

비선형 시스템 제어를 위한 지능형 디지털 PAM 퍼지 제어기

이상준, 차대범, 주영훈, 박진배
군산대학교 전자정보공학부 * 연세대학교 전기전자공학과

Intelligent Digital PAM Fuzzy Controller for Nonlinear Systems

Sang Jun Lee, Dae Bum Cha, Young Hoon Joo, Jin Bae Park
School of Electronic & Information Eng. Kunsan Univ * Dept. of Electrical & Electronic Eng. Yonsei Univ

Abstract-In this paper, we propose the PAM fuzzy controller using intelligent digital redesign method for nonlinear system. We design the continuous-time controller using TSK fuzzy model of nonlinear system, and then design the intelligent digital PAM controller based on continuous-time controller. Finally, the feasibility and stability of the proposed method has been proven through a computer simulation.

1. 서 론

대부분의 실 시스템은 비선형성을 내재하고 있다. 이러한 비선형성을 내재하고 있는 시스템을 제어하기 위해 강인 제어, 슬라이딩 모드 제어, 퍼지 제어 등 많은 제어 기법들이 제안되었다. 그 중에서 퍼지 제어는 제어 대상 시스템이 수학적으로 모델링하기 어렵거나 강한 비선형을 보이는 경우, 또는 외부 환경이 불확실한 경우 등에 대해 강인한 성능을 보여준다. 즉, 내재된 비선형성 때문에 선형 제어기'에 비해 효과적인 제어가 가능하고, 많은 경우 비선형 프로세서의 제어에 효과적으로 대처할 수 있다는 장점이 있다. Cao[8]는 일반적인 퍼지 모델 기반 제어기를 설계하고 해석하기 위해서 현대 제어 이론을 적용했고, Wong[4, 7] 등도 좀 더 체계적인 퍼지 제어기의 설계를 위해 TSK 퍼지 모델에 기반한 제어기의 설계와 안정도 분석을 행하였다. 이러한 퍼지 제어는 많은 프로세서의 개발로 실제 산업 공정에 쓰이는 대부분의 동적 시스템에 대해 제어가 가능하다. 실제 산업 공정에 쓰이는 대부분의 동적 시스템은 연속 시간으로 표현된다. 이러한 모델들에 대해 디지털 제어는 가격 대 성능비, 신뢰성, 적용성, 간결성 등의 장점을 갖게 된다.

실제의 모든 동적 시스템은 연속 시간 모델로써 표현된다. 이러한 아날로그 시스템을 디지털 제어하기 위해 하나의 방법으로 샘플링 주기가 충분히 작다고 가정함으로써 연속 시간 시스템과 이를 제어할 연속 시간 제어기를 각각 이산 시간 시스템과 디지털 제어기의 근사화를 시도하고 있다. 이러한 기법은 대부분의 동적 시스템에 매우 효과적이다. 이와 같이, 아날로그 제어기를 설계한 후 이를 기반으로 디지털 제어기를 설계하는 방법을 디지털 제설계 기법이라 한다.

디지털 제설계 기법은 크게 두 가지로 나눌 수 있는데, 첫째로 PAM(Pulse-Amplitude Modulated) 제어기, 둘째로 PWM(Pulse-Width Modulated) 제어기로 나뉜다. PAM 제어기는 연속 신호에 대한 구간별 상수의 연속으로 진폭의 변화를 갖게 되고, PWM 제어기는 불연속 신호에 대한 제한된 진폭과 신호폭의 변화를 갖게 된다. 이러한 디지털 제설계 기법 중 Joo[1]은 연속 시간 시스템과 이산 시간 시스템의 상태 정합(state matching)을 기반으로 한 지능형 디지털 제설계 기법을 통하여 복소 좌변의 섹터 영역에 극점을 위치시키는 방법을 퍼지 제어기에 응용하였고, Lee[9]는 PAM 디지털 제설계 기법을 통한 최적 극배치를 퍼지 제어기에 응용하였다.

본 논문에서는 비선형 시스템 제어를 위해 지능형 디지털 제설계 기법을 통한 PAM 퍼지 제어기의 새로운 방법을 제안하고자 한다. 디지털 제어는 연속 시간 모델에 대해 이산 시간 상태 공간 모델로 표현을 한다. 또한 연속 시간 모델에 대한 제어 입력의 양과 이산 시간 모델에 대한 제어 입력의 양이 동일하므로 연속 시간 모델과 이산 시간 모델은 동일한 결과를 얻을 수 있다. 연속 시간 모델에 대한 제어기의 궤환 이득을 구하고, 이에 지능형 디지털 제설계 방법을 통한 이산 시간 제어기를 설계하도록 한다. 마지막으로, 본 논문에서 제안한 방법은 도립진자 시스템의 시뮬레이션을 통해 그 우수성을 증명한다.

2. 퍼지 제어 시스템

2.1. TSK 퍼지 모델

비선형 시스템에 대한 퍼지 제어기를 구성하기 위해 먼저 TSK 퍼지 모델로써 시스템을 표현하면 식 (1)과 같이 표현된다. 이 규칙은 시스템에 대해 부분적인 선형 입출력 관계이다.

Plant Rule i :

$$\text{If } x_1(t) \text{ is } M_1^i \text{ and...and } x_n(t) \text{ is } M_n^i \text{ Then } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad (1)$$

이 퍼지 모델의 최종 출력은 다음과 같다.

$$x(t) = \frac{\sum_{i=1}^q \omega_i(t) (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^q \omega_i(t)} \quad (2)$$

$$\omega_i(t) = \prod_{j=1}^n M_j^i(x_j(t))$$

여기서, $M_j^i (j=1, 2, \dots, n)$ 은 i 번째 퍼지 집합, q 는 규칙의 수, $x(t) \in R^n$ 는 상태 변수, $u(t) \in R^m$ 는 제어 입력, $A_i \in R^{n \times n}$ 과 $B_i \in R^{n \times m}$ 은 시스템에 대한 i 번째 지역 모델, $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 은 전체부 변수이다.

2-2. 퍼지 제어기 규칙

Tanaka[10] 등은 앞서 설명한 TS 퍼지 모델 (1)에 대한 퍼지 제어기를 설계하기 위해서 병렬 분산 보상(PDC) 개념을 사용하였다. 이것은 각 제어 규칙이 퍼지 모델의 각 규칙에 대해 설계되는 것이다. 퍼지 제어기는 퍼지 시스템 (1)과 동일한 퍼지 집합을 사용하고 결론부에 선형 상태 궤환 법칙을 갖는다.

병렬 분산 보상기를 사용하여 식 (1)과 동일한 전체부를 갖는 i 번째 퍼지 제어 규칙은 다음 식 (3)과 같다.

Controller Rule i :

$$\text{If } x_1(t) \text{ is } M_1^i \text{ and...and } x_n(t) \text{ is } M_n^i \text{ Then } u(t) = -K_i x(t) \quad (3)$$

여기서, $K_i = [k_{i1}, \dots, k_{in}]$ 는 궤환 이득 벡터이다. 식 (3)의 퍼지 제어기의 최종 출력은 다음과 같다.

$$u(t) = -\frac{\sum_{i=1}^q \omega_i(t) K_i x(t)}{\sum_{i=1}^q \omega_i(t)} \quad (4)$$

식 (4)를 식 (2)에 대입해서 다음과 같은 전체 폐루프 시스템을 얻는다.

$$x(t) = \frac{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n \omega_i(t) \omega_j(t) (A_i - B_i K_j) x(t)}{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n \omega_i(t) \omega_j(t)} \quad (5)$$

2-3. 퍼지 시스템의 안정도

식 (4)에서 설계된 제어기가 i 번째 부분 공간에 대한 시스템이 안정하다 하더라도 전체 폐루프 시스템은 불안정할 수 있다. 따라서, 전체 폐루프 시스템에 대한 안정도를 해석해야 한다. 전체 폐루프 시스템 (5)에 대한 안정도 분석은 정리 1과 같다.

정리 1[2]: 퍼지 제어 시스템(5)은 다음의 두 개의 부등식을 만족하는 공통 양한정 행렬 P 가 존재한다면 넓은 의미에서 점근적으로 안정하다.

$$(A_i - B_i K_i)^T P + P(A_i - B_i K_i) < 0, \quad i=1, \dots, q \quad (6)$$

$$G_{ij}^T P + PG_{ij} < 0, \quad i < j \leq q \quad (7)$$

$$\text{단, } G_{ij} = \frac{(A_i - B_i K_j) + (A_j - B_j K_i)}{2}$$

정리 1은 비선형 시스템에 대한 안정도 분석이 아닌 퍼지 시스템에 대한 안정도 분석이고, 이러한 퍼지 제어기에서 설계 문제는 조건식 (6)과 (7)을 만족하는 궤환 이득 $K_i (i=1, 2, \dots, q)$ 를 구하는 것이다. 만일 양한정(positive definite) 행렬 P 를 구한다면 폐루프 시스템 (5)은 안정하다. 여기서, 공통 양한정 행렬 P 는 선형행렬부등식(LMIs)를 통하여 결정하게 된다.

3. 지능형 디지털 제설계를 이용한 PAM 퍼지제어기 설계

본 장에서는 i 번째 부분 공간에 대한 국부 제어기를 설계하기 위해 지능형 디지털 제설계 기법을 통한 PAM 퍼지 제어기의 설계방법에 대해 논한다.

다음과 같은 i 번째 부분공간의 가제어 연속 시간 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_i x_c(t) + B_i u_c(t) \\ y_c(t) &= C_i x_c(t) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $x_c(t) \in R^{n \times 1}$, $u_c(t) \in R^{m \times 1}$ 은 상태 벡터, 입력 벡터이다.

식 (8)의 시스템이 안정하기 위한 제어 입력 $u_c(t)$ 은 식(9)와 같다.

$$u_c(t) = -K_c^i x_c(t) + E_c^i r_c(t) \quad (9)$$

여기서, $K_c \in R^{m \times n}$, $E_c \in R^{m \times m}$ 은 각각 궤환 이득, 전방향 경로 이득으로써 선형행렬부등식(LMI)을 통하여 구하게 되고, $r(t)$ 는 기준 입력이다.

식 (9)에서 구한 아날로그 제어 규칙을 디지털로 구현하기 위해서 식 (9)을 등가의 디지털 제어 규칙으로 변환하여야 한다. 이를 위해 연속 시간과 이산 시간이 같다고 하면, 즉 구간 상수 신호 $r(t) = r(KT_f)$ ($T_f \leq t \leq KT_f + T_f$)이고, T 를 샘플링 주기라하면 식 (9)의 $t = KT_f$ 의 상태 $x_c(t)$ 와 디지털적으로 제어되는 $t = kT_f$ 의 상태 $x_d(t)$ 를 정합함으로써 디지털 제설계를 수행한다. 구간별 디지털 제어 법칙은 다음과 같다.

$$u_d(t) = -K_d^i x_d(t) + E_d^i r_d(t) \quad (kT_f \leq t \leq KT_f + T_f) \quad (10)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= A_d x_d(t) + B_d u_d(t) \\ y_d(t) &= C_d x_d(t) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, $u_c(t)$ 와 $u_d(t)$ 는 식 (8)에 대해 동일한 폐루프 응답을 갖는다. 식 (11)의 모델에 대해 이산시간 모델로 표현을 하면 식 (12)와 같다.

$$\begin{aligned} x_d(kT+T) &= G_i x_d(kT) + H_i u_d(kT) \\ y_d(kT) &= C_d x_d(kT) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, $G_i = e^{A_d T}$, $H_i = \int_0^{T_f} e^{A_d t} B_d dt = (G_i - I_n) A_i^{-1} B_i$ 이다.

$u_c(t) = u_d(t)$. 즉 연속치 시스템에 대한 제어 입력의 양과 이산치 시스템에 대한 제어 입력의 양이 동일하므로 다음의 식 (13)과 같다.

$$u_c(t) = \sum_{j=1}^N W_{kj} \Phi_{kj} = \sum_{j=1}^N u_d(kT_j) \quad (13)$$

여기서, Φ_{kj} : orthonormal series이다.

식 (13)을 W_{kj} 에 대해서 정리를 하면 다음과 같다.

$$W_{kj} = \frac{1}{T_f} \int_{kT_f}^{(k+1)T_f} u_c(t) dt \quad (14)$$

식 (14)를 간략화하기 위하여 Chebyshev quadrature formula를 적용하면 다음과 같다.

$$W_{kj} = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N x_c(KT_f + i \frac{T_f}{N}) + E_c r(KT_f) \quad (15)$$

여기서, $x_c(KT_f + i \frac{T_f}{N})$ 는 식 (16)과 같다.

$$x_c(KT_f + i \frac{T_f}{N}) = G_c x_c(KT_f) + H_c E_c r(KT_f) \quad (16)$$

여기서, $G_{ir} = e^{A_r T_f}$, $A_{ir} = A_i - B_i K_c^i$.

$$H_{ir} = \int_0^{T_f} e^{A_r t} B_i dt = (G_{ir} - I_n) A_i^{-1} B_i$$

식 (16)을 식 (15)에 대입하면 아래의 식 (17)과 같은 결과를 얻게 된다.

$$W_{kj} = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (G_{cr} x_c(KT_f) + H_{cr} E_c r(KT_f)) + E_c r(KT_f) \quad (17)$$

여기서, W_k 는 새로운 제어 입력으로 아날로그 제어기의 제어 입력 $u_c(t)$ 과 동일한 양이 된다.

이 새로운 제어입력 W_k 는 식 18)의 시스템에 대해 안정하도록 하는 제어 입력으로써 식 (17)이 인가되었을 경우 이에 대한 폐루프 시스템은 식 (19)와 같다.

$$x_d(kT_f + T_f) = G_i x_d(KT_f) + H_i u(KT_f) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x_d(KT_f + T_f) &= \\ G_c x_d(KT_f) + H_c (\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (G_{cr} x_c(KT_f) + H_{cr} E_c r(KT_f))) + E_c r(KT_f) &= \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)의 전체 폐루프 시스템은 다음의 식 20)의 폐루프 시스템과 동일한 결과를 갖는다.

$$x_d(KT_f + T_f) = \hat{G}_{CN} x_d(KT_f) + \hat{H}_{CN} r(KT_f) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_{CN} x_d(KT_f) &= \\ G_i - H_i K_{dr} & , G_i = e^{A_i T_f} \\ \hat{H}_{CN} = H_c E_{dr} & , H_i = (G_i - I_n) A_i^{-1} B_i \end{aligned}$$

식 (19)와 식 (20)이 동일한 결과를 갖게 되므로 다음의 식 (21)을 얻을 수 있다.

$$G_c - H_c K_{dr} = G_c - H_c K_c \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N G_{cr} \quad (21)$$

$$H_c E_{dr} = -H_c (K_c \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N H_{cr} - I_n) E_c$$

식 (21)에 대해서 전방향 경로이득 E_{dr} 과 궤환 이득 K_{dr} 을 정리하면 다음의 식 (22)와 같다.

$$K_{dr} = K_c \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N G_{cr} \quad (22)$$

$$E_{dr} = (I_n - K_c \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N H_{cr} - I_n) E_c$$

식 (22)를 다시 정리하면 식 (23)과 같다.

$$K_{dr} = K_c \frac{1}{N+1} (G_{cr} - I_n)^{-1} (G_{cr} - I_n) + G_{cr}$$

$$E_{dr} = E_c - K_c \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N G_{cr} - K_c A_{cr}^{-1} B_r E_c \quad (23)$$

여기서, $N \rightarrow \infty$ 일 경우

$$\begin{aligned} K_{dr} &= \lim_{N \rightarrow \infty} K_c [(N+1) (G_{cr} - I_n)^{-1} \\ &\quad (G_{cr} - I_n) + \frac{1}{N+1} G_{cr}] \quad (24) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T_f} K_c A_{cr}^{-1} (G_{cr} - I_n)$$

$$E_{dr} = (I_m + K_c A_{cr}^{-1} (B_r - \frac{1}{T_f} H_{cr})) E_c$$

식 (24)에 대해 block pulse function method를 적용하면 다음과 같다.

$$K_{dr}^i = \frac{1}{2} K_c^i (I_n + G_{ir}) \quad (25)$$

$$E_{dr}^i = (I_m + \frac{1}{2} K_c^i H_{ir}) E_c^i$$

식 (25)에 대해 bilinear transform method를 적용하면 다음의 식 (26)과 같은 결과를 얻을 수 있다[3].

$$K_{dr}^i = \frac{1}{2} (I + \frac{1}{2} K_c^i H_r)^{-1} K_c^i (G_r + I) \quad (26)$$

$$E_{dr}^i = (I + \frac{1}{2} K_c^i H_r)^{-1} E_c^i$$

여기서, K_{dr}^i , E_{dr}^i 는 i 번째 부분 시스템에 대한 디지털 궤환 이득과 전방향 경로 이득으로써 제안된 디지털 제어기는 연속 시간 비선형 동적 시스템을 효과적으로 제어할 수 있다.

4. 모의 실험

본 논문에서는 제어기의 안정성 및 효용성을 입증하기 위하여 대표적인 비선형 시스템 중에 하나인 도립 진자 시스템을 통하여 모의 실험을 하였다. 그림 1은 도립진자 시스템의 도해적인 표현이 되고, 이 도립진자 시스템의 동역학식은 다음의 식 (27)와 같다 [4].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin(x_1) - ambx_2^2 \sin(2x_1)/2 - a \cos(x_1)u}{4l/3 - am \cos^2(x_1)} \end{aligned} \quad (27)$$

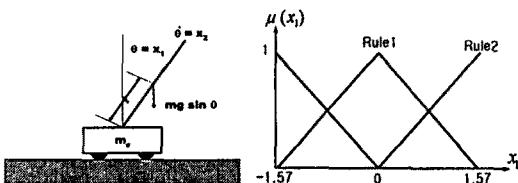


그림 1. 도립 진자 시스템

그림 2. 멤버쉽 함수

여기서, x_1 은 수직축과 펜들럼이 이루는 각(라디안)이고, x_2 는 각속도. $g = 9.8m/s^2$ 는 중력가속도이며, $m = 2.0kg$ 은 펜들럼의 질량. $M = 8.0kg$ 은 수레의 질량이고, $2l = 1.0m$ 은 펜들럼의 길이. 그리고 u 는 수레에 가해지는 힘이다. 또한 $a = 1/(m+M)$ 이다. 이 시스템을 근사화하기 위한 TS퍼지 모델은 다음과 같다 (5).

Rule1: If $x_1(t)$ is about 0

Then $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$

Rule2: If $x_1(t)$ is about $\pm\pi/2$

Then $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$ (28)

여기서,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - am} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - am} \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - am)\beta^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - am\beta^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

이고 $\beta = \cos(88^\circ)$ 이다. Rule 1과 Rule 2에 대한 멤버쉽 함수는 그림 2와 같다. 식 (27)의 동역학 방정식에 대해 시스템을 안정화시키는 공통 양한정 행렬 P 는 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} 13.3204 & 3.9414 \\ 3.9414 & 1.2630 \end{bmatrix}$$

그림 3, 그림 4는 각각 샘플링 주기 $T = 0.1$ (sec)로 하고, Pole의 초기 각도를 45도($0.7854rad$)으로 했을 때 도립진자의 출력응답(x_1)과 출력응답(x_2)을 나타내고, 그림7는 도립진자 시스템에 인가되는 제어 입력을 나타내고 있다. 제어 입력에서 기준 입력은 "0"이다.

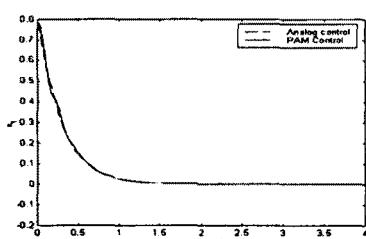


그림3. 제안된 제어기의 출력응답(X1)

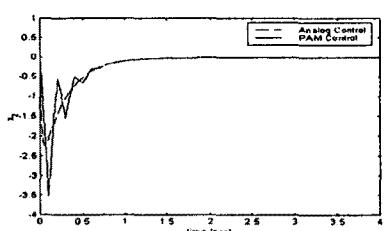


그림4. 제안된 제어기의 출력 응답(X2)

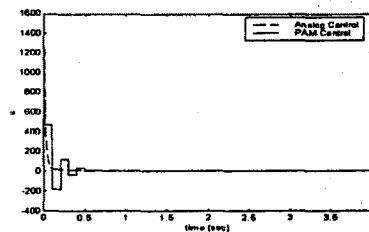


그림 5. 제안된 제어기의 출력 상태(u(t))

VI. 결 론

본 논문에서는 비선형 시스템 제어를 위한 지능형 디지털 제설계 기법을 통한 PAM 퍼지 제어기의 설계방법을 제안하였다. 비선형 시스템은 여러 동작점에서 선형화하여 TS 퍼지 모델로 표현할 수 있고 이 모델을 기반으로 하여 퍼지 제어기 규칙을 작성할 수 있다. 작성된 연속치 퍼지 모델에 대해 LMI기반 국부 제어기를 설계 및 안정도 분석을 하고, 이 연속치 모델에 대해 지능형 디지털 제설계 기법을 통한 PAM 퍼지 제어기의 설계방법을 제안하였다. 제안된 제어기의 제어 규칙을 통하여 구하게 되는 디지털 PAM 퍼지 제어기는 연속 시간 비선형 동적 시스템을 효과적으로 유연하게 제어할 수 있다. 대표적인 비선형 시스템인 도립진자에 적용한 결과로부터 본 논문에서 제안한 제어기가 안정하게 제어함을 알 수 있다.

감사의 글 : 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호: 2000-1-30200-002-3)에 의해 지원 받았음.

(참 고 문 헌)

- [1] Y.H. Joo, L.S. Shieh and G. Chen, "Hybrid State-Space Fuzzy Model-Based Controller with Dual-Rate Sampling for Digital Control of Chaotic System", IEEE Trans. on Fuzzy System, Vol. 7, No. 4, 1999.
- [2] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control", IEEE Trans. Syst., Man, and Cybernetics, Vol. SMC-15, No 1, pp. 116-132, 1985.
- [3] Leang-san Shieh, Wei-min Wang and Jhon W. Sunkel, "Design of PAM and PWM Controllers for Sampled-Data Interval Systems," ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement and Control pp.673 - 682 1996
- [4] C. Li, P. C. Chen, and C.K. Chen, "Analysis and Design of Fuzzy Control Systems", Fuzzy Sets and Systems, Vol.57, pp.125-140, 1993.
- [5] F.H.F.Leung, L.K.Wong and P.K.S.Tam, "Fuzzy Model Based Controller for an Inverted Pendulum", Electronics Letters, Vol.32, pp.1683-1685, 1996
- [6] L.S.Shieh, Xiao M.Zhao and Jhon W.Sunkel, "Hybrid state-space self-tuning control using dual-rate sampling", IEE PROCEEDINGS-D, Vol. 138 , No. 1, 1991
- [7] S.G.Cao, N.W.Rees, and G.Feng, "Stability Analysis and Design for a Class of Continuous-Time Fuzzy Control System", Int. J. Control. Vol.64, No.6, pp.1069-1087, 1996
- [8] L.K.Wong, F.F.Leung, and P.K.S.Tam, "Stability Design of TS Model Based Fuzzy Systems", IEEE-FUZZ1997, pp.83-86, 1997.
- [9] H.J. Lee, Y.H. Joo, J.B. Park and L.S. Shieh, "Intelligent Digitally Redesigned PAM Fuzzy Controller for Nonlinear Systems", IEEE Int. Fuzzy Systems Conference Proceedings, 1999
- [10] H.O. Wang, K.Tanaka and M.F. Griffin, "An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 4, No. 1, pp. 14-23, 1996.