선형 시스템의 강인 피크 제어

마삼선[*], 홍승수[**], 김진훈[***]
한전전력연구원[*], 한국표준과학연구원[**], 충북대 전기전자공학부[***]

Robust Peak-to-peak Control of the Linear System

Sam-Sun Ma, Seung-Soo Hong, Jin-Hoon Kim
KEPRI, KRISS, Chungbuk National Univ.

Abstract - In this paper, we consider the problem of robust peak-to-peak controller design of linear system. The goal is to design a controller which minimizes the maximum peak value of the measured output subjects to the peak bounded disturbance. The control is obtained by checking the feasibility of the derived matrix inequalities. Finally, we shows the usefulness of our result comparing to H_∞ and H_2 control by an example.

1. 서론

대다수의 제어문제는 외란에 의한 영향의 최소화, 명령에 대한 추종성능의 향상, 불확정성에 대한 강인성 확보 등을 다룬다. 이러한 관점에서 많은 안정성과 제어기 설계에 대한 제어방법이 소개되었다. 최근에 많이 연구되고 있는 대표적인 제어로는 H_∞와 H_2제어 그리고 혼합 H_2/H_∞제어등이 있다. H_∞제어는 외란으로부터 출력까지 전달함수의 무한대 노옴 $\|G(s)\|_\infty$를 최소화시키는 제어 방법으로 시간영역에서 보면 외란으로부터 출력까지의 L_2노옴 비를 최소화시키는 제어이다. 또한 H_2 제어는 주파수영역에서 $\|G(s)\|_2$를 최소화하는 제어이고, 시간영역에서 보면 임펄스응답의 L_2노옴을 최소화하는 제어기이다.[5][6]

과거에 제어문제들은 주로 Riccati 방정식에 의해 해를 구하였지만 파라미터 튜닝이나 다양한 제약조건들을 다루는 곳에서 어려움이 많았다. 그러나 최근에 들어서 선형행렬부등식(LMI)을 이용하면서, 효과적인 알고리듬을 이용해, 원하는 파라미터와 해를 쉽게 구할 수 있는 장점이 있어 많은 시스템의 해석이나 설계에 이용되고 있다. 시스템에 외란이 가해진 경우, 많은 시스템에서 측정된 출력의 피크치가 최소화되도록 하는 제어방법[1][2]이 요구된다. 예를 들면 레이져를 이용한 거리측정, 빌딩등에 지진이나 태풍의 영향으로 인한 층간흔들림의 최소화등이다. 이를 해결하기 위해 외란으로부터 출력까지의 L_2노옴의 비를 최소화하는 H_∞제어, 그리고 임펄스 응답의 L_2노옴 최소화인 H_2보다는 직접적으로 측정된 출력의 피크치를 최소화하는 제어기법이 요구된다.

본 논문은 외란을 포함하는 선형 시스템의 피크 이득을 최소화시키는 제어기 설계를 목적으로 한다. 출력의 피크 신호를 최소화함으로써 외란으로 인해 발생되는 시스템의 성능저하나 불안정성 문제를 해결하는 제어이다. 주요결과에서는 시스템에 외란이 존재함에도 불구하고 시스템의 안정성과 피크이득이 주어진 값 이하를 만족시키는 조건을 선형행렬부등식(LMI)으로 제시하고, 이로부터 원하는 제어기를 쉽게 구할 수 있음을 보인다. 그리고 모의실험에서는 빌딩 모델에 지진으로 외란이 가해질 때 각 층간의 흔들림(drift)이 최소범위내에 들도록 제어기를 설계하고 이 제어기를 동일한 조건($KK^T < R$)에서 얻어진 H_∞와 H_2 제어기와 비교한다.

이 논문에서는 $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치(transpose)를 의미하고 대칭(symmetric)행렬 $V, W \in R^{n\times n}$에 대하여 $V > W$ 또는 $V \ge W$는 각각 행렬 $V-W$가 양확정(positive definite), 준양확정(semi positive definite)행렬임을 나타낸다. 그리고 $\|\cdot\|_i$는 $i=1,2,\infty$에 대한 벡터 노옴 또는 이의 유사(induced) 행렬을 말하며, I_n은 $n\times n$항등(identity)행렬이다.

2. 본론

2.1 문제 기술

다음과 같은 선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= Cx(t), \quad x(0)=0\end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x(t) \in R^n$는 상태, $u(t) \in R^m$은 제어입력 그리고 $z(t) \in R^q$는 측정된 출력을 나타낸다. 또한 $w(t) \in R^r$는 외란으로써 다음을 만족한다.

$$w^T(t)w(t) \le w_{\max}^2 \ . \tag{2}$$

그리고 행렬 A, B_1, B_2, C는 적절한 차원을 갖는 알려진 상수행렬이다. 본 논문에서는 (2)를 만족하는 외란이 시스템 (1)에 가하여 졌을 때 측정된 출력 $z=[z_1, z_2, .. z_q]^T$가 다음을 만족하는

$$\max|z_i(t)| \le \delta_i \ \ , \ i=1,2,\ldots,q, \quad t\ge 0 \tag{3}$$

다음과 같은 상태궤환 제어기를 구하는 것이다.

$$u(\mathrm{t}) = -Kx(t) \tag{4}$$

2.2 기존 결과

다음의 잘 알려진 정리1은 H_∞제어기 설계, 정리2는 H_2제어기 설계에 관한 결과로써 다음에 제시되는 강인 피크 제어기와의 비교를 위해 증명 없이 기술한다.

정리1[9] : 다음의 선형 행렬 부등식을 만족하는 행렬 $Q=Q^T > 0$와 행렬 Y, 그리고 양의 상수 $\gamma > 0$가 존재한다면

$$\begin{bmatrix} AQ+QA^T-B_2Y-Y^TB_2^T & Q^TC^T & B_1 \\ CQ & -I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

시스템(1)의 외란 $w(t)$로부터 출력 $z(t)$까지 L_2이득이 γ보다 작음이 보장되고, 이 때 제어기 이득은 $K=YQ^{-1}$로 주어진다.

정리2[9] : 다음의 오는 행렬 부등식들을 만족하는 행렬 $G=G^T>0$, $Q=Q^T>0$와 행렬 Y, 그리고 ν가 존재한다면,

$$\begin{bmatrix} AQ+QA^T-B_2Y-Y^TB_2^T & B_1 \\ B_1^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} G & CQ \\ QC^T & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (7)$$

$$Trace(G) < \nu^2 \quad (8)$$

시스템(1)의 H_2 노옴이 ν보다 작음이 보장되고 이 때 제어기 이득은 $K=YQ^{-1}$로부터 얻어진다.

다음의 보조정리는 제어이득 K를 주어진 값 R에 바운드되게 하는 조건이다.

보조정리 : 다음의 행렬 부등식을 만족하는 행렬 $Q=Q^T>0$와 행렬 $Y\in R^{m\times n}$, 그리고 양의 상수 $\varepsilon>0$가 존재한다면,

$$\begin{bmatrix} R & Y \\ Y^T & \varepsilon Q \end{bmatrix} > 0, \quad Q > \varepsilon I \quad (9)$$

제어이득 K에 대해 $KK^T < R$이 성립된다.

증명 : 먼저 $K=YQ^{-1}$ 로 놓으면, K^TK는 다음과 같이 쉽게 얻을 수 있다.

$$KK^T = YQ^{-1}Q^{-1}Y^T < R$$

이것을 Schur complements[8]를 이용하면,

$$\begin{bmatrix} R & Y \\ Y^T & \varepsilon Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q^2-\varepsilon Q \end{bmatrix} > 0.$$

여기서 첫 번째, 두 번째 항이 양확정행렬이 되면 식(9)를 만족시킨다는 것을 쉽게 알 수 있다.

2.3 주요결과

다음에 정리3은 본 논문의 주요결과로써 시스템(1)에 대하여 피크출력 제한 조건 (3)을 만족하는 제어기 (4)를 구하는 결과이다.

정리3 : 다음의 행렬 부등식을 만족하는 행렬 $Q=Q^T>0$와 행렬 $Y\in R^{m\times n}$, 그리고 양의상수 $\alpha>0$가 존재한다면,

$$\Omega_1 \doteq \begin{bmatrix} AQ+QA^T-B_2Y-Y^TB_2^T+\alpha Q & B_1 \\ B_1^T & -\alpha I \end{bmatrix} \le 0 \quad (10)$$

$$\Omega_2 \doteq \begin{bmatrix} \dfrac{\delta_i^2}{w_{\max}^2} & V_iCQ \\ QC^TV_i & Q \end{bmatrix} \ge 0 \quad (11)$$

다음의 상태궤환 제어기는

$$u(t) = -Kx(t);\ K=YQ^{-1} \quad (12)$$

측정출력에 대하여 (3)을 보장한다. 여기서 V_i는 i번째 값만 1이고 나머지는 0인 벡터이다.

증명 : 먼저 i) $w^Tw\le w_{\max}^2$ 일 때 $x^TQ^{-1}x\le 1$ 이 되는 영역을 구한 후, ii)이 영역하에서 $|z_i(t)|\le\delta_i$ 가 되는 조건을 구한다. 참고문헌 [8]에 의해 위의 i)을 만족하기 위하여는 다음을 만족해야 한다.

$$x^T((A-B_2K)^TQ^{-1}+Q^{-1}(A-B_2K))x + 2x^TQ^{-1}B_1w+\alpha x^TQ^{-1}x-\alpha w^Tw<0$$

$$\Leftrightarrow \quad [\,x^TQ^{-1}\ \ w^T\,]\ \Omega_1 \begin{bmatrix} Q^{-1}x \\ w \end{bmatrix} < 0$$

따라서 (10)을 만족하면 $w^Tw\le w_{\max}^2$하에서 항상 $x^TQ^{-1}x\le 1$이다. 또한 다음의 관계식으로부터

$$\begin{aligned} \max_{t\ge 0} |z_i(t)|^2 &= \max_{t\ge 0} |V_iz(t)|^2 = \max_{t\ge 0} |V_iCx(t)|^2 \\ &= \max_{t\ge 0} |V_iCQ^{1/2}Q^{-1/2}x(t)|^2 \\ &\le \max_{t\ge 0} |V_iCQ^{1/2}|^2\ |Q^{-1/2}x(t)|^2 \\ &= (V_iCQC^TV_i)\max_{t\ge 0}(x^T(t)Q^{-1}x(t)) \\ &\le (V_iCQC^TV_i)\cdot w_{\max}^2 \le \delta_i^2 \end{aligned}$$

다음을 얻는다.

$$\frac{\delta_i^2}{w_{\max}^2} - V_iCQC^TV_i \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta_i^2}{w_{\max}^2} - V_iCQQ^{-1}QC^TV_i \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \Omega_2 \ge 0$$

따라서 (10),(11)을 만족하는 행렬 $Q>0$, Y와 상수 $\alpha>0$가 존재하면 제어기 (12)는 항상 (3)을 만족한다.

2.3 모의실험

위에서 제시된 결과의 유용성을 보이기 위해, 참고문헌 [5]의 경우와 같이 건축물은 6층의 철강빔 구조이고 각층은 동일한 형태이며 지진으로 인한 외란이 작용할 경우를 고려한다. 여기서 1층과 3층에는 지진의 영향으로부터 건물의 흔들림을 최소화하기 위해 능동지지장치(active bracing actuator)가 설치되어 있다. 빌딩은 1차원 지표면 가속도 w를 갖는 지진에 노출된 6차

원의 선형 시스템으로 모델링되며, 이의 운동 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = B_2 u + MB_1 w \qquad (13)$$

여기에서 $q \in R^6$, $q = [q_1, q_2, \ldots, q_6]^T$이며, q_i는 i^{th}번째 층의 층간 흔들림(inter-story drifts)이고, M, C, K는 각각 질량(mass), 감쇠(damping), 강성(stiffness)에 대한 행렬이다. 식(13)을 표준형 상태방정식으로 표시하면 다음의 행렬과 같이 기술된다.

$$A = \begin{bmatrix} 0_{6\times6} & I_{6\times6} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 0_{6\times1} \\ M^{-1}B_1 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0_{6\times2} \\ M^{-1}B_2 \end{bmatrix},\ C = [\, I_{6\times6}\ 0_{6\times6} \,]$$

여기서 변수 x 는 $x \in R^{12} = [q(t)^T\ \dot{q}(t)^T]^T$ 로 표시되며, 각층의 물리적 특성인 질량(m_i)은 345.6[ton], 구조물 강성계수(k_i)는 3.404×10^8[N/m], 감쇠계수 (c_i) 는 2.937×10^5[N · s/m]이다. 또한, 외란으로는 1971년 미국 캘리포니아 샌페르난도 협곡에서 발생한 지진으로써 Pacoima 댐의 지진계에서 관측된 자료를 적용하였다.

각제어 방법들, H_∞, H_2, peak-to-peak에서 일반적으로 제어기의 이득이 커지면 성능이 성능이 좋아짐으로, 이의 해결을 위하여 제어기의 크기가 $KK^T < R$로써 제한된 경우에 대한 시뮬레이션의 결과가 표1이다. 표 1의 결과를 분석하면 층간 흔들림의 량은 피크게인 최소화제어가 가장 적으며, 다음으로는 성능관점의 최적화 방법인 H_2제어이고, 강인성 관점에서 최적화 방법인 H_∞ 제어 순서로 작음을 알 수 있다. 따라서 피크게인 최소화 제어 방법은 지진에 여기된 건축물의 층간 흔들림을 작게 할 수 있는 강인한 제어임을 알 수 있다.

표 1. 동일 바운드에서 제어방법별 건물 층간 흔들림

제어방법	Peak Gain	H_∞	H_2
최소화	min δ_i	min γ	min $\lVert H_2 \rVert$
바운드	$K^TK < R$	$K^TK < R$	$K^TK < R$
층간흔들림 (Drifts)	x1=2.2079	x1=2.4546	x1=2.2139
	x2=1.9746	x2=2.2057	x2=1.9780
	x3=1.6396	x3=1.8530	x3=1.6424
	x4=1.3194	x4=1.5660	x4=1.3239
	x5=0.9505	x5=1.0826	x5=0.9522
	x6=0.4978	x6=0.5681	x6=0.4987

여기서 $R = 10e+11 * \begin{bmatrix} 3.1011 & 0.2859 \\ 0.2859 & 1.7693 \end{bmatrix}$이다.

3. 결론

본 논문에서는 선형시스템에서 외란으로부터 측정 출력까지의 피크이득이 최소가 되도록 하는 제어기 설계에 관한 결과를 행렬부등식 형태로 제시하였다. 제어기는 제시된 행렬부등식의 feasibility를 확인 함으로써 쉽게 구하여 진다. 그리고 유도된 결과를 지진이 외란으로 가해지는 건물의 제어에 적용하여 시뮬레이션한 결과 H_∞ 나 H_2 제어 방법에 비해 피크 최소화 제어방법의 층간 흔들림이 양호하다. 따라서 피크 최소화 제어방법은 간단할 뿐만 아니라 효율적으로 변위량의 크기를 직접 제어할 경우 매우 실용적인 방법이라 할 수 있다.

[참 고 문 헌]

[1] M.Vidyasagar, "Optimal Rejection of Persistent Bounded Disturbances," *IEEE Trans. Auto mat. Contr.*, vol. 31, pp.527-535, 1986

[2] M.A.Dahleh and J.B.Pearson, " l_1 optimal feed back controllers for MIMO discrete-time systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32, pp.314-322, 1987

[3] J.Abedor, K.Nagpal and K.Poolla, "A Linear Inequality Approach to Peak-to-Peak Gain Minimization," *Int J. Robust and Nonlinear Contr.*, vol.6, 899-927, 1996

[4] N.Elia and M.A.Dahleh, "Minimazation of the Worst Case Peat-to-Peak Gain via Dynamic Programming : State Feesback Case," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.45, pp.687-701, 2000

[5] T.Nguyen, F.Jabbari and S.deMiguel, "Controller Designs for Seismic-Excited Buildings with Bounded Actuators," *J.Engrg. Mech.*, vol.124, no. 8, pp. 857-865, 1998

[6] T.Nguyen and F.Jabbari, " Disturbance attenuation for systems with input saturation:An LMI approach.", *IEEE Trans. Automat. Contr.* vol. 44, no. 4, pp. 852 -857, 1999.

[7] J.Geoffrey Chase, Scott E.Breneman and H.Allison Smith, " Robust H_∞ Static output feedback control with actuator saturation.", *J.Engrg. Mech.*, vol. 125, no. 2, 1999.

[8] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V.Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Studies in Applied Mathematics, 1994.

[9] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*. The Math Works Inc., 1995.

[10] 송용희, 김진훈 , " 바운드된 구동기를 갖는 지진에 여기된 빌딩을 위한 H_∞ 제어기 설계 ", 대한전기학회 하계학술대회 논문집, pp. 2277-2279, 2000.