

글린트 잡음에 대한 확장 강인  $H_\infty$  필터 설계

곽기석\*, 신종구\*, 윤태성\*\*, 박진배\*

\*연세대학교 전기 및 컴퓨터공학과, \*\*창원대학교 전기공학과

The Design of Extended Robust  $H_\infty$  Filter for Glint Noise

Ki Seok Kwak\*, Jong Gu Shin\*, Tae Sung Yoon\*\*, Jin Bae Park\*

\*Dept. of Electrical & Computer Engineering, Yonsei Univ.

\*\*Dept. of Electrical Engineering, Changwon National Univ.

**Abstract** - In a target tracking problem, the radar glint noise has non-Gaussian heavy-tailed distribution and will seriously affect the target tracking performance. In this study, an extended robust  $H_\infty$  filter was developed which can significantly improve the tracking performance when glint noise is present. Through the computer simulations, the proposed filter showed superior and robust tracking performance compared with other extended Kalman filters.

1. 서 론

표적 추적에 있어서 표적의 글린트(glint) 특성 때문에 측정 방정식의 잡음이 가우시안 분포를 가지지 않는다. 이것을 글린트 잡음이라 하는데 이 글린트 잡음은 관측 잡음이 가우시안 분포를 가지지 않는 경우 즉 글린트 잡음일 경우 제곱근 오차에 의해 추정을 하는 방법에서는 상당한 성능 저하의 원인이 된다[1]. 칼만 필터는 시스템이 비선형이고 잡음이 가우시안 분포를 가지지 않는 경우 그 성능을 보장하지 못한다. 많은 연구자들은 가우시안 분포가 아닌 잡음에 대해 강인한 칼만 필터에 대한 연구를 해왔고[2], 그 중에서 가장 우수한 성능을 보인 것은 Masreliez에 의해 제안된 필터이다[3][4]. 또한 정확한 글린트 잡음의 모델링을 통하여 가우시안 분포를 가지지 않는 경우의 최적의 필터링 방법에 대해서 많은 연구가 이루어져 왔다. Masreliez는 상태 추정의 수정 부분으로 비선형 스코어 함수를 제안하였다. 그러나 이러한 방법은 스코어 함수를 만들어내는 과정에서 컨볼루션(convolution)을 적용하는데 어려움이 있다. 이는 실제 적용분야에서 많은 어려움을 일으킨다. 이러한 어려움을 Wu와 Kundu에 의해 최근에 해결되었다[5]. Wu와 Kundu가 제안한 방법은 스코어 함수를 전개하여 고차항을 버리는 방법으로 스코어 함수를 관측 예측 밀도의 몇 개의 항으로 줄일 수 있다. 그러나 이러한 방법은 스코어 함수를 전개하면서 고차항을 버리는 부분에서 오차를 발생시킨다. 표적 추적에 있어서 이러한 오차는 상당한 성능 저하를 야기시킨다.

본 논문에서는 이러한 스코어 함수를 사용하지 않고 크라인(Krein)공간에서의 확장 강인 칼만 필터[6]와 동일한 개념으로 확장 강인  $H_\infty$  필터를 유도하고 이를 글린트 잡음이 있는 표적추적 문제에 적용하여 성능 분석을 하였다. 크라인 공간에서 유도한 확장 강인  $H_\infty$  필터는 기존의 스코어 함수를 사용하여 제안한 필터보다 실제 적용하는데 어려움이 없고 그 성능 면에서도 상당한 강인하고 안정적인 성능을 보여준다. 본 연구의 모의 실험에서는 기존의 확장 강인 칼만 필터와 본 논문에서 제시한 확장 강인  $H_\infty$  필터의 성능을 비교하여 글린트 잡음을 가지는 경우에 확장 강인 칼만 필터보다 본 논문에서

제시한 확장 강인  $H_\infty$  필터가 우수한 추적 성능을 보인다는 것을 입증하기로 한다.

2. 본 론

2.1 글린트 잡음

표적 시스템에서 표적의 글린트 특성 때문에 측정 방정식의 잡음이 가우시안으로 표현되지 않는다. 이것을 글린트 잡음이라 한다. 일반적으로 글린트 잡음의 형태는 그림 2.1과 유사한 형태이다. 그림 2.2와 같은 확률밀도분포를 갖는 글린트 잡음은 가우시안 분포에 비해 양단에서 더 두껍고 긴(heavy-tailed) 분포를 가지고 있는 것을 볼 수 있다. 글린트 잡음은 여러 접근 방법에 의해 모델링 되어 왔다. 그 중에서 실험적 접근 방법으로 글린트 잡음을 모델링한 것이 가장 글린트 잡음의 성격을 잘 표현하고 있다. 실험적 접근 방법에 의하면[6] 글린트 잡음이 적당한 분산을 가지는 가우시안 잡음과 매우 큰 분산을 가지는 가우시안 잡음의 혼합으로 모델링된다는 것을 보여주고 있다. 또한, Wu[5]는 글린트 잡음이 발생확률이 높은 가우시안 잡음과 발생확률이 적은 라플라시안 잡음의 혼합으로 모델링된다는 것을 제시하였다. 글린트 잡음의 확률 밀도 함수는 다음 식과 같다.

$$f(v) = (1 - \epsilon)f_g(v) + \epsilon f_l(v)$$

여기서,  $\epsilon$ 는 라플라시안 잡음이 발생할 수 있는 확률을 의미하고,  $g, l$ 은 각각 가우시안과 라플라시안을 의미한다. 그리고,  $f_g(v)$ 와  $f_l(v)$ 는 각각 가우시안과 라플라시안 확률밀도함수로서 다음 식과 같이 표현된다.

$$\begin{pmatrix} f_g(v) \\ f_l(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_g} \left( \exp -\frac{v^2}{2\sigma_g^2} \right) \\ \frac{1}{2\eta} \left( \exp -\frac{|v|}{\eta} \right) \end{pmatrix}$$

라플라시안 변수  $\eta$ 는 라플라시안 분산  $\sigma_l^2$ 과 관련이 있다. 즉  $2\eta^2 = \sigma_l^2$ 이라는 관계가 성립한다. 본 논문에서는 제시하는 확장 강인  $H_\infty$  필터에 위와 같은 성질을 갖는 글린트 잡음을 사용하였다.

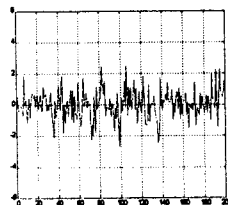


그림 2.1 글린트 잡음

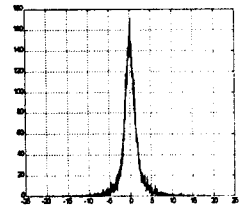


그림 2.2 글린트 잡음분포

## 2.2 확장 강인 \$H\_\infty\$ 필터

다음과 같은 불확실성을 포함하는 선형화된 시스템을 생각해보자.

$$\begin{cases} x_{j+1} = F_j x_j + \tilde{G}_j \tilde{u}_j + p_j \\ y_j = H_j x_j + \tilde{v}_j + q_j \\ s_j = K_j x_j + r_j \\ z_j = L_j x_j \end{cases} \quad (1)$$

여기서, \$\tilde{u}\_j, \tilde{v}\_j\$ 는 불확실성을 포함하고 에너지 제한을 가지는 잡음이고, \$z\_j\$ 는 추정되어지는 임의의 상태들의 선형조합을 나타낸다. \$\tilde{v}\_j\$ 을 필터 추정치로 가정을 한다면 필터의 추정 오차는 다음과 같이 정의가 된다.

$$e_j = \tilde{v}_j - z_j$$

스칼라 \$\gamma > 0\$ 가 주어진다면 확장 강인 \$H\_\infty\$ 문제는 다음 식을 만족시키는 필터 추정치 \$\tilde{v}\_j\$ 를 구하는 문제라고 볼 수 있다.

$$\|T_i(F)\|_\infty^2 = \sup$$

$$\frac{\sum_{j=0}^i e_j^* e_j}{(x_0 - \hat{x}_0)^* \Pi_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) + \sum_{j=0}^i \tilde{u}_j^* \tilde{u}_j + \sum_{j=0}^i \tilde{v}_j^* \tilde{v}_j} < \gamma^2$$

여기서, \$T\_i(F)\$ 는 전달 행렬(transfer matrix)을 의미한다. 실제 에너지 제한값 \$\epsilon\$ 을 이용하여 비선형 시스템 (1)은 다음의 에너지제한조건을 만족한다고 할 수 있다.

$$J_1(x_0, \tilde{u}, y) = (x_0 - \hat{x}_0)^* \Pi_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) + \sum_{j=0}^i \tilde{u}_j^* Q_j^{-1} \tilde{u}_j + \sum_{j=0}^i \left( \begin{bmatrix} y_j - q_j \\ 0 - r_j \\ z_{j+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_j \\ K_j \\ L_j \end{bmatrix} x_j \right)^* R_{x,j} \left( \begin{bmatrix} y_j - q_j \\ 0 - r_j \\ z_{j+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_j \\ K_j \\ L_j \end{bmatrix} x_j \right) \leq \epsilon \quad (2)$$

여기서, \$R\_{x,j} = \text{diag}(\tilde{R}\_j, -I, -\gamma^2 I)\$ 이다. 그러면, 위의 부등식 (2)로부터 결정적 최소화 문제를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\min_y J_2(x_0, \tilde{u}, y) \leq \epsilon \quad (3)$$

식 (3)과같은 힐버트(Hilbert)공간에서의 \$J\_2(x\_0, \tilde{u}, y)\$ 의 결정적 최소화 문제의 해는 크라인 공간에서 순환적인(recursive) 사영을 이용하여 구할 수 있다. 단, 이 문제의 해를 얻기 위해서는 두 가지의 조건이 필요하다.

그 첫 번째 조건은 \$J\_1(x\_0, \tilde{u}, y) (\min J\_2 = \min J\_1, \kappa > 0)\$ 이 양의 값을 가져야 한다. 또한 두 번째 조건은 최소화 조건이다.

확장 강인 \$H\_\infty\$ 필터링 문제에 대한 크라인 공간 상태 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{cases} x_{j+1} = F_j x_j + \tilde{G}_j \tilde{u}_j + p_j \\ \begin{bmatrix} y_j \\ 0 \\ \vdots \\ z_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_j \\ K_j \\ L_j \end{bmatrix} x_j + \tilde{v}_j + \begin{bmatrix} q_j \\ r_j \\ 0 \end{bmatrix} \\ s_j = K_j x_j + r_j \end{cases} \quad (4)$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ \tilde{u}_j \\ \tilde{v}_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ \tilde{u}_j \\ \tilde{v}_j \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_j & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} \tilde{R}_j & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \delta_{jk} \quad (5)$$

그러면, 확장 강인 \$H\_\infty\$ 필터 식과 의 최소화 조건은 각

각 다음 정리 2.1과 2.2와 같이 나타낼 수 있다.

정리 2.1(확장 강인 \$H\_\infty\$ 필터) 확장 강인 \$H\_\infty\$ 필터 식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} &= \hat{x}_i + K_f^{-1} P_{i+1} K_i k_i \left( \hat{x}_{i+1} \right) \\ K_f^{-1} P_{i+1} H_i^* R_i^{-1} & \left( y_i - h_i \left( \hat{x}_{i+1} \right) \right) \end{aligned}$$

여기서,

$$\tilde{K}_f = (I + \gamma^{-2} P_{i+1} L_{i+1}^* L_{i+1})$$

$$\hat{x}_{i+1|i} = f_i \left( \hat{x}_{i|i} \right)$$

그리고, \$P\_{i|i-1}\$ 은 다음의 리카티 방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned} P_{i+1|i+1}^{-1} &= P_{i+1|i}^{-1} + H_{i+1}^* R_{i+1}^{-1} H_{i+1} \\ &\quad - K_{i+1}^* K_{i+1} - \frac{1}{\gamma^2} L_{i+1}^* L_{i+1} \\ P_{i+1|i} &= F_i P_{i|i} F_i^* + \tilde{G}_i \tilde{Q}_i \tilde{G}_i^* \end{aligned}$$

정리 2.2 (최소화 조건) \$\Pi\_0 > 0, \tilde{Q}\_j > 0\$ 및 \$\tilde{R}\_j\$ 의 역행렬이 존재하고, \$[F\_j, \tilde{G}\_j]\$ 가 모든 \$j\$ 에 대하여 완전하게 독립되어 있다면(full rank를 갖는다면), 비용 함수 \$J\_2(x\_0, \tilde{u}, y)\$ 는 다음 조건을 만족한다면 유일한 최소값을 갖는다.

$$\begin{aligned} P_{j+1} &= P_{j+1} + H_j^* R_j^{-1} H_j \\ &\quad - K_j^* K_j - \gamma^2 L_j^* L_j > 0, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

## 2.3 모의 실험 및 결과

모의 실험에서 사용된 불확정 접근 탄도 미사일 추적 시스템에 대한 비선형 상태 방정식의 형태는 다음 식과 같으며(6),

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= f_j(x_j) + E_{1j} \Delta_j k_j(x_j) + g_j(x_j) u_j \\ y_j &= h_j(x_j) + E_{2j} \Delta_j k_j(x_j) + v_j \end{aligned} \quad \text{여기서, } \|\Delta_j\| \leq 1$$

위 식을 선형화 시키면 다음 식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= F_j x_j + E_{1j} \Delta_j K_j x_j + G_j u_j + p_j + r_j \\ y_j &= H_j x_j + E_{2j} \Delta_j K_j x_j + v_j + q_j \end{aligned}$$

$$F_j = \frac{\partial f_j(x)}{\partial x} \Big|_{x = \hat{x}_{j|j}}, \quad G_j = g_j \left( \hat{x}_{j|j-1} \right)$$

$$H_j = \frac{\partial h_j(x)}{\partial x} \Big|_{x = \hat{x}_{j|j-1}}, \quad K_j = \frac{\partial k_j(x)}{\partial x} \Big|_{x = \hat{x}_{j|j-1}}$$

$$\begin{aligned} p_j &= f_j \left( \hat{x}_{j|j} \right) - F_j \hat{x}_{j|j}, \quad q_j = h_j \left( \hat{x}_{j|j-1} \right) - H_j \hat{x}_{j|j-1} \\ r_j &= k_j \left( \hat{x}_{j|j-1} \right) - K_j \hat{x}_{j|j-1} \end{aligned}$$

이 식을 식 (4)의 크라인 공간 상태방정식과 비교해 보면 다음 관계가 성립된다.

$$\tilde{u}_j = [u_j \ \xi_j]^*, \quad \tilde{v}_j = v_j + E_{2j} \xi_j, \quad \tilde{Q}_j = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 2I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}_j = (I + 2E_{2j} E_{2j}^*), \quad \xi_j = \Delta_j K_j x_j, \quad \tilde{G}_j = G_j$$

확장 강인 \$H\_\infty\$ 필터의 실험조건은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\text{-position} \\ y\text{-position} \\ z\text{-position} \\ x\text{-velocity} \\ y\text{-velocity} \\ z\text{-velocity} \\ \text{atmospheric density} \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 7.2 \times 10^5 \\ 7.2 \times 10^5 \\ 6.1 \times 10^5 \\ -1.7 \times 10^4 \\ -1.6 \times 10^4 \\ -8.1 \times 10^3 \\ 5 \times 10^{-10} \end{bmatrix}$$

$$P_0 = 5 \times \text{diag} \{ P_0^{11}, P_0^{22}, P_0^{33}, P_0^{44}, P_0^{55}, P_0^{66}, P_0^{77} \}$$

여기서, \$E \begin{bmatrix} \hat{x}\_0 & \hat{x}\_0 \end{bmatrix} = [P\_0]\_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 7\$

$$Q_j = \frac{1}{j+1} \text{diag}(0, 0, 0, 100, 100, 100, 2 \times 10^{-18})$$

$$R_j = \text{diag}(36, 64, 25), \quad \gamma = 0.15$$

$$L = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0], \quad E_{2j} A_j K_j = 0$$

본 논문에서 사용한 레이더의 종류는 위상 배열레이더이고 선형화된 측정 행렬은 다음과 같다.

$$H_j^T = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{r_j} & \frac{x_2}{r_j} & \frac{x_3}{r_j} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r_j} - \frac{x_1^2}{(r_j)^3} & -\frac{x_1 x_2}{(r_j)^3} & -\frac{x_1 x_3}{(r_j)^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x_1 x_2}{(r_j)^3} & \frac{1}{r_j} - \frac{x_2^2}{(r_j)^3} & -\frac{x_2 x_3}{(r_j)^3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_j = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

일반적으로 글린트 잡음은 가우시안 잡음과 라플라시안 잡음의 조합으로 구성되어 있다. 그래서 본 실험에서는 가우시안 잡음과 라플라시안 잡음의 발생확률을 6 : 4의 비율로 조합하여 모델링한 글린트 잡음은 모의 실험에 사용하였다. 그림 3의 모의 실험 결과에서 보듯이 확장 칼만 필터는 글린트 잡음에 대해 좋은 성능을 보여주지 못하고 있다. 즉 확장 칼만 필터는 글린트 잡음에 대해서는 강인하고 우수한 성능을 보장하지 못한다는 것을 실험 결과로 확인하였다. 그러나, 글린트 잡음의 분산이 작은 경우에는 확장 강인 칼만 필터가 확장 강인  $H_\infty$  필터와 거의 성능이 비슷한 것을 볼 수 있다. 즉, 확장 강인 칼만 필터는 글린트 잡음의 분산이 작은 경우 잡음을 불확실성으로 고려하여 우수한 성능을 보장하는 것이라고 할 수 있다. 그림 4는 분산이 큰 글린트 잡음에 대한 모의 실험 결과인데 이 실험을 통해서 글린트 잡음의 분산이 큰 경우에는 확장 강인 칼만 필터가 분산이 작은 경우처럼 확장 강인  $H_\infty$  필터와 동일한 성능을 보장하지 못한다. 그러나 본 논문에서 제시한 확장 강인  $H_\infty$  필터는 글린트 잡음의 분산이 적은 경우나 큰 경우나 매우 좋은 성능을 보장하고 있다는 것을 모의 실험결과에서

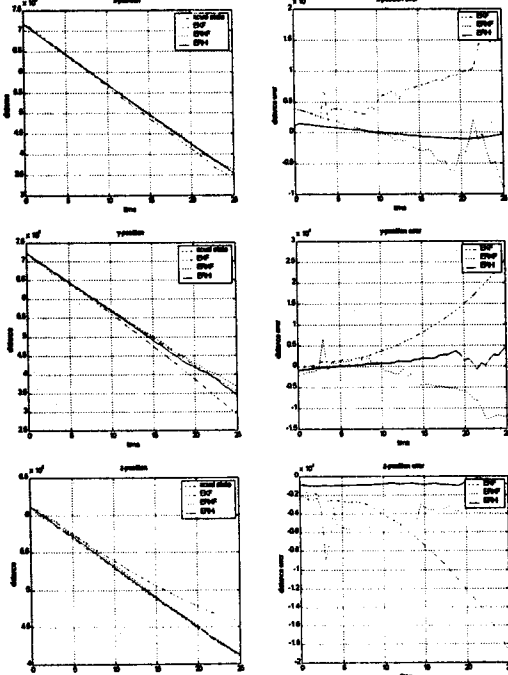


그림 3. 글린트 잡음을 가지는 확장 강인  $H_\infty$  필터 모의 실험결과

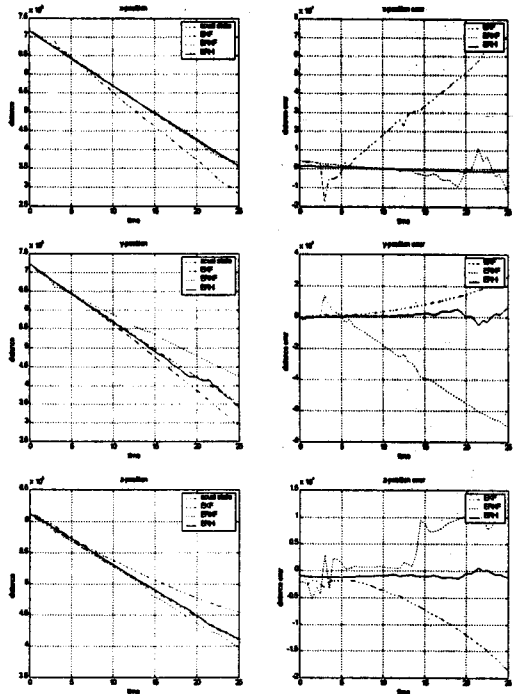


그림 4. 매우 큰 분산을 갖는 글린트 잡음에 대한 확장 강인  $H_\infty$  필터 모의 실험결과

입증하였다.

### 3. 결 론

잡음에 대한 표적 추적 문제에 있어서는 아직까지 확장 강인 칼만 필터가 좋은 성능을 보여주고 있지는 않다. 본 논문에서는 가우시안 잡음과 라플라시안 잡음이 확률적으로 조합된 형태로 글린트 잡음을 모델링하여 보다 실제 표적 추적 문제에 근접하게 모의 실험을 하였다. 모의 실험 결과 본 논문에서 제시한 확장 강인  $H_\infty$  필터를 이용한 글린트 잡음에 대한 표적 추적 성능이 확장 강인 칼만 필터의 경우 보다 우수하다는 것을 알 수 있었다.

본 논문은 2001년 두뇌한국21 사업에 의해서 지원되었음.

### [참 고 문 헌]

- [1] Masreliez, C. J. and Martin, R. R., "Robust Bayesian estimation for the linear model and robustifying the Kalman filter", IEEE Trans. Auto. Contr. AC-22, pp. 361-371, 1977
- [2] Sorenson, H. W. and Stubberud, A. R., "Non-linear filtering by approximation of the a posteriori density", International Journal of Control, Vol. 18, pp. 33-51, 1968
- [3] Masreliez, C. J., "Robust recursive estimation and filtering", Ph. D. dissertation University of Washington, Seattle, 1972
- [4] Masreliez, C. J., "Approximation Non-Gaussian with linear state and observation relations", IEEE Auto. Contr. AC-20, pp. 107-110, 1975
- [5] Wu, W., "Target tracking with glint noise", IEEE Aero. Electro. Sys., Vol. 29, No. 1, pp. 174-185, 1
- [6] Ra, W. S., "A unified Approach to Robust using the Krein Space Estimation Theory", M. D. Dissertation, Yonsei Unvi., 2000