Proceedings of the Autumn Conference in 2001
and the 30th Anniversary of the Korean Statistical Society

Partial Diallel Crosses Designs using m-Associate Class Partially Balanced Incomplete Block Designs

Kuey Chung Choi[1] · Young Nam Son[2]

Abstract

In this paper, partial diallel crosses designs are proposed. These designs for estimating general combining abilities are constructed by using m-associate class partially balanced incomplete block designs. Also, the efficiency of the partially diallel crosses designs obtained through this method is reported in table.

Keywords : partial diallel crosses; general combining ability; resolvable m-associate class partially balanced incomplete block designs

1. 서론

이면교배(diallel cross)계획은 식물의 육종실험에서 근교계통(inbred line)의 유전적 특성을 연구하는데 이용되는 짝짓기 계획(mating design)이다. 서로 다른 유전적인 특징을 갖는 p종의 근교계통에서 i번째 근교계통과 j번째 근교계통의 교배를 (i, j)로 나타내고 n_c를 실험에 이용되는 서로 다른 교배의 수라 하면 Griffing(1956)은 n_c에 따라 4가지 형태의 완전이면교배(Complete Diallel Cross: CDC)계획을 정의하였다. $n_c = p(p-1)/2$인 완전이면교배에서 근교계통의 수 p가 커지게 되면 교배의 수가 급격히 증가되어 모든 교배를 실험하는 것이 현실적이지 못한 경우가 발생된다. 이러한 상황에서 $p(p-2)/2$개의 교배 중에서 $ps/2$ ($s<p-1$, s는 각 근교계통이 다른근교계통과 만나는 횟수)개의 교배만를 실험하는 부분이면교배(Partial Diallel Cross : PDC)를 이용한다.

본 연구에서는 분해가능하면서(resolvable) m개의 동반분류를 갖는 부분균형 불완비블록(m-associate class Partially Balanced Incomplete Block : PBIB(m))계획을 이용하여 PDC 계획을 구성하는 방법과 이들 계획의 효율성을 제시하고자 한다.

2. 계획의 구성방법

$ps/2$개의 서로 다른 교배를 블록의 크기가 k인 b개의 블록에 배치하는 이면교배실험에서 n을 실험에 이용되는 교배의 총 수라 하면 모형(Singh과 Hinkelmann, 1995)은 아래와 같이 정의된다.

---

1) Professor, Department of Computer Science and Statistics, Chosun University, Gwangju 501-759, Korea.
2) Researcher, The Research Institute of Statistics Chosun University, Gwangju 501-759, Korea.

$$Y = \mu 1_n + \Delta_1 g + \Delta_2 \beta + \varepsilon \qquad (2.1)$$

여기서 Y는 $n\times 1$ 관찰 값 벡터이고 μ는 전체평균, 1_n은 모든 요소가 1인 $n\times 1$ 벡터를 나타낸다. 또한, $g=(g_1, g_2, \ldots, g_p)'$와 $\beta=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b)'$는 각각 gca 효과벡터와 블록효과벡터를 나타내며 Δ_1, Δ_2는 각각 p개의 gca과 b개의 블록에 대응하는 계획행렬이고 ε는 평균이 0, 분산이 σ^2인 $n\times 1$ 오차항 벡터이다.

모형 (2.1)에서 gca 효과벡터 g를 추정하기 위한 정보행렬 C는 다음과 같이 정의된다 (Gupta와 Kageyama,1994).

$$C=(c_{ij})=G-\frac{1}{k}\Gamma\Gamma' \qquad (2.2)$$

여기서 r_i를 i번째 근교계통의 반복 수, r_{ij}, $i<j=1,2,\ldots,p$를 교배 (i,j)의 반복 수라 할 때 $G=(g_{ij})$는 대칭행렬로서 $g_{ii}=r_i, g_{ij}=r_{ij}$, $i<j=1,2,\ldots,p$ 이고 $\Gamma=\Delta_1'\Delta_2$는 $p\times b$ 근교계통 - 블록 빈도행렬을 나타낸다.

분해가능한 PBIB(m) 계획을 이용하여 PDC 계획을 구성하는 방법을 살펴보면 아래와 같다. 먼저 분해가능한 PBIB(m)계획 중에서 (2.3)과 같은 모수를 갖는 계획 D_1이 존재한다고 하자.

$$v_1=p,\ b_1, r_1, k_1=2,\ \lambda_l=1,\ \lambda_i=0,\ (i\neq l)=1,2,\ldots,m \qquad (2.3)$$

계획 D_1은 분해가능한 계획이므로 v_1개의 처리가 모두 나타나는 블록집합이 r_1개의 반복된다. 계획 D_1은 블록의 크기가 2이므로 b_1개의 각 블록을 교배로 간주한 다음, D_1의 j번째 $(j=1,2,\ldots,r_1)$ 반복집합에 속하는 $p/2$개의 교배를 PDC에서의 j번째 블록으로 간주하면 모수가

$$p,\ b=r_1,\ r_c=1,\ k=p/2 \qquad (2.4)$$

이면서 m개의 동반분류를 갖는 부분이면교배(3-associate class Partial Diallel Cross : PDC(3))계획 D가 구성된다. 여기서 r_c는 서로 다른 교배의 반복 수를 나타낸다.

예제 1. $p=8$일 때 사각 동반체계(rectangular association scheme)를 이용하여 모수가 $p=8, b_1=12, r_1=3, k_1=2, \lambda_1=1, \lambda_2=\lambda_3=0$인 분해가능 한 PBIB(3) 계획 D_1으로부터 PDC 계획 D를 구성하면 아래와 같다.

첫 번째 반복집합 : {1,2}, {3,4}, {5,6}, {7,8}
두 번째 반복집합 : {1,3}, {2,4}, {5,7}, {6,8}
세 번째 반복집합 : {1,4}, {2,3}, {5,8}, {6,7}

위의 3개의 반복집합 각각을 PDC 계획의 블록으로 간주하면 모수가 $p=8, b=3, r_c=1, k=4$인 PDC(3) 계획이 구성된다.

정리 1. PDC(m)계획 D의 정보행렬 C의 일반화 역행렬 $C_g^- = (c_g^{ij})$는 다음과 같다.

$$c_g^{ij} = \begin{cases} \dfrac{r_1 + n_1 - 1}{(r_1 - 1)(r_1 + n_1)} & i=j\text{인 경우}, \\ -1/(r_1 - 1)(r_1 + n_1) & i,j(i \neq j)\text{가 } l\text{번 째 동반관계에 있는 경우}, \\ 0 & i,j(i \neq j)\text{가 } l\text{번 째 동반관계에 있지 않는 경우}. \end{cases}$$

여기서 n_1은 l번째 동반관계에 있는 근교계통의 수를 나타낸다.

3. 계획의 효율성

PDC(m) 계획 D에서 gca 효과간의 차이 분산은

$$Var(\widehat{g}_i - \widehat{g}_j) = \sigma^2 / (c_g^{ii} + c_g^{jj} - 2c_g^{ij}) = v_{ij}\sigma^2 \qquad (3.1)$$

이고 완전 확률화 블록(Complete Randomized Block) 계획에서의 CDC계획을 D_0라 할 때 D_0에 대한 PDC(m) 계획의 효율성 인자는 아래와 같이 정의된다(Singh과 Hinkelmann, 1998).

$$e_D = p(p-1)/\{(p-2)\sum\sum_{i \neq j} v_{ij}\} \qquad (3.2)$$

위의 (3.2)를 정리 1을 이용하여 다시 나타내면

$$e_D = \frac{(p-1)(r_1 - 1)(r_1 + n_1)}{(p-2)\{r_1(p-1) + p(n_1 - 1) + 1\}} \qquad (3.3)$$

이다.

CDC계획과 PDC 계획에서는 실험이 이루어지는 교배의 수가 서로 다르기 때문에 이를 고려한 단위 교배 실험당 PDC(m) 계획의 효율성(e_D^*)은 아래와 같다(Singh과 Hinkelmann, 1998).

$$e_D^* = (p-1)e_D / r_1 \qquad (3.4)$$

참고문헌

[1] Clatworthy, W.H.(1973). *Tables of Two -Associate-Class Partially Balanced Designs,* NBS Applied Mathematics Series 63, Washington, D.C.

[2] Das, A. Dey, A. and Dean, A.M. (1998). optimal designs for diallel cross experiments. *Statistics & Probability Letters* 36, 427-436.

[3] Dey, A.(1986). *Theory of Block Designs,* Johne Wiley & Sons.

[4] Dey, A. and Midha, C.K. (1996). Optimal block designs for diallel crosses. *Biometrika* 83, 484-489.

[5] Griffing, B.(1956). Concepts of general and specific combining ability in relation to diallel crossing systems. *Australian Journal of Biological Sciences* 9, 463-493.

[6] Gupta, S. and Kageyama, S. (1994). Optimal complete diallel crosses. *Biometrika* 81, 420-424.

[7] Preece, D.A.(1967). Nested balanced incomplete block designs. *Biometrika* 54, 479-86.

[8] Singh, M. and Hinkelmann, K. (1995). Partial Diallel Crosses in Incomplete Blocks. *Biometrics* 51, 1302-1314.

[9]Raghavarao, D.(1971). *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments,* Dover publications.