

연속적 근사화 방법을 이용한 쌍일차 정규섭동 시스템의 최적제어기 설계

장 재원*, 이 상엽*, 김 범수**, 임 묘택**

*:고려대학교 메카트로닉스학과, **: 고려대학교 전기공학과

Design of a Controller Using Successive Approximation for Weakly Copled Bilinear Systems

Jae-Won Chang*, Sang-Yup Lee*, Beom-Soo Kim**, Myo-Taeg Lim**

*:Department of Mechatronics Eng., Korea Univ. **:Department of Electrical Eng.,Korea Univ.

Abstract - The infinite time optimum to regulate the problem of weakly coupled bilinear systems with a quadratic performance criterion is obtained by a sequence of algebraic Lyapunov equations. The new approach is based on the successive approximations. In particular, the order reduction is achieved by using suitable state transformation so that the original Lyapunov equations are decomposed into the reduced-order local Lyapunov equations. The proposed algorithms not only solve optimal control problems in the weakly coupled bilinear system but also reduce the computation time. This paper also includes an example to demonstrate the procedures.

여기서, $y_1 \in R^{n_1}, y_2 \in R^{n_2}, x = [y_1 y_2]^T \in R^n, n_1 + n_2 = n$ 는 상태벡터이고, $u_1 \in R^{m_1}, u_2 \in R^{m_2}, u = [u_1, u_2]^T \in R^m, m_1 + m_2 = m$ 는 제어 입력, ϵ 은 작은 양의 변수를 나타낸다. (1)과 같이 표현되는 시스템의 평가함수는 다음과 같이 주어진다.

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) \quad (2)$$

여기에서, Q 는 양의 준정부호 $n \times n$ 대칭 행렬이고, R 은 양의 정부호 $m \times m$ 대칭 행렬이다. 위의 정상상태에서의 최적문제는 다음의 가정에서 고려되었다.

가정1. 쌍 (A, B) 는 안정화 할 수 있고 x 는 $X_c = \{x \in R^n | (A, B + xM)\}$ 로 정의된 안정도(stabilizability) 영역에 머물고, (A, \sqrt{Q}) 는 검출가능(detactable)하다.

그러나 위와같은 정규섭동 쌍일차 시스템은 시스템의 비선형성 때문에 Riccati 방정식의 해석적인 해가 존재하지 않는다. 따라서 위와같은 시스템의 최적제어 문제를 풀기 위해 근사화 방법이 필요하게 되었다.

다음과 같이 표현되는 일련의 미분방정식의 해는 (1)로 표현되는 x 로 한결같이 수렴된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(0)} &= Ax^{(0)} + Bu, & x^{(0)}(t_0) &= x_0 \\ \dot{x}^{(i)} &= Ax^{(i)} + \{x_{i-1}(t)M\}u + Bu & (3) \\ & & x^{(i)}(t_0) &= x_0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

위의 결과와 가정1을 이용하면 (2)의 평가함수를 고려한 (1)의 정규섭동 쌍일차 시스템은 다음과 같이 주어 진 일련의 선형최적 문제로 대체된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(i)} &= Ax^{(i)} + B^{(i)}(t)u^{(i)}, \\ B^{(i)}(t) &\equiv B + \{x^{(i-1)}(t)M\}, & x^{(i)}(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (4)$$

또한 대수 Riccati 방정식과 최적제어 입력은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} Q + P^{(i)}(t)A + A^T P^{(i)}(t) \\ - P^{(i)}(t)B^{(i)}(t)R^{-1}B^{(i)T}(t)P^{(i)}(t) = 0, \quad i=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

$$u^{(i)} = -R^{-1}B^{(i)}(t)P^{(i)}(t)x^{(i)} \quad (6)$$

반복숫자 i 를 늘리면 $x^{(i)}$ 는 최적상태 x_{opt} 로 $u^{(i)}$ 는 최적 제어 입력 u_{opt} 로 수렴한다. 따라서, 쌍일차 계통의 최적제어 문제는 일련의 시변 선형계통으로부터 해를 구할 수 있다.

1. 서 론

정규섭동 시스템은 여러학자에 의해 소개되고 연구되었다. 선형과 비선형의 중간에는 소위 쌍일차라고 부르는 시스템이 존재한다. 그러나 쌍일차 시스템의 최적 제어를 설계하는 문제는 시스템의 비선형성 때문에 그리 간단하지 않았다. 이러한 문제를 해결하기 위해 여러 학자들이 연구를 했고 최근의 추세는 최적 제어 문제의 해 밀토니안을 기반으로 상태와 공상태의 방정식을 수치적으로 푸는 것이다. 주된 알고리즘을 살펴보면 체부하[1]는 최적제어 입력을 구하는 과정에서 대수 Riccati 방정식을 사용하였고 아가노빅[2]은 연산속도가 더 빠른 대수 Lyapunov 방정식을 사용하는 알고리즘을 제시하였다. 정규섭동 쌍일차 계통에서의 최적 제어에 관한 연구로는 최적 제어입력을 구하는 과정에서 근사화된 대수 Riccati 방정식을 반복을 통해서 해를 구하는 결과가 있다[3]. 이 논문에서는 연속적 근사화 방법을 바탕으로 정상상태 정규섭동 쌍일차 시스템의 최적 제어를 설계하는 알고리즘을 제안하였다. 그 결과로서 최적 제어입력을 구하는 과정에서 대수 Riccati 방정식 대신에 대수 Lyapunov 방정식을 풀게 된다. 또한 얻어진 전역 Lyapunov 방정식에 적절한 변형을 취하면 저차의 Lyapunov 방정식으로 풀게 된다. 따라서 연산량을 경감시키고 수렴속도를 증가시킬 수 있다.

2. 쌍일차 정규섭동시스템에서의 최적 제어기 설계

2.1 쌍일차 정규섭동시스템의 최적제어기 설계

쌍일차 정규섭동 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & \epsilon A_2 \\ \epsilon A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & \epsilon B_2 \\ \epsilon B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_a & \epsilon M_b \\ \epsilon M_c & M_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

2.2 연속적 근사화 방법을 이용한 쌍일차 정규섭동 시스템의 최적 제어기 설계

연속적 근사화 방법은 동적 프로그래밍에서 함수 방정식의 해를 구하는 주요 도구중의 하나로서 여러 제어 분야에서 사용되고 있다.

연속적 근사화 방법을 이용하여 새로운 알고리즘을 유도한다. (1)-(2)의 방정식에 연속적 근사화 방법을 적용하는 것은 다음의 단계들로 구성된다.

단계 1. 다음과 같은 대수 Riccati 방정식으로부터 $P^{(0)}(t)$ 을 구한다.

$$Q + P^{(0)}(t)A + A^T P^{(0)}(t) - P^{(0)}(t)BR^{-1}B^T P^{(0)}(t) = 0 \quad (7)$$

이 때의 시스템의 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x}^{(0)}(t) = (A - BR^{-1}B^T P^{(0)}(t))x^{(0)}, x^{(0)}(t_0) = x^0 \quad (8)$$

그러므로, 다음과 같은 안정한 선형제어 입력을 구할 수 있다.

$$u^{(0)}(x(t)) = -R^{-1}B^T P^{(0)}(t)x(t)$$

단계 2. (1)로 표현되는 쌍일차 정규섭동 시스템은 다음과 같은 선형 시변 형태로 변환한다.

$$\dot{x}^{(i)}(t) = Ax^{(i)}(t) + \tilde{B}^{(i)}(t)u^{(i)}(t) \quad (9)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{(i)}(t) &= B + (x^{(i)}(t)M) \\ u^{(i)} &= -R^{-1} \tilde{B}^{(i)}(t)P^{(i)}x^{(i)}, i=1,2,\dots \end{aligned} \quad (10)$$

이때의 평가함수는 다음과 같이 주어진다.

$$J^{(i)}(t) = \frac{1}{2} \int_t^\infty x^{(i)T}(\tau) [Q + P^{(i)}(\tau) \times \tilde{B}^{(i)}(\tau)R \tilde{B}^{(i)T}(\tau)P^{(i)}(\tau)] x^{(i)}(\tau) d\tau \quad (11)$$

(11)의 평가함수로부터 $\frac{\partial J^{(i)}}{\partial x}(t)$ 구한다.

단계 3. $\frac{\partial J^{(i)}}{\partial x}(t)$ 으로부터 Lyapunov 방정식을 유도해 낸다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{dJ}{dt}\right)^{(i)} &= \left(-\frac{\partial J}{\partial x}\right)^{(i)} \left(-\frac{dx}{dt}\right)^{(i)} \\ &= -\frac{1}{2} (x^{(i)}(t)Qx^{(i)}(t) + u^{(i)T}(t)Ru^{(i)}(t)) \end{aligned} \quad (12)$$

$u^{(i)}(t)$ 와 (9) 또한 [4]의 결과로써 (13)로 표현되는 값을 이용하면,

$$J^{(i)} = \frac{1}{2} x^{(i)T}(t)P^{(i+1)}(t)x^{(i)}(t) \quad (13)$$

다음과 같은 Lyapunov 방정식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{A}^{(i)T}(t)P^{(i+1)}(t) + P^{(i+1)}(t)\tilde{A}^{(i)}(t) + \tilde{Q}^{(i)} = 0 \quad (14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(i)}(t) &= A(t) - S^{(i)}(t)P^{(i)}(t) \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^{(i)} & \varepsilon \tilde{A}_2^{(i)} \\ \varepsilon \tilde{A}_3^{(i)} & \tilde{A}_4^{(i)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

$$S^{(i)}(t) = \tilde{B}^{(i)}(t)R^{-1}\tilde{B}^{(i)T}(t)$$

단계 4. 대각가능한 행렬 $\tilde{A}^{(i)}(t)$ 에 비특이 변환을 적용시키면 분리된 Lyapunov 방정식을 얻을 수 있다. 이 때의 비특이 행렬은 다음과 같이 주어진다[5].

$$T_2 = \begin{bmatrix} I & -\varepsilon L_2 \\ \varepsilon H_2 & I - \varepsilon^2 H_2 L_2 \end{bmatrix}, T_2^{-1} = \begin{bmatrix} I - \varepsilon^2 L_2 H_2 & \varepsilon L_2 \\ -\varepsilon H_2 & I \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서 L_2 와 H_2 는 다음의 2개의 대수 방정식을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(i)}L_2 - L_2\tilde{A}_4^{(i)} + \tilde{A}_2^{(i)} - \varepsilon^2 L_2\tilde{A}_3^{(i)}L_2 &= 0 \\ H_2(\tilde{A}_1^{(i)} - \varepsilon^2 L_2\tilde{A}_3^{(i)}) - (\tilde{A}_4^{(i)} + \varepsilon^2 \tilde{A}_3^{(i)}L_2)H_2 + \tilde{A}_3^{(i)} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

(17)은 일련의 선형방정식으로 반복적으로 풀어서 해를 구한다. (14)의 전역 Lyapunov 방정식에서 좌변에 T_2^{-T} 을 우변에 T_2^{-1} 을 곱하면 다음과 같은 형태의 방정식을 얻는다.

$$T_2^{-T} \tilde{A}^{(i)T}(t)P^{(i+1)}(t)T_2^{-1} + T_2^{-T}P^{(i+1)}(t) \times \tilde{A}^{(i)}(t)T_2^{-1} + T_2^{-T}\tilde{Q}^{(i)}T_2^{-1} = 0 \quad (18)$$

(18)식은 다시 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$K^{(i+1)}a^{(i)} + a^{(i)T}K^{(i+1)} + q^{(i)} = 0, i = 1, 2, \dots \quad (19)$$

여기서,

$$\begin{aligned} a^{(i)} &= T_2 \tilde{A}^{(i)} T_2^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{10}^{(i)} & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{40}^{(i)} \end{bmatrix} \\ q^{(i)} &= T_2^{-T} \tilde{Q}^{(i)} T_2^{-1}, K^{(i+1)} = T^{-T} P^{(i+1)} T_2^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

또한 $K^{(i+1)}(t), q^{(i)}(t)$ 는 다음과 같은 구조를 갖고 있다.

$$K^{(i+1)} = \begin{bmatrix} K_1^{(i+1)} & \varepsilon K_2^{(i+1)} \\ \varepsilon K_2^{(i+1)T} & K_3^{(i+1)} \end{bmatrix}, q^{(i)} = \begin{bmatrix} q_1^{(i)} & \varepsilon q_2^{(i)} \\ \varepsilon q_2^{(i)T} & q_3^{(i)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

(19)식을 (20)-(21)에 따라 분리하면 다음과 같은 전적으로 분리된 저차의 Lyapunov 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} 0 &= K_1^{(i+1)} \tilde{A}_{10}^{(i)} + \tilde{A}_{10}^{(i)T} K_1^{(i+1)} + q_1^{(i)} \\ 0 &= K_2^{(i+1)} \tilde{A}_{40}^{(i)} + \tilde{A}_{10}^{(i)T} K_2^{(i+1)} + q_2^{(i)} \\ 0 &= K_3^{(i+1)} \tilde{A}_{40}^{(i)} + \tilde{A}_{40}^{(i)T} K_3^{(i+1)} + q_3^{(i)} \end{aligned} \quad (22)$$

(22)식 으로부터 $K_j^{(i+1)}$, $j=1,2,3$ 구한후

$P^{(i+1)}(t) = T_2^T K^{(i+1)}(t) T_2$ 의 관계식을 이용하여 원래의 좌표계의 대수 방정식의 해를 구한다.

단계5. 얻어진 $P^{(i+1)}(t)$ 로부터 다음과 같은 근사화된 제어 입력을 구할 수 있다.

$$u^{(i+1)}(t) = -R^{-1} \tilde{B}^{(i+1)T}(t) P^{(i+1)}(t) x^{(i+1)}(t) \quad (24)$$

이때의 시스템의 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}^{(i+1)}(t) = [A - \tilde{B}^{(i+1)}(t) R^{-1} \times \tilde{B}^{(i+1)T}(t) P^{(i+1)}(t)] x^{(i+1)}(t) \quad (25)$$

단계6. 수렴성이 만족할 때까지 단계2-5까지를 반복한다.

3. 수치 예

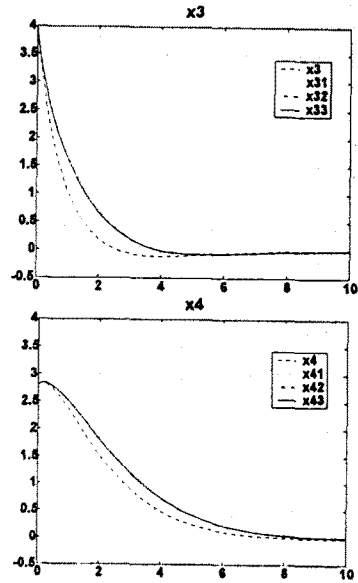
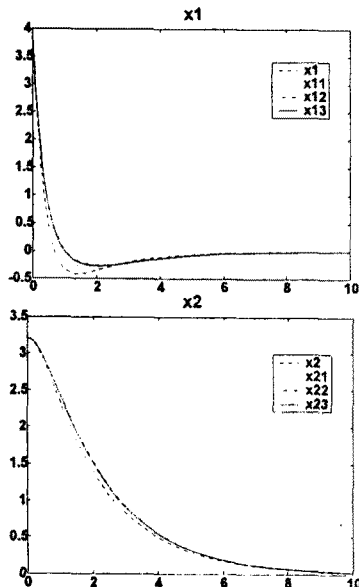
쌍일차 정규섭동 시스템의 최적제어기를 설계하는 제안된 알고리즘의 효율성을 검증하기 위해 다음의 4차의 실제통 모델인 제지기를 사용하였다. (1)과 (2)의 시스템의 수학적 모델은 다음과 같이 주어진다.

$$A = \begin{bmatrix} -1.93 & 0 & 0 & 0 \\ 0.394 & -0.426 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.63 & 0 \\ 0.095 & -0.103 & 0.413 & -0.426 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.274 & 1.274 \\ 0 & 0 \\ 1.34 & -0.65 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.755 & 0.366 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.718 & -0.718 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.13 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.09 \\ 0.13 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.09 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



시뮬레이션의 결과가 위의 4개의 상태의 그림으로 표현된다. 이 그림에서 실선은 최적 궤적을 나타내고 있다. 반복수행을 할 수록 최적상태에 접근함을 알 수 있다. 여기서, $i=3$ 이다.

또한 이 논문에서는 최적제어 입력을 구하는 과정에서 Riccati 방정식대신에 전역 Lyapunov 방정식을 풀게 되고 전역 Lyapunov 방정식도 비특이 행렬을 사용하여 저차의 Lyapunov 방정식으로 구하게 된다. 각 반복에서의 행렬의 사칙연산 수를 MATLAB의 FLOPS라는 명령어를 사용하여 나타내면 다음과 같이 표현된다.
 $FLOPS(P(Riccati)) = 19237 > FLOPS(P(Lyap)) = 5526 > FLOPS(P(reduced Lyap)) = 1804$
 즉 계산량이 매우 경감된다.

4. 결 론

본 논문에서는 쌍일차 정규섭동시스템에 연속적근사화 방법을 적용하였다. 그 결과로 대수 Riccati 방정식 대신에 대수 Lyapunov 방정식을 풀게된다. 또한 전역 Lyapunov 방정식도 비특이 행렬을 적용하여 저차의 Lyapunov 방정식으로 풀음으로서 수렴속도를 증대시키고 계산량을 매우 경감시킬 수 있다.

[참 고 문 헌]

- [1] Cebuhar, W. A., & Costanza, V., "Approximate procedures for the optimal control of bilinear.", Journal of Optimization Theory and Applications, 43, 615-627, 1984
- [2] Aganovic, Z., & Gajic, Z., "The successive approximation procedure for steady state optimal control of bilinear systems.", Journal of Optimization Theory and Applications, 84, 273-291, 1995
- [3] Aganovic, Z., "Optimal Reduced-Order Control of Singularly Perturbed and Weakly Coupled Bilinear Systems", Doctoral Dissertation, NJ: Rutgers University, 1993
- [4] Sivan, R., & Kwakernaak, H., "Linear Optimal Control Systems", NY: John Wiley & Son, 1972
- [5] Gajic, Z., & Shen, X., "Decoupling transformation for weakly coupled linear systems", International Journal of Control, 50, 1515-1512, 1989