2001년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2001.7.18-20

포화 구동기를 갖는 시간 지연 선형 시스템의 H_∞ 제어기 설계

송 용 희* . 신 의 숙 . 김 진 훈
충북대학교 제어계측공학과

Design of H_∞ Controller for Time Delayed Linear Systems with Saturating Actuators

Yong-Heui Song . Eui-Sook Shin . Jin-Hoon Kim
Dept. of Control and Instrumentation Eng. Chung-buk National University

Abstract - This paper is concerned with the H_∞ controller design of linear systems subject to time-delay in the state and saturating controls. The controller is derived from the matrix inequalities whish are obtained by minimizing the L_2 gain from the disturbance to the measured output, and this can be done by LMI control toolbox. An example is presented to show the usefulness of our result.

1. 서 론

실제 제어 시스템에서 흔히 구동기의 비선형성을 만나게 되는데 이의 대표적인 것으로 포화 특성을 들 수 있다. 또한 대규모 시스템이나 화학 공정과 같은 시스템에는 시간 지연이 있게 마련이다. 이러한 포화 특성과 시간 지연은 시스템의 성능 저하뿐만 아니라 시스템의 안정성까지도 보장하지 못하는 것이 일반적이다.

시간지연 시스템의 안정도 판별은 지연의 크기에 대한 정보의 포함 유무에 따라 크게 시간 지연 종속(time-delay dependent)판별[1][2]과 시간 지연 독립(time-delay independent)판별[3][4]로 나눌 수 있다. 주로 Razumikhin 이론 접근법[2]을 이용하여 해석하는 시간지연 종속 판별은 지연의 크기에 대한 정확한 상한을 얻는데 용이하며, Lyaupunov 안정성 이론 접근법[4]을 이용하는 시간지연 독립판별은 지연의 크기가 불확실할 때 즉, 임의의 지연 크기에 대하여 해석하는데 더욱 유용하다.

포화 구동기를 갖는 시스템의 안정성 및 설계 문제에 관한 연구[5~7]는 Popov의 안정성 정리에 의해 이러한 시스템의 안정성 문제[5]를 다룬 이후, Lyapunov 안정성 정리를 이용한 새로운 안정화되는 제어 방법을 제시함으로써 본격적인 연구가 이루어졌다고 할 수 있다. 최근에는 포화 구동기를 갖는 시스템에 대하여 외란으로부터 출력의 H_∞ 노옴이 주어진 값과 같거나 작아지도록 하는 제어기 설계 방법이 제시되어지고 있다.[7]

포화 구동기를 갖는 시간 지연 선형 시스템에 대해서는 지역적(local)인 방법 혹은 전역적(global)인 방법들이 연구되어졌다.[8~10]

이러한 시스템의 안정화 조건은 Layapunov 함수 혹은 Razumikhin 접근법을 기반으로 한 많은 연구가 이루어졌는데, [8]에서는 Razumikhin 접근법을 이용해 시스템이 안정하도록 하는 시간 지연의 상한을 Riccati 방정식을 사용하여 구했으며, [10]에서는 안정한 제어기를 설계함과 동시에 안정화 문제와 관련된 안정한 초기 조건의 집합을 동시에 구하는 방법이 제시되었다. 제어기와 초기 조건에 대한 집합을 구하는 방법은 행렬 부등식(matrix inequality)의 형태로 주어졌지만 구하는 방법이 복잡하고, 외란이 있는 경우에 대해서는 conservative한 결과를 갖는다.

이에 본 논문에서는 구동기 포화 특성과 바운드된 외란이 있는 시간 지연 선형 시스템에 대해서 외란으로부터 출력까지의 L_2 이득이 주어진 값과 같거나 작아지도록 하는 제어기 설계 문제를 다루도록 하겠다. 설계된 제어기는 행렬 부등식으로 표시된 충분 조건의 feasibility를 확인함으로써 얻어질 수 있다.

2. 문제 기술

다음으로 기술되는 포화 구동기를 갖는 시간 지연 선형 시스템을 고려해 보기로 하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+A_d x(t-\tau)+B_1 w(t)+B_2 SAT(u(t)) \\ z(t) &= Cx(t),\ x(\theta)=0,\ \forall\theta\in[-2\tau,0] \end{aligned} \tag{1}$$

여기에서 $x(t)\in R^n$는 상태이고, $u(t)\in R^m$는 제어를 나타내고 $w(t)\in R^d$는 외란을 나타내며 다음을 만족한다.

$$\int_0^\infty w^T(\theta)w(\theta)d\theta \le w_0 \tag{2}$$

포화 함수는 다음과 같다.

$$SAT(u) = [\,sat(u_1), sat(u_2), \cdots, sat(u_m)]^T$$

$$sat(u_i) = \begin{cases} u_i^{lim}, & \text{if } u_i > u_i^{lim} \\ u_i, & \text{if } |u_i| \le u_i^{lim} \\ -u_i^{lim}, & \text{if } u_i < -u_i^{lim} \end{cases} \tag{3}$$

또한,

$$\phi_i = \begin{cases} \dfrac{sat(u_i)}{u_i}, & u_i \ne 0 \\ 1, & u_i = 0 \end{cases} \tag{4}$$

라하고, $\Phi\in R^{m\times m} = Diag[\phi_i]$ 라 하면 $SAT(u) = \Phi(\phi_i)u$ 가 된다. 따라서 제어 u가 다음과 같이 주어지면,

$$u(t) = Kx(t) \tag{5}$$

시스템(1)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A+B_2\Phi(\phi_i)K)x(t)+A_d x(t-\tau)+B_1 w(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{6}$$

또한

$$|u_i| \le \frac{u_i^{lim}}{r_i},\quad i=1,\ldots,m \tag{7}$$

라 하면 (6)의 시스템은 다음으로 기술된다.

$$\dot{x}(t)=\sum_{j=1}^{2^m}\zeta_j\widehat{A}_jx(t)+A_dx(t-\tau)+B_1w(t)$$
$$\sum_{j=1}^{2^m}\zeta_j=1,\ \zeta_j\geq 0 \tag{8}$$
$$\widehat{A}_j=A+B\Phi_jK,\ j=1,\dots,2^m$$

여기에서 $\Phi_j\in R^{m\times n},\ j=1,\dots 2^m$ 는 구간 행렬(interval matrix) $\mathrm{diag}[[r_1,1],[r_2,1],\dots[r_m,1]]$의 꼭지점 행렬(vertex matrix)이다.

본 논문의 주요 목적은 시스템(1)에 대해 w로부터 출력 z까지의 L_2이득이 γ 보다 크지 않은 즉 , $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}\leq\gamma$ 를 보장하는 상태 궤환 제어기를 구하는 것이다.

다음의 보조정리들은 주요 결과의 증명에 쓰이는 유용한 결과들이다.

<u>보조정리 1</u> : 임의의 양 확정 행렬 X와 임의의 차원을 갖는 벡터 u , v는 다음의 부등식을 만족한다.

$$-2u^Tv\leq u^TXu+v^TX^{-1}v \tag{10}$$

<u>보조정리 2</u> : 다음의 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+A_dx(t-\tau)+B_1w(t)\\ x(\theta)&=0\ ,\ \forall\theta\in[-2\tau,0]\end{aligned} \tag{11}$$

1) 다음을 만족하는 Lyapunov-Krasovskii 함수 $V_s(x,t)=x^TPx+S(x,t)$, $S(x,t)\geq 0$ 가 존재하면

$$\dot{V}_s(x,t)\leq r_0w^Tw \tag{12}$$

다음을 만족한다.

$$x^TPx\leq V_s(x,t)\leq r_0\int_0^t w^T(\theta)w(\theta)d\theta \tag{13}$$

여기에서 $S(x,0)=0$ 이다.

2) 다음의 조건을 만족하는 함수 $V_s(x,t)$,상수 $\beta>0$가 존재하면

$$\frac{dV_s(x,t)}{dt}+\beta(z^Tz-\gamma^2w^Tw)<0 \tag{14}$$

외란 w로부터 출력 z까지의 L_2 이득은 γ보다 크지 않게 된다.

3. 제어기 설계

다음의 정리 1은 제어(5)를 갖는 시스템(1)에 대하여 w 로부터 z 까지의 L_2 이득은 γ보다 크지 않음을 보장하는 제어(5)의 조건을 나타낸다.

<u>정리 1</u> : 다음의 행렬 부등식을 만족하는 행렬 $Y\in R^{m\times n}$와 양 확정 행렬(positive definite matrix) $Q=Q^T\in R^{n\times n}$, $R=R^T\in R^{n\times n}$, $Z=Z^T\in R^{n\times n}$ 그리고 스칼라 $\beta>0$가 존재한다면

i) $$\begin{bmatrix}\Lambda_j & \tau\Pi_j^T & \tau QA_d^T & B_1 & 0\\ \tau\Pi_j & -\tau Q & 0 & 0 & 0\\ \tau A_dQ & 0 & -\tau R & 0 & 0\\ B_1^T & 0 & 0 & -r_0I & \tau B_1^T\\ 0 & 0 & 0 & \tau B_1 & -\tau Z\end{bmatrix}\leq 0 \tag{15}$$
$j=1,\dots,2^m$

ii) $$\begin{bmatrix}\frac{(u_i^{lim})^2}{r_0w_0} & r_iY_i^T\\ r_iY_i & Q\end{bmatrix}\geq 0,\ i=1,\dots,m \tag{16}$$

iii) $$\begin{bmatrix}\Lambda_j & \tau\Pi_j^T & \tau QA_d^T & QC^T & B_1 & 0\\ \tau\Pi_j & -\tau Q & 0 & 0 & 0 & 0\\ \tau A_dQ & 0 & -\tau R & 0 & 0 & 0\\ CQ & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} & 0 & 0\\ B_1^T & 0 & 0 & 0 & -\beta\gamma^2I & \tau B_1^T\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau B_1 & -\tau Z\end{bmatrix}\leq 0 \tag{17}$$
$j=1,\dots,2^m$

다음의 상태 궤환 제어기는

$$u(t)=Kx(t)\ ;\ K=YQ^{-1}$$

시스템 (1)의 w로부터 z까지의 L_2이득이 γ보다 크지 않게 됨을 보장한다.

여기에서 Π_j, Λ_j는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Pi_j&=AQ+B_2\Phi_jY\\ \Lambda_j&=QA^T+AQ+Y^T\Phi_jB_2^T+B_2\Phi_jY+QA_d^T+A_dQ\\ &\quad+\tau A_dQA_d^T+\tau A_dRA_d^T+\tau A_dZA_d^T\end{aligned} \tag{18}$$

<u>증명</u> : 정리1의 식(15)에 대한 증명부터 보이기로 한다. 보조정리3의 1)을 만족하는 함수 $V_s(x,t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}V_s(x,t)=x^TPx&+\int_{-\tau}^0\int_{t+\delta}^t x(\theta)^T\widehat{A}_j^TQ^{-1}\widehat{A}_jx(\theta)d\theta d\delta\\ &+\int_{-\tau}^0\int_{t+\delta-\tau}^t x(\theta)^TA_d^TR^{-1}A_dx(\theta)d\theta d\delta\\ &+\int_{-\tau}^0\int_{t+\delta}^t w(\theta)^TB_2^TZ^{-1}B_2w(\theta)d\theta d\delta\end{aligned} \tag{19}$$

다음으로 시스템 (6)의 궤적에 따른 시간 미분은 보조정리1을 사용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{V}_s(x,t)&=\sum_{j=1}^{2^m}\zeta_j[x(t)^T\Psi x(t)+2x^T(t)PB_1w(t)\\ &\quad+\tau w^T(t)B_1^TZ^{-1}B_1w(t)]\\ \Psi&=(\widehat{A}_j+A_d)^TP+P(\widehat{A}_j+A_d)+\tau\widehat{A}_j^TQ^{-1}\widehat{A}_j\\ &\quad+\tau A_d^TR^{-1}A_d+\tau PA_dQA_d^TP\\ &\quad+\tau PA_dRA_d^TP+\tau PA_dZA_d^TP\end{aligned} \tag{20}$$

그러므로, 식(12)을 만족하도록 하는 조건을 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&x^T(t)\Psi x(t)+2x^T(t)PB_1w(t)+\tau w^T(t)B_1^TZ^{-1}B_1w(t)\\ &\qquad\leq r_0w^T(t)w(t)\end{aligned} \tag{21}$$

$$\Leftrightarrow\ [\,x^T(t)\ \ w^T(t)\,]\begin{bmatrix}\Psi & PB_1\\ B_1^TP & (\tau B_1^TZ^{-1}B_1-r_0I)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ w(t)\end{bmatrix}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}\Psi & PB_1\\ B_1^TP & (\tau B_1^TZ^{-1}B_1-r_0I)\end{bmatrix}\leq 0$$

위의 식을 Schur complement[11]를 사용하여 정리함으로써 식 (15)의 행렬 부등식을 얻는다.

다음으로 정리1의 조건 식(16)을 얻기 위해 먼저 $K=YQ^{-1}$라하고 다음의 두 조건을

$$V(x)=x^TPx\le r_0w_0$$
$$|u(t)|=|Kx(t)|\le\left|\frac{u_i^{lim}}{r_i}\right| \qquad (22)$$

만족하는 제어 u(t)의 상한을 구해보면 다음과 같다.

$$|YQ^Tx(t)|^2\le\left(\frac{u_i^{lim}}{r_i}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\ Y^TQYr_0w_0\le\left(\frac{u_i^{lim}}{r_i}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{(u_i^{lim})^2}{r_0w_0}-r_i^2Y^TQY\ge 0$$

따라서 Schur complement를 사용함으로써 식(16)의 행렬 부등식을 얻는다.

끝으로 정리1의 조건 식(17)은 식(20)에서 얻어진 $\dot{V}_s(x,t)$와 보조 정리3의 2)조건을 만족하도록 함으로써 얻어질 수가 있다.

$$x^T(t)(\Psi+\beta C^TC)x(t)+2x^T(t)PB_1w(t) + w^T(t)(\tau B_1^TZ^{-1}B_1-\beta\gamma^2I)w(t)\le 0$$

$$\Leftrightarrow\ [\,x^T(t)\ \ w^T(t)]\begin{bmatrix}\Psi+\beta C^TC & PB_1\\ B_1^TP & (\tau B_1^TZ^{-1}B_1-\beta\gamma^2I)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ w(t)\end{bmatrix}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\Psi+\beta C^TC & PB_1\\ B_1^TP & (\tau B_1^TZ^{-1}B_1-\beta\gamma^2I)\end{bmatrix}\le 0 \qquad (23)$$

위의 식(23)을 정리함으로써 (17)의 행렬 부등식을 유도할 수 있다.

따라서, 행렬 부등식 (15),(16),(17)을 만족하는 행렬 Y,Q,R,Z와 스칼라 β가 존재하면,

$$\text{i)}\quad x^TPx\le r_0w_0$$
$$\text{ii)}\quad |K_ix|\le\frac{u_i^{lim}}{r_i}$$

를 만족하고, 끝으로 $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}\le\gamma$를 만족한다. ■■■

4. 모의 실험

본 절에서는 앞 절에서 제시된 결과의 유용성을 보이기 위하여 다음과 같은 시스템을 고려해 본다.

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0&0\\0.1&0.1\end{bmatrix}x(t-\tau) +\begin{bmatrix}0.1\\0.1\end{bmatrix}w(t)+\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}SAT(u(t))$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}x(t)$$

표1.은 시간 지연 τ가 고정된 경우에 대해 u^{lim}의 크기에 따른 L_2이득 γ 그리고 제어 이득 K를 보여준다. 또한, 표2.에서는 τ, u^{lim}가 고정되어 있는 시스템에 대해 r_1 의 값에 따른 γ, K를 보여 준다.

표1. u^{lim}에 따른 γ, K($r_0=w_0=1, r_1=0.2, \tau=0.1$)

	$u^{lim}=5$	$u^{lim}=10$	$u^{lim}=15$
γ	0.1250	0.0801	0.0747
K	$\begin{bmatrix}-1.06&-11.13\\-3.49&-6.41\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4.82&-14.42\\-4.17&-7.95\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.97&-8.86\\-5.71&-7.90\end{bmatrix}$

표2. r_1에 따른 γ, K($w_0=r_0=1, u^{lim}=15, \tau=0.1$)

	$r_1=0.1$	$r_1=0.2$	$r_1=1$
γ	0.3838	0.0747	0.0292
K	$\begin{bmatrix}9.90&-14.19\\-14.09&-4.34\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.97&-8.86\\-5.71&-7.90\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2.82&-6.05\\-4.03&-4.87\end{bmatrix}$

5. 결 론

포화 구동기를 갖는 시간 지연 선형 시스템에서의 안정성은 구동기의 포화 비선형성과 시간 지연으로 인해 시스템의 성능 저하뿐만 아니라 안정성까지도 보장하지 못하게 된다.

따라서, 본 논문에서는 외란으로부터 출력까지의 L_2이득이 γ 보다 같거나 작아지도록 하는 H_∞ 제어기를 설계하였다. 주어진 조건은 선형 행렬 부등식의 형태로 주어졌으며, 모의 실험을 통해 제시된 방법의 유용성을 보였다.

[참 고 문 헌]

[1] T. Mori and H. Kokame , " Stability of $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)$ " , *IEEE Trans. Auto. Control*, vol.34, no.4, pp.460-462,1989

[2] E. Cheres , S. Gutman and Z. J. Palmor, " Stabilization of Uncertain Dynamic Systems Including State Delay " , IEEE Trans. Auto. Control , vol.39, no. 4, pp.807-810, 1994

[3] E. Cheres , Z. J. Palmor and S. Gutman , " Quantitative Measure of Robustness for Systems Including Delayed Perturbations", *IEEE Trans. Auto. Control*, vol.34, no.11, pp.1203-1204, 1989

[4] J. H. Kim, "Robust Stability of Linear Systems with Delayed Perturbations", *IEEE Trans. Auto. Control*, vol.41 , no.12 , pp.1820-1822, 1966

[5] R. L. Kosut, " Design of Linear Systems with Saturating linear control and bounded states", *IEEE Trans. Auto. Control*, vol.28, no.1, pp.121-124, 1983

[6] T. Nguyen, F. Jabbari and S. de Miguel , " Disturbance attenuation for systems with input saturation : An LMI approach", *IEEE Trans. Auto. Control*, vol.44, no.4, pp.852-857, 1999

[7] 조현철, 김진훈, " 포화 구동기를 갖는 선형 시스템의 H_∞ 제어기 설계", *대한전기학회 추계학술대회 논문집 B권*, pp.494-496, 1999

[8] S. I. Niculescu, J. M. Dion nad L. Dugard, " Robust Stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators", *IEEE Trans. Auto. Control*, vol.41, no.5, pp.742-747, 1996

[9] B. S. Chen, S. S. Wang and H. C. Lu, " Stabilization of time-delay systems containing saturating actuators", *Int. J. Control*. vol.47, pp.867 -881, 1988

[10] S. Tarbouriech, P. L. D. Peres, G. Garcia and I. Queinnec, " Delay-dependent stabilization of time-delay systems with saturating actuators ", *in Proc. 39th IEEE-CDC, Sydney, Dec. 2000*, pp.3248-3253

[11] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994