2001년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2001.7.18-20

단일 입출력 비선형시스템의 특이점의 성질에 관한 연구

진주화, 조성일, 정수열, 서중언, 신동호
삼성전자 디지털미디어총괄 디지털미디어연구소 고밀도기록기기팀

On Singularities of SISO Nonlinear Systems

Juwha Jin, Seong-Il Cho, Soo-Yul Jung, Joong-Eon Seo, Dong-Ho Shin
High Density Recording System Team, Digital Media R&D Center, Samsung Electronics Co.

Abstract - 시스템을 입력과 출력간의 함수관계로 볼 때 출력에 대한 상대차수가 정의되지 않는 점을 특이점이라고 정의할 수 있다. 본 논문에서는 적절한 기하학적 조건을 만족하는 해석적인 시스템(analytic system)에 대하여 그러한 특이점의 성질을 살펴본다. 특이점을 지나는 궤적은 특이점의 특이도와 그에 관련된 함수 값의 부호에 의해서 특이점의 주변에서는 특이 매니폴드를 기준으로 한 영역에서 나머지 다른 영역으로 통과하거나 혹은 그를 기준으로 어느 한 쪽의 영역에만 머물러 있게 됨을 보임으로써 특이점과 이를 지나는 궤적의 상관관계를 명확히 규명하였다.

1. 서 론

시스템을 입력과 출력사이의 대응관계로 생각한다면 어떤 상태에서는 입출력간의 일대일 대응관계가 성립하지 않는 경우가 있다. 그러한 상태값을 시스템의 특이점으로 정의할 수 있다. 시스템이 특이점을 가질 때 이를 다루는 문제는 쉽지 않다. 즉 특이점을 갖는 시스템을 제어하는데 있어서 시스템의 궤적이 특이점을 통과하여 진행할 수 있도록 하기 위해서는 특이점의 성질에 대한 이해가 선행되어야한다. 왜냐하면 많은 경우에 특이점에서는 입력이 시스템의 동작을 유일하게 결정하지 못하기 때문이다. 특이점의 집합을 특이매니폴드로 정의할 때, 특이매니폴드는 일반적으로 차수가 하나 적은 부매니폴드이며 또한 시스템이 정의된 영역을 두 부분으로 나누는 매니폴드이다. 따라서 전역적으로 시스템의 궤적을 이동시키기 위해서는 반드시 특이점을 지날 수 있어야하고 특이점 근처에서 시스템 궤적의 행태에 대한 연구가 필요하다. Hirschorn등이 정의한 특이도는 시스템이 고정되면 변하지 않는 성질이다.([1],[2]) 따라서 특이점을 지나는 궤적의 진행방향을 특이점에서의 특이도와 관련시키는 것은 자연스런 추론이라 할 수 있다. 본 논문은 다음의 순서로 이루어져 있다. 먼저 2.1절에서 논문의 전개에 필요한 정의를 요약하고, 정의된 특이점들을 적절한 기준에 의해 2.2절에서 세분화한다. 2.3절에서는 이를 이용하여 특이점을 통과하는 궤적의 진행방향은 특이점에서의 특이도와 그와 관련된 함수값의 부호에 의해 유일하게 결정됨을 언급한 후 마지막으로 3장에서 그 내용을 간단히 요약하며 끝맺는다.

2. 본 론

2.1 필요한 정의들

다음의 단일입출력 비선형시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u, \ x(0) = x_0 \in R^n \\ y &= h(x(t)) \end{aligned}$$

여기서 f, g는 R^n상의 C^∞ 벡터필드, h는 R^∞에서 R로의 C^∞ 함수이고, u는 $[0,\infty)$에서 R로의 연속함수이다.

정의 2.1

상대차수 α는 다음의 두 조건을 만족하는 가장 작은 정수로 정의된다.

i) $k=0,\cdots,\alpha-2$경우에 모든 x에서 $L_g L_f^k h(x)=0$ 이다.

ii) $L_g L_f^{\alpha-1} \neq 0$인 x가 존재한다.■

정의 2.2

$L_g L_f^{\alpha-1} h(x_s)=0$ 인 x_s를 특이점이라고 하고 특이점의 집합을 특이매니폴드로 정의한다.■

특이도를 정의하기 위하여 시스템의 출력 y를 재귀적으로 미분하면

$$y^{(\alpha+k)} = a_k(x, u^k) + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} b_j(x, u^j) u^{k-j}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

이 된다. 이때,

$$\begin{aligned} a_k(x(t), u^k(t)) &= \frac{d}{dt} a_{k-1}(x(t), u^{k-1}(t)), \\ b_k(x(t), u^k(t)) &= \frac{d}{dt} b_{k-1}(x(t), u^{k-1}(t)), \\ a_0(\cdot) &= a(x(t)), \ b_0(\cdot) = b(x(t)) \end{aligned}$$

이고 $u^k = (u\, u^{(1)} \cdots u^{(k-1)}) \in R^k$ 이다. 이를 이용하여 다음 정의에서 특이도를 정의한다.

정의 2.3

R^n상의 임의의 상태점 x에서 $u^k \to b_k(x, u^k)$ 가 영함수가 아닌 가장 작은 정수를 x에 대한 특이도 $\beta(x)$로 정의한다.■

본 논문에서 다루는 대상 시스템은 다음으로 한정한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_2\, x_3 \cdots x_n\, a(x))^T \\ g(x) &= (0\, 0 \cdots b(x))^T \\ h(x) &= x_1 \end{aligned}$$

즉,

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ a(x) + b(x)u \end{pmatrix}, \ x(0) = x_0, \ x \in R^n$$

$$y = x_1.$$

의 형태를 갖는 시스템을 고려한다.

2.2 특이점들의 분류

일반적으로 특이매니폴드는 $b(x)$의 부호에 의해 R^n을 둘로 나누는 부매니폴드이므로 시스템이 정의되는 공간을 특이도 β와 $b_\beta(\cdot)$의 부호에 의해 세분화할 수 있다.

$$\begin{aligned} b_{i0}(x) &= L_f^i b(x), \quad i=1,2,\cdots \\ S^{0+}(S^{0-}) &= \{x \in R^n | b(x) > (<) 0\}, \\ S^{00} &= \{x \in R^n | b(x) = 0\} = S. \end{aligned}$$

라 놓고 다음의 매니폴드를 정의한다.

$$\begin{aligned} S^{i+(-)} &= \{x \in S^{(i-1)0} | b_{i0}(x) > (<) 0\} \\ &= \{x \in R^n | b_{k0}(x) = 0,\ k=0,\cdots,i-1,\ b_{i0}(x) > (<) 0\} \\ S^{i0} &= \{x \in S^{(i-1)0} | b_{i0}(x) = 0\} \\ &= \{x \in R^n | b_{k0}(x) = 0,\ k=0,\cdots,i-1,\ b_{i0}(x) = 0\}. \end{aligned}$$

이 정의에 의해서 시스템이 정의된 공간 R^n을 다음처럼 쓸 수 있다.

$$R^n = \bigcup_{i=0,1,\cdots} \{S^{i+} \cup S^{i-}\} \cup S^{\infty}.$$

2.3 특이점을 통과하는 궤적 진행방향

앞 절에서의 $S^{i\cdot}$ 정의를 이용하여 특이점을 지나는 시스템 궤적과 특이도의 상관관계를 보일 수 있다.

정리 3.1

대상시스템에서 특이도가 β인 특이점 x_0에 대해 $t=0$에서 시스템의 궤적이 x_0를 지나게 하는 해석적인 (analytic) 제어입력 $u(t)$가 존재한다고 가정한다면, $t=0$에 충분히 가까운 시간에 대하여 다음과 같은 사실을 말할 수 있다.

i) β가 홀수이고 $b_{\beta 0}(x_0) > (<) 0$ 이면 궤적 $x(t)$는 $S^{0-(0+)}$에서 $S^{0+(0-)}$로만 진행할 수 있다.

ii) β가 짝수이고 $b_{\beta 0}(x_0) > (<) 0$ 이면 궤적 $x(t)$는 $S^{0+(0-)}$에서 $S^{0+(0-)}$로만 진행할 수 있다.■

예제. 다음의 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 u, \quad x \in R^3 \\ y &= h(x) = x_1 \end{aligned}$$

이때 $a(x)=0$, $b(x)=x_1$, $S=\{x \in R^3 | x_1 = 0\}$이고

$$\begin{aligned} b_{10}(x) &= L_f b(x) = x_2, \\ b_{20}(x) &= L_f^2 b(x) = x_3 \end{aligned}$$

이므로 특이매니폴드를 포함하여 시스템이 정의된 영역을 세분하면,

$$\begin{aligned} S^{10} &= \{x \in R^3 | b(x) = b_{10}(x) = 0\} \\ S^{1+(-)} &= \{x \in R^3 | b(x) = 0, b_{10}(x) > (<) 0\} \\ S^{2+(-)} &= \{x \in R^3 | b(x) = b_{10}(x) = 0, b_{20}(x) > (<) 0\} \end{aligned}$$

이된다.

$x(t_s) = x_s \in S$인 시스템의 궤적을 $x(t)$라 할 때 다음의 세 가지 경우를 생각할 수 있다.

i) $x \in S^{1+(-)}$이고 $x_2 > (<) 0$ 인 경우
$$x_1(t_s^+) > (<) 0$$

ii) $x \in S^{2+(-)}$이고 $x_3 > (<) 0$ 인 경우
$$x_2(t_s^+) > (<) 0, x_1(t_s^+) > (<) 0$$

iii) $x \in S^{20}$인 경우
$$x(t) \equiv 0$$

이 된다. 그림 1은 이를 설명하고 있다.

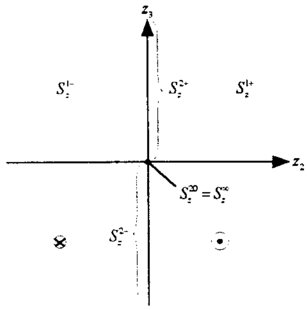

그림 1. 특이매니폴드의 분류

3. 결 론

시스템을 입출력간의 대응관계로 볼 때 출력에 대한 상대차수가 정의되지 않는 상태점을 특이점이라 한다. 시스템에 특이점이 존재할 때 전역적인 시스템 궤적이동을 보장하기 위해서는 특이점을 통과하는 경우를 반드시 고려해야 한다. 본 논문에서는 특이점을 지나는 시스템의 궤적은 특이점의 특이도와 밀접한 관계가 있음을 밝히고 예를 들어 설명하였다. $b(x)$의 부호가 특이점 외에서는 항상 같은 부호를 갖는 경우처럼 언급하지 않은 특별한 경우가 있지만 그 맥락은 일치하므로 생략하였다.

[참 고 문 헌]

[1] R. Hirschorn, and J. Davis, "Output tracking fo near systems with singular points," SIAM J. Contr Optim., 25, pp. 547-557,1987.

[2] R. Hirschorn, and J. Davis, "Global output trac nonlinear systems," SIAM J. Control and Optim., 1321-1330, 1988.