

연속적 Galerkin 근사를 이용한 정규 섭동 쌍일차 시스템에 대한 합성 제어

김 영중, 김 범수, 임요택
고려대학교 전기공학과

Composite Control for Weakly Coupled Bilinear Systems with Successive Galerkin Approximation

Young-Joong Kim, Beom-Soo Kim, Myo-Taeg Lim
School of Electrical Engineering, Korea University

Abstract - This paper presents the closed-loop composite control for weakly coupled bilinear systems with a quadratic performance criterion. The Riccati equation for weakly coupled bilinear system is decomposed into three reduced Riccati equations by the weak coupling theory, and we obtain optimal solutions of each reduced Riccati equation using successive Galerkin approximation(SGA). We design the composite control law that consists of optimal solutions of each reduced Riccati equation. The proposed algorithm reduces the disadvantages of SGA method.

1. 서 론

실제 세계에는 선형과 비선형 시스템 사이에 놓이는 쌍일차 시스템이 존재하며([1],[3],[6]), 이러한 쌍일차 시스템 중에 많은 수가 정규 섭동 구조로 이루어진다([7],[9],[10]). 많은 학자들에 의하여 정규 섭동 쌍일차 시스템에 대한 페루프 제어에 관하여 연구되어 왔다([7],[9],[10]). 이 논문의 목적은 근사화 방법인 연속적 Galerkin 근사(SGA)를 이용하여 정규 섭동 쌍일차 시스템에 대한 페루프 제어를 설계하는 것이고, 동시에 SGA의 단점인 시스템 크기가 커짐에 따른 적분 계산의 어려움과 적분 계산량의 증가를 줄이는 것이다. 2장에서 정규 섭동 쌍일차 시스템의 Riccati 방정식을 저차화된 Riccati 방정식들로 분리되는 것을 보이고, 저차화된 비선형 Riccati 방정식의 해를 구하는 연속적 Galerkin 근사를 이용한 합성 제어 알고리즘을 제시한다. 3장에서 제안된 알고리즘으로 모의 실험을 한다.

2. 연속적 Galerkin 근사를 이용한 정규 섭동 쌍일차 시스템에 대한 합성 제어

2.1 쌍일차 시스템에 대한 최적 제어

다음과 같은 쌍일차 시스템에 대한 최적 제어를 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + (B + \{xM\})u, \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

그리고, 평가지수는 다음과 같이 주어진다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2)$$

여기서, $x \in R^n$ 는 상태 변수이고, $u \in R^m$ 는 제어 입력이다. A, B, Q, R 은 상수 행렬이고, $Q = Q^T \geq 0, R = R^T > 0$. 그리고,

$$\{xM\} = \sum_{i=1}^n x_i M_i, \quad M_i = R^{n \times m}$$

쌍일차 시스템 (1)을 만족시키며, 평가함수 (2)를 최소화시키는 최적제어 입력은 다음과 같이 구해진다.

$$u^* = -R^{-1}(B + \{xM\})^T P x \quad (3)$$

여기서, P 는 다음의 비선형 Riccati 방정식의 해이다.

$$PA + A^T P + Q - P(B + \{xM\})R^{-1}(B + \{xM\})^T P = 0 \quad (4)$$

하지만, (4)식으로 표현되는 비선형 Riccati 방정식은 미지수 상태 변수 x 를 포함하고 있으므로 해를 구하는 것이 매우 어렵다. 따라서, 반복 기법에 의하여 비선형 Riccati 방정식의 해를 구하는 방법이 연구되어 왔다 ([4],[7],[9],[10]).

2.2 정규 섭동 쌍일차 시스템에 대한 최적 제어

정규 섭동 쌍일차 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \varepsilon A_2 \\ \varepsilon A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & \varepsilon B_2 \\ \varepsilon B_3 & B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \begin{bmatrix} M_a & \varepsilon M_b \\ \varepsilon M_c & M_d \end{bmatrix} \\ x_2 \begin{bmatrix} M_a & \varepsilon M_b \\ \varepsilon M_c & M_d \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서 $x_1 \in R^{n_1}, x_2 \in R^{n_2}, u_1 \in R^{m_1}, u_2 \in R^{m_2}$ 이고, ε 은 작은 양의 정수이다. 그리고,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_a & \varepsilon M_b \\ \varepsilon M_c & M_d \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} \begin{bmatrix} M_{ai} & \varepsilon M_{bi} \\ \varepsilon M_{ci} & M_{di} \end{bmatrix} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} x_{2j} \begin{bmatrix} M_{aj} & \varepsilon M_{bj} \\ \varepsilon M_{cj} & M_{dj} \end{bmatrix}$$

여기서, $M_a \in R^{n_1 \times m_1}, M_b \in R^{n_1 \times m_2}, M_c \in R^{n_2 \times m_1}, M_d \in R^{n_2 \times m_2}$.

평가지수는 다음과 같이 주어진다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right) dt \quad (6)$$

여기서 $Q \geq 0, R > 0$ 이고, 다음과 같이 정규 섭동 구조를 갖는다.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & \varepsilon Q_2 \\ \varepsilon Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

행렬 $\tilde{B}(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\tilde{B}(x) = B + \{xM\} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & \varepsilon \tilde{B}_2 \\ \varepsilon \tilde{B}_3 & \tilde{B}_4 \end{bmatrix}$$

정규 섭동 쌍일차 시스템 (5)에 대한 Riccati 방정식 (4)의 해인 P 는 다음과 같은 구조를 갖는다([7],[9],[10]).

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \varepsilon P_2 \\ \varepsilon P_2^T & P_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

정규 섭동 쌍일차 시스템 (5)에 대한 Riccati 방정식 (4)는 $\varepsilon^2 = 0$ 으로 놓으면, 다음과 같이 저차화된 세 개의 Riccati 방정식으로 분리할 수 있다.

$$P_1 A_1 + A_1^T P_1 + Q_1 - P_1 \tilde{B}_1 R_1^{-1} \tilde{B}_1^T P_1 = 0 \quad (8)$$

$$P_3 A_4 + A_4^T P_3 + Q_3 - P_3 \tilde{B}_4 R_2^{-1} \tilde{B}_4^T P_3 = 0 \quad (9)$$

$$P_2(A_4 - \bar{B}_4 R_2^{-1} \bar{B}_4^T P_3) + (A_1 - \bar{B}_1 R_1^{-1} \bar{B}_1^T P_1)^T P_2 + P_1 A_2 + A_3^T P_3 + Q_2 \quad (10)$$

$$- P_1 (\bar{B}_1 R_1^{-1} \bar{B}_3^T + \bar{B}_2 R_2^{-1} \bar{B}_4^T) P_3 = 0$$

비선형 Riccati 방정식 (8), (9)들이 비록 저차화 되었지만, \bar{B} 에 상태 변수 x 가 포함되어 있으므로, 해석적인 해를 갖지 못한다. 따라서, 근사화 방법으로 저차화된 Riccati 방정식 (8), (9)를 연속적 Galerkin 근사(SGA)를 이용하여 해를 구한다. 또한 (10)은 입력이 없는 비선형 Riccati 방정식으로써, (8), (9)식의 해 P_1, P_3 를 구한 후 대입하여, 여러 가지 근사화 방법들로 쉽게 구할 수 있다.

2.3 연속적인 Galerkin 근사를 이용한 정규 섭동 쌍일차 시스템에 대한 합성 제어

Riccati 방정식 (8), (9)에 관련된 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$0 = \frac{1}{2} x_1^T Q_1 x_1 + \frac{\partial J_1^T}{\partial x_1} A_1 x_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial J_1^T}{\partial x_1} \bar{B}_1 R_1^{-1} \bar{B}_1^T \frac{\partial J_1^T}{\partial x_1} \quad (11)$$

$$0 = \frac{1}{2} x_2^T Q_3 x_2 + \frac{\partial J_3^T}{\partial x_2} A_4 x_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial J_3^T}{\partial x_2} \bar{B}_4 R_2^{-1} \bar{B}_4^T \frac{\partial J_3^T}{\partial x_2} \quad (12)$$

여기서 $\partial J_1^T / \partial x_1 = P_1 x_1$, $\partial J_3^T / \partial x_2 = P_3 x_2$.

P_1 과 P_3 을 구하기 위하여 연속적인 Galerkin 근사를 이용하여 $\partial J_1^T / \partial x_1$ 와 $\partial J_3^T / \partial x_2$ 를 구한다.

가정 1: Ω 는 R^n 의 콤팩트 집합이며, 모든 상태 변수 x 는 Ω 에 존재한다.

정의 1: 허용 가능한 제어 $u: R \times \Omega \rightarrow R$ 가 주어지면, 함수 $J: R \times \Omega \rightarrow R$ 는 다음의 Generalized-Hamilton-Jacobi-Bellman(GHJB) 방정식을 만족한다.

$$GHJB(J^{(i)}, u^{(i)}) = 0 \quad (13)$$

여기서, GHJB 방정식 (13)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$0 = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} \frac{\partial J^{(i-1)}}{\partial x^T} \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T \frac{\partial J^{(i-1)}}{\partial x} + \frac{\partial J^{(i)}}{\partial x^T} A x - \frac{\partial J^{(i)}}{\partial x^T} \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T \frac{\partial J^{(i-1)}}{\partial x} \quad (14)$$

여기서 i 는 반복지수 이고, 제어 입력은 다음과 같이 구하여 진다.

$$u^{(i)} = -R^{-1} \bar{B}^T \frac{\partial J^{(i-1)}}{\partial x} \quad (15)$$

Galerkin 근사를 이용하여 GHJB 방정식을 콤팩트 집합 $[t_0, t_f] \times \Omega$ 에서 근사 해를 유도한다. 방정식 $GHJB(J^{(i)}, u^{(i)}) = 0$ 의 해인 $J_N^{(i)}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$J_N^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^N c_j^{(i)} \phi_j(x) \quad (16)$$

이 근사해 (16)를 GHJB 방정식(13)에 대입하고, 그에 따른 오차를 다음과 같이 정의한다.

$$error = GHJB\left(\sum_{j=1}^N c_j^{(i)} \phi_j, u^{(i)}\right) \quad (17)$$

이 근사 오차 (17)를 0으로 만들기 위하여, (18)식과

같이 유한한 기저함수 ϕ_j^N 에 사영시킨다. 그리고, 방정식(18)에서 오차를 0으로 만드는 계수 c_j 를 구한다.

$$\langle GHJB\left(\sum_{j=1}^N c_j^{(i)} \phi_j, u^{(i)}\right), \phi_n \rangle_{\Omega} = 0, \quad n=1, \dots, N \quad (18)$$

방정식 (19)은 N 개의 미지수를 갖는 N 개의 방정식으로 구성된다.

행렬로 표현하기 위하여, 함수 Φ_N 를 다음과 같이 정의한다.

$$\Phi_N(x) \equiv (\phi_1(x), \dots, \phi_N(x))^T$$

그리고, $\nabla \Phi_N$ 은 Φ_N 의 Jacobian이다. $\eta: R^N \rightarrow R^N$ 가 벡터 함수이면 다음과 같이 정의된다.

$$\langle \eta, \Phi_N \rangle_{\Omega} \equiv \begin{bmatrix} \langle \eta_1, \phi_1 \rangle_{\Omega} & \dots & \langle \eta_N, \phi_1 \rangle_{\Omega} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \eta_1, \phi_N \rangle_{\Omega} & \dots & \langle \eta_N, \phi_N \rangle_{\Omega} \end{bmatrix}$$

여기서, 내적은 다음과 같이 정의한다.

$$\langle f, g \rangle_{\Omega} \equiv \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

또한, 함수 J_N 을 다음과 같이 정의한다.

$$J_N \equiv C_N^T \Phi_N$$

여기서,

$$C_N \equiv (c_1, \dots, c_N)^T$$

2.4 연속적 Galerkin 근사를 이용한 정규 섭동 쌍일차 시스템에 대한 합성 제어 알고리즘

연속적 Galerkin 근사를 이용한 합성 제어 알고리즘은 저차화된 비선형 Riccati 방정식 (8), (9)의 해 P_1, P_3 을 구하기 위하여, HJB 방정식(11), (12)의 해인 J_1 과 J_3 을 구한다. HJB 방정식의 해를 구하기 위하여, 각각을 GHJB 방정식으로 만들고, Galerkin 근사방법을 사용하여 (18)식과 같이 만들면 각각 다음과 같이 표현된다.

$$a_1 C_{1N}^{(0)} + b_1 = 0 \quad (19)$$

$$a_3 C_{3N}^{(0)} + b_3 = 0 \quad (20)$$

다음과 같이 표현되는 선형 방정식 (20)(21)의 계수들은 계산한다.

$$a_1 = \langle \nabla \Phi_{1N} A_1 x_1, \Phi_{1N} \rangle_{\Omega_1} + \langle \nabla \Phi_{1N} \bar{B}_1 u_1^{(0)}, \Phi_{1N} \rangle_{\Omega_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \langle x_1^T Q_1 x_1, \Phi_{1N} \rangle_{\Omega_1} + \frac{1}{2} \langle u_1^{(0)T} \bar{B}_1 u_1^{(0)}, \Phi_{1N} \rangle_{\Omega_1}$$

$$a_3 = \langle \nabla \Phi_{3N} A_4 x_2, \Phi_{3N} \rangle_{\Omega_3} + \langle \nabla \Phi_{3N} \bar{B}_4 u_2^{(0)}, \Phi_{3N} \rangle_{\Omega_3}$$

$$b_3 = \frac{1}{2} \langle x_2^T Q_3 x_2, \Phi_{3N} \rangle_{\Omega_3} + \frac{1}{2} \langle u_2^{(0)T} \bar{B}_4 u_2^{(0)}, \Phi_{3N} \rangle_{\Omega_3}$$

$C_{1N}^{(0)}$ 와 $C_{3N}^{(0)}$ 는 행렬연산으로 쉽게 구할 수 있으며, 다음의 제어 입력(21), (22)을 구한다.

$$u_{1N}^{(i)}(x_1) = -R_1^{-1} \bar{B}_1^T \nabla \Phi_{1N}^T C_{1N}^{(i-1)} \quad (21)$$

$$u_{2N}^{(i)}(x_2) = -R_2^{-1} \bar{B}_4^T \nabla \Phi_{2N}^T C_{2N}^{(i-1)} \quad (22)$$

제어 입력 (21), (22)에 의하여 (18)식에 대입하여, 다음의 선형 방정식을 구할 수 있다.

$$a_1 C_{1N}^{(i)} + b_1 = 0 \quad (23)$$

$$a_3 C_{3N}^{(i)} + b_3 = 0 \quad (24)$$

다음과 같이 표현되는 선형 방정식 (23)(24)의 계수들은 계산한다.

$$a_1 = \langle \nabla \Phi_{1N} A_1 x_1, \Phi_{1N} \rangle_{\Omega_1} - \langle \nabla \Phi_{1N} \bar{B}_1 R_1^{-1} \bar{B}_1^T \nabla \Phi_{1N}^T C_{1N}^{(i-1)}, \Phi_{1N} \rangle_{\Omega_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \langle x_1^T Q_1 x_1, \Phi_{1N} \rangle_{\Omega_1}$$

$$+ \frac{1}{2} \langle C_{1N}^{(i-1)T} \nabla \Phi_{1N} \bar{B}_1 R_1^{-1} \bar{B}_1^T \nabla \Phi_{1N}^T C_{1N}^{(i-1)}, \Phi_{1N} \rangle_{\Omega_1}$$

$$a_3 = \langle \nabla \phi_{3N} A_4 x_2, \phi_{3N} \rangle_{\mathcal{Q}_3}$$

$$- \langle \nabla \phi_{3N} \bar{B}_1 R_2^{-1} \bar{B}_4^T \nabla \phi_{3N}^T C_{3N}^{(i-1)}, \phi_{3N} \rangle_{\mathcal{Q}_3}$$

$$b_3 = \frac{1}{2} \langle x_2^T Q_3 x_2, \phi_{3N} \rangle_{\mathcal{Q}_3}$$

$$+ \frac{1}{2} \langle C_{3N}^{(i-1)T} \nabla \phi_{3N} \bar{B}_1 R_2^{-1} \bar{B}_4^T \nabla \phi_{3N}^T C_{3N}^{(i-1)}, \phi_{3N} \rangle_{\mathcal{Q}_3}$$

$C_{1N}^{(i)}$ 와 $C_{3N}^{(i)}$ 는 행렬연산으로 쉽게 구할 수 있으며, 근사 오차를 줄여 최적제어 입력을 구하기 위하여, 조건 (25)이 만족될 때까지 반복한다. 여기서, $C_{1N}^{(i-1)}$ 와 $C_{3N}^{(i-1)}$ 은 상수이므로 내적 계산 밖으로 나올 수 있으므로, 반복수행시 더 이상의 내적 계산이 필요하지 않고, 행렬 연산만이 필요 하다.

$$|C_j^{(i-1)} - C_j^{(i)}| < \alpha \quad (25)$$

여기서, α 는 매우 작은 양의 정수이다.

조건(25)을 만족하는 C_{1N} 과 C_{3N} 으로 다음 관계식 (26)(27)에 의하여 P_1 과 P_2 를 구한다.

$$P_1 x_1 = \nabla \phi_{1N}^T C_{1N} \quad (26)$$

$$P_2 x_2 = \nabla \phi_{3N}^T C_{3N} \quad (27)$$

3. 모의 실험

4차의 수치 예로 paper machine 제어를 모의 실험 하였다. 행렬들의 값은 다음과 같다[8].

$$A = \begin{bmatrix} -1.93 & 0 & 0 & 0 \\ 0.394 & -0.426 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.63 & 0 \\ 0.095 & -0.103 & 0.413 & -0.426 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.274 & 1.2740 \\ 0 & 0 \\ 1.34 & 0 - 0.65 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.755 & 0.366 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.718 & -0.718 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = I_2, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.13 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.09 \\ 0.13 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.09 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

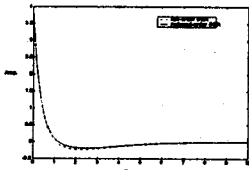


그림 1. x1

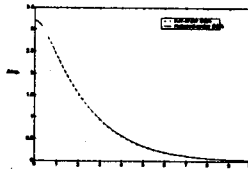


그림 2. x2

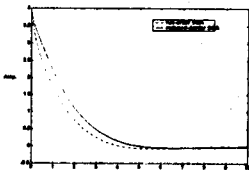


그림 3. x3

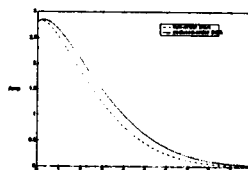


그림 4. x4

모의 실험 결과는 그림 1-4와 같다. 그림에서 파선은 최적 레션으로써 전체 시스템을 SGA 방법으로 구한 것

이고, 실선은 제안된 알고리즘으로 저차화된 SGA 방법으로 구한 것이다. 제안된 알고리즘과 거의 같은 결과를 보임을 알 수 있다. SGA 방법은 N 차의 기저함수를 사용하면 필요한 적분 계산은 $N*(N^0 + N^1 + N^2)$ 개 이다. 전체 시스템으로 SGA 방법으로 구한 경우 7차의 기저 함수를 사용하여, $7*(1+7+49) = 399$ 개의 4차원 적분 계산이 필요하였다. 반면에 제안된 알고리즘 경우 두 개의 3차의 기저 함수를 사용하여, $2*3*(1+3+9) = 78$ 개의 2차원 적분 계산만이 필요하였다.

4. 결 론

이 논문에서 연속적 Galerkin 근사(SGA)를 이용한 정규 섭동 쌍일차 시스템에 대한 페루프 합성제어 알고리즘을 제시하였다. 이 것은 상태 변수를 포함하는 비선형 Riccati 방정식의 해를 효율적으로 구할 수 있다. 또한, SGA 방법의 단점인 시스템 차원 n 에 따른 n 차원 적분을 저차화된 HJB 방정식에 따른 n_1, n_2 차원 적분으로 축소하였고, 적분계산량 또한 큰 비율로 감소하였다. 여기서 $n = n_1 + n_2$ 이다.

[참 고 문 헌]

- [1] Cebuhar, W. and Costanza, V., "Approximation procedures for the optimal control for bilinear and nonlinear systems", Journal of Optimization Theory and Applications, 43(4):615-627, 1984.
- [2] D. Kirk, "Optimal Control Theory", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970.
- [3] E. Hoffer and B. Tibken, "An iterative method for the finite-time bilinear quadratic control problem", Journal of Optimization Theory and Applications, 57, 411-427, 1988.
- [4] R. Beard, "Improving the Closed-Loop Performance of Nonlinear Systems", PhD Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY 12180, 1995.
- [5] R. Beard, G. Saridis, and J. Wen, "Galerkin approximation of the generalized Hamilton-Jacobi-Bellman equation", Automatica, 33(12), 2159-2177, 1996.
- [6] R. Mohler, "Nonlinear systems - Applications to Bilinear control", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- [7] Z. Aganovic, and Z. Gajic, "Linear Optimal Control of Bilinear Systems: with Applications to Singular Perturbations and Weak Coupling", Springer, London, 1995.
- [8] Y. Ying, M. Rao, and X. Shen, "Bilinear decoupling control of cell its industrial application", Proc. American Control Conference, Chicago, 1163-1167 1992.
- [9] Z. Gajic and X. Shen, "Decoupling transformation for weakly coupled linear systems", Int. J. Control, 50, 1515-1521.
- [10] Z. Gajic and X. Shen, "Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems", Springer, London, 1992.