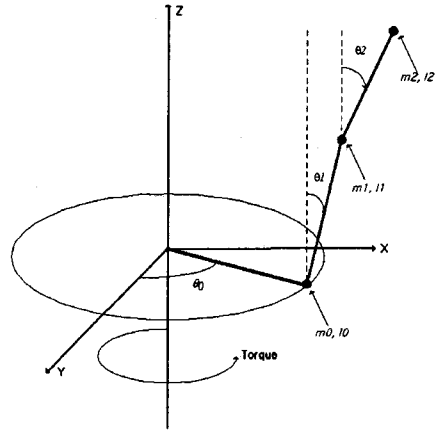
Control of a Rotary Double Inverted Pendulum using LQR Control Algorithm

Eon-Du Hwang, Min-Ho Park, Sang-Hyuk Lee
Dept. of Electronics Eng. Ajou University

Abstract - A rotary double inverted pendulum, the nonlinear system has a regulation problem.

In this paper, we linearize the nonlinear system at the upright equilibrium position. The linearized system can be expressed in state space. To maintain the upright position, we design a feedback controller using LQR(Linear Quadratic Regulator) algorithm. Then we simulate the system with third-order Adams Bashforth Moulton Method. The simulated result shows that the applied algorithm is effective for the regulation problem.

여기서 θ_0 는 Arm의 각도, θ_1 은 하부 진자의 각도, θ_2 는 상부 진자의 각도, 그리고 τ 는 입력 토크이다.



[그림 1.] 원운동형 2축 도립 진자의 좌표도

1. 서 론

도립 진자는 제어기의 성능 시험으로 가장 많이 쓰이는 시스템이며 다른 응용 분야로 로켓의 발사 후 자세 제어나 전차의 이동 중 포신 제어 등 많은 분야에 응용된다. 일반적으로 제어에는 Tracking과 Regulation 문제가 있다. Tracking 문제는 변하는 목표값을 추종하는 것이고, Regulation 문제는 일정한 목표값을 유지하는 것이다. 원운동형 2축 도립 진자는 수직인 평형점을 0°로 보고, 이 각도를 일정하게 유지하는 Regulation 문제이다. 그리고 원운동형 2축 도립 진자는 원운동을 이용하여 진자를 제어하므로 이로 인한 운동으로 높은 각속도가 발생하여 직선 운동형 보다 비선형성이 많은 모델이다. 하지만 직선운동형은 기구적으로 운동 거리의 제한이 있는 반면 원운동형은 거리의 제한이 없다[1].

본 논문에서는 비선형성이 많은 위 시스템의 Regulation 문제를 위해 수직 방향에서 선형화하여 상해 공간에서 표현하고, LQR 알고리즘을 이용하여 원운동형 2축 도립 진자를 제어한다.

2. 본 론

2.1 시스템의 모델링과 상태 공간에서의 표현

원운동형 2축 도립 진자를 [그림 1.]과 같은 좌표계에 표현하고 Euler-Lagrangian 방정식[2]으로 모델링식을 구한다. 그리고 [그림 1.]에서 평형점은 수직 방향인 Z축을 0°로 놓고 θ_i 가 매우 작은 값을 가지면

$\cos \theta_i = 1, \sin \theta_i = \theta_i, \ddot{\theta}_i^2 = 0 (i=0,1,2)$ 가 된다. 위의 조건으로 모델링 식을 선형화하면 아래 식과 같다.

$$(m_0 + m_1 + m_2)l_0^2 \ddot{\theta}_0 + (m_1 + m_2)l_0 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_0 l_2 \ddot{\theta}_2 = \tau_0 \quad (1)$$

$$(m_1 + m_2)l_0 l_1 \ddot{\theta}_0 + (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 = 0 \quad (2)$$

$$m_2 l_0 l_2 \ddot{\theta}_0 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 = 0 \quad (3)$$

명칭	기호	값
Arm의 길이	l_0	0.2350 m
하부 진자의 길이	l_1	0.1630 m
상부 진자의 길이	l_2	0.3660 m
Arm의 질량	m_0	1.4800 kg
하부 진자의 질량	m_1	0.2200 kg
상부 진자의 질량	m_2	0.2800 kg
중력 가속도	g	9.8066 m/s^2

[표 1.] 시스템 파라미터

위의 식 (1), (2), (3)에 [표 1.]의 파라미터를 넣어 상태 방정식으로 표현하면

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4)$$

$$y = Cx \quad (5)$$

이고, 상태 변수 x 는

$$x = [\theta_0 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \dot{\theta}_0 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T \quad (6)$$

이다. 그리고 시스템 행렬, 입력과 출력 행렬은 각각 다

음과 같다.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -14.09 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 164.87 & -76.52 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -60.85 & 60.85 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ 12.23 \ -17.64 \ 0]^T \quad (8)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

여기서 u 는 입력 토크이고 $\dot{\theta}_0$ 은 Arm의 각속도, $\dot{\theta}_1$ 은 하부 진자의 각속도, 그리고 $\dot{\theta}_2$ 는 상부 진자의 각속도이다.

2.2 LQR을 이용한 상태 궤환 제어기 설계

선형 제어의 일종인 LQR은 성능지수(Performance Index)을 최소화시키는 조건을 찾는 것이다. 위의 식 (4)와 (5)같은 선형 시스템이 주어지면 성능지수는 다음과 같이 정의된다.

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (10)$$

여기서 Q 는 양의 반한정 대칭행렬($Q = Q^T \geq 0$)인 상태 가중행렬이고 R 은 양의 한정 대칭행렬($R = R^T > 0$)인 제어가중행렬이다. 상태 궤환 제어의 입력형태는

$$u = -Kx \quad (11)$$

$$K = R^{-1}B^T S \quad (12)$$

으로, 상태 궤환 이득 K 는 식 (10)을 최소화하는 값이다. S 는 시스템 행렬과 같은 차수의 정방행렬로 다음 선형 대수 Riccati 식의 유일한 해이다.

$$0 = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q \quad (13)$$

LQR 설계에서는 가중치 행렬 Q 와 R 값에 따라 폐루프의 극점위치와 고유벡터가 결정되므로 결국 Q 와 R 을 선정하는 문제가 된다. 여기서 행렬 Q 를 선정하면 식 (4)와 (5)에서 시스템의 A 와 C 가 가관측성으므로 Q 를 $C^T C$ 로 놓을 수 있고[3] 행렬 R 값은 임의로 1로 선정하면 선형 궤환 이득을 결정하기 위한 Q 와 R 값은 각각

$$Q = C^T C = \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]) \quad (14)$$

$$R = I \quad (15)$$

이다.

2.3 시뮬레이션

본 논문에서는 상미분방정식의 다중 구간 해를 구하는데 가장 많이 사용되는 수치 해석의 한 방법인 Adams Bashforth Moulton 방법[4]을 이용하여 Matlab 6.0에서 시뮬레이션한다. Adams Bashforth Moulton 방법은 다중 구간 조절이 가능하고, Prediction과 Data의 갱신 그리고, Correction의 반복으로 상미분방정식

의 해를 구한다. 다음은 3차 Adams Bashforth Moulton 방법의 Prediction과 Correction 식을 나타낸 것이다.

Prediction:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23y'_n - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2}) + O(h^4) \quad (16)$$

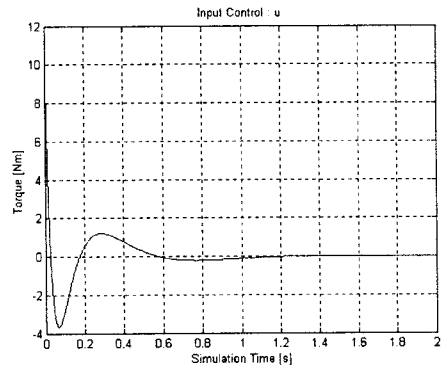
Correction:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (5y'_n - 8y'_{n-1} - y'_{n-2}) + O(h^4) \quad (17)$$

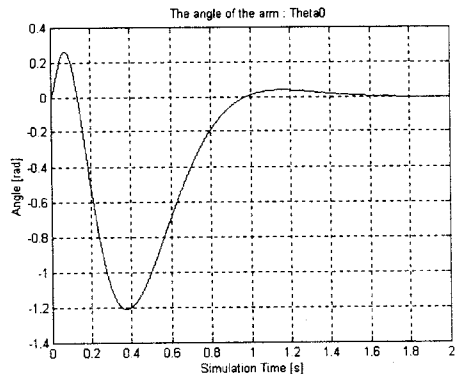
여기서 구간 크기 h 는 0.0005로 하고, 식 (14)와 (15)를 사용하여 시뮬레이션한다.

2.4 시뮬레이션 결과

다음 그림은 2.1에서 지정한 평형점 근처에서 상태의 초기값 $x(0) = [0 \ 0.087 \ -0.087 \ 0 \ 0 \ 0]$ 으로 놓고, 최종 시뮬레이션 시간은 2초로 시뮬레이션 한 결과이다. [그림 2.]는 입력으로 들어가는 토크를 나타낸 것으로 최대 10.70(Nm)에서 최소 -3.65(Nm)이다 [그림 3.]은 Arm의 초기 상태 0(rad)에서 시작하여 처음 양의 방향으로 진행하여 최대 0.26(rad)에서 다시 음의 방향으로 진행하여 결국 1.7초에 정상 상태로 들어간다. [그림 4.]와 [그림 5.]는 각각 하부와 상부 진자의 초기 상태 0.087[rad]과 -0.087[rad]에서 시작하여 1.7초와 1.8초에 정상 상태로 들어간다. 하부 진자의 진행 각도는 최대 0.16[rad] 이고 최소 -0.26[rad]이다. 그리고 상부 진자의 진행 각도는 최대 0.12[rad]이고 최소 -0.14[rad]이다.



[그림 2.] 입력 토크



[그림 3.] Arm의 각도

(부 록)

다음은 위의 시스템의 가제어성과 가관측성 행렬의 rank를 구함으로써 가제어성과 가관측성이 됨을 알 수 있다.

가제어성 행렬:

Ctrb =

0	-12.23	0	248.68	0	41028.71
0	-17.64	0	-2910.24	0	-562397.64
0	0	0	1074.16	0	242631.61
-12.23	0	248.68	0	41028.71	0
-17.64	0	-2910.24	0	-562397.64	0
0	0	1074.16	0	242631.61	0

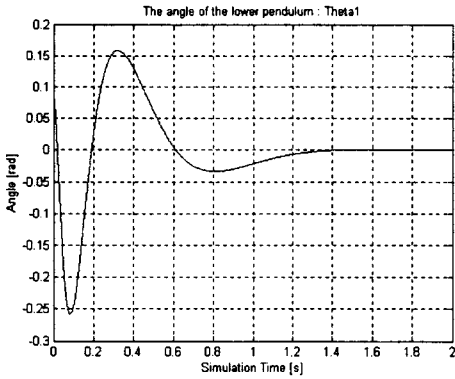
rank(Ctrb) = 6

가관측성 행렬:

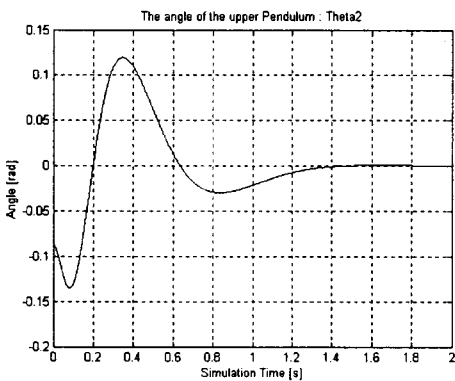
Obsv =

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1
0	-14.10	0	0	0	0
0	164.98	-76.57	0	0	0
0	-60.89	60.89	0	0	0
0	0	0	0	-14.10	0
0	0	0	0	164.98	-76.57
0	0	0	0	-60.89	60.89
0	-2325.97	1079.51	0	0	0
0	31883.11	-17296.01	0	0	0
0	-13755.12	8371.10	0	0	0
0	0	0	0	-2325.97	1079.51
0	0	0	0	31883.11	-17296.01
0	0	0	0	-13755.12	8371.10

rank(Obsv) = 6



(그림 4.) 하부 진자의 각도



(그림 5.) 상부 진자의 각도

3. 결론 및 향후 과제

본 논문에서는 원운동형 2축 도립 진자의 Regulation 문제를 위해 LQR 알고리즘을 적용하였다. 상부와 하부 도립진자의 자세 제어는 2초안에 모두 정상 상태에 들어가 0°를 유지함으로써 만족할 만한 결과를 볼 수 있고, 오버슈트와 언더슈트도 만족할 만한 값이다.

향후에는 위의 시스템을 실제 구성하여 모델링 식에서 제외된 부분과 선형화에서 누락된 부분에 대해 보상을 할 것이다. 그리고 LQR 제어기에서 부가적으로 필요한 관측기에 대한 구성 등을 고려하고 시뮬레이션 상의 입력 토크를 참고로 하여 실험할 것이다.

(참고 문헌)

[1] M. Yamakita, K. Nonaka, and K. Furuta, "Swing Up Control of a Double Pendulum", Proc. of ACC'93, pp.2229~2234, 1993
 [2] K. Ogata, System Dynamics, 2nd Edition, Prentice-Hall, 1978
 [3] 김종식, 선형 제어시스템 공학, 청문각, 1990
 [4] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, Numerical Recipes in C, 2nd Edition, Cambridge, 1992
 [5] K. G. Eltohamy and C. Y. Kuo, " Nonlinear Optimal Control of a Triple Link inverted Pendulum with Single Control Input", INT. J. CONTROL, Vol. 69, No. 2, pp.239~256,1998
 [6] F.L. Lewis, Applied Optimal Control and