

# 터빈유량계의 난류유동에 대한 수치해석

김진범 · 박경암 · 고성호

## Numerical Analysis of Turbulent Flow Through Turbine Flow Meter

J. B. Kim, K.A. Park and S. Ko

**Key Words:** Turbine flow meter(터빈유량계), Pseudocompressibility(의사압축성인자), Gauss-Seidel line relaxation(Gauss-Seidel 선형 이완),  $k-\epsilon$  model( $k-\epsilon$  모델)

### Abstract

Flow through turbine flow meter is simulated by solving the incompressible Navier-Stokes equations. The solution method is based on the pseudocompressibility approach and uses an implicit-upwind differencing scheme together with the Gauss-Seidel line relaxation method. The equations are solved steadily in rotating reference frames and the centrifugal force and the Coriolis force are added to the equation of motion. The standard  $k-\epsilon$  model is employed to evaluate turbulent viscosity. At first the stability and accuracy of the program is verified with the flow through a square duct with a  $90^\circ$  bend and on the flat plate.

### 1. 서론

유체의 유량을 측정하는 방법에 따라 유량계의 종류를 분류하게 되는데 특히 출력과 유동특이 비례하는 경우를 선형 유량계라고 하며 그중 터빈 유량계가 대표적이다. 이러한 터빈유량계는 원통상에 회전날개를 설치하고 유체의 속도에 비례한 회전속도로 회전날개가 회전을 하게 된다. 이 때 회전날개의 회전수를 검출하여 유량을 구하는 방식이다.

이상적인 터빈 유량계의 경우엔 터빈 입구속도와 출구속도가 같으나 실제 터빈 유량계의 경우 터빈 날개와 유체사이의 점성으로 인한 마찰과 베어링 마찰, 터빈과 관과의 간극으로 인해 실제 측정값보다 적게 나오는 경향이 있다. 터빈 유량계의 용도는 액체상태의 원료와 제품의 혼합, 분류의 등 공정제어 목적이나 석유류, 천연가스 등의

고가 유체의 계량에 사용되므로 유량계의 정확도는 경제적인 측면에서 반드시 요구되는 사항이다. 그러나 이러한 터빈유량계의 대부분을 수입에 의존하고 있다. 따라서 이러한 터빈유량계에 대한 국내의 독자적인 생산기술 확보가 필요하게 되었다.

터빈 유량계 내부에서는 직관부(straightners)와 날개 등의 영향으로 인해 매우 복잡한 유동이 발생하게 된다. 지난 수년간 컴퓨터 하드웨어의 비약적인 발전과 더불어 전산유체역학을 이용한 많은 방법들이 소개되었고 실제로 이 방법들로 인해 어려운 문제를 해결하고 타당한 결과를 얻을 수 있게 되었다. Fig. 1은 유량계 내부의 유동을 간단히 보여주고 있다.

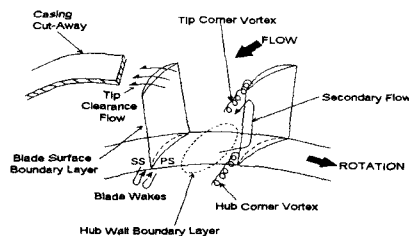


Fig. 1 The flow features in turbine flow meter

\* 충남대학교 대학원

\*\* 표준과학연구소

\*\*\* 충남대 기계설계공학과

터빈유량계에 대한 연구동향으로 Dijstelbergen<sup>(1)</sup>은 터빈유량계 내부에 있는 직관부에 의한 압력손실을 연구하였고, Khelif<sup>(2)</sup>은 실험과 수치해석을 통해 날개의 각도 및 모양에 따른 영향을 연구하였다. 그러나 이제까지 터빈유량계에 대한 연구는 2차원 유동을 해석하고 단순한 터빈날개에 대한 해석으로 국한되었다.

본 연구의 목적은 터빈유량계 내부의 복잡한 유동장을 해석할 수 있는 3차원, 비압축성, 점성, 난류유동에 적용되어 정량적 해석을 가능하게 하는 유한차분 프로그램을 개발하고 이를 이용하여 터빈유량계의 개발을 위한 기술 축적 및 설계대안 제시에 있다.

## 2. 지배 방정식 및 수치해석 방법

### 2.1 지배 방정식

본 문제를 풀기 위해 도입된 방법은 Chorin<sup>(3)</sup>이 제안한 의사압축성(pseudocompressibility)해법이다. 의사압축성 해법은 의사(擬似)적인 압축성을 도입하여 비압축성 유동을 압축성 유동의 수치해석 방법으로 푸는 것이다. 즉, 비압축성 연속방정식에 압력에 대한 시간 미분항을 도입하고 음속을 비압축성인 경우의 무한대로부터 그 변화항의 계수 크기에 의존하는 유한의 값으로 치환한다. 따라서 상대적으로 풀기 힘든 타원형의 방정식이 쌍곡선형으로 변환하게 된다. 도입된 시간 미분항은 정상해가 얻어진다면 자동적으로 없어지는 항이 된다. 곡면좌표계( $\xi, \eta, \zeta$ )에 대한 3차원 비압축성 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}(E - E_v) + \frac{\partial}{\partial \eta}(F - F_v) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(G - G_v) = S \quad (1)$$

좌변의 벡터 Q는 보존되는 종속변수이고 E, F, G는 대류항이다.

$$Q = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$E = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta U \\ \xi_x p + uU + \xi_x u \\ \xi_y p + vU + \xi_y v \\ \xi_z p + wU + \xi_z w \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta V \\ \eta_x p + uV + \eta_x u \\ \eta_y p + vV + \eta_y v \\ \eta_z p + wV + \eta_z w \end{bmatrix}$$

$$G = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta W \\ \zeta_x p + uW + \zeta_x u \\ \zeta_y p + vW + \zeta_y v \\ \zeta_z p + wW + \zeta_z w \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서 J는 변형된 Jacobian이고,  $\beta$ 는 의사압축성인자, x, y, z방향에 따른 속도성분은 u, v, w이고 p는 압력을 의미한다. U, V, W는 반변속도(contravariant velocity) 성분이고 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U &= \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \\ V &= \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w \\ W &= \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w \end{aligned} \quad (3)$$

점성유동항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{E}_v &= \frac{1}{ReJ} \begin{bmatrix} (\nabla \xi \cdot \nabla \xi) u_\xi + (\nabla \xi \cdot \nabla \eta) u_\eta + (\nabla \xi \cdot \nabla \zeta) u_\zeta \\ (\nabla \xi \cdot \nabla \xi) v_\xi + (\nabla \xi \cdot \nabla \eta) v_\eta + (\nabla \xi \cdot \nabla \zeta) v_\zeta \\ (\nabla \xi \cdot \nabla \xi) w_\xi + (\nabla \xi \cdot \nabla \eta) w_\eta + (\nabla \xi \cdot \nabla \zeta) w_\zeta \end{bmatrix} \\ \hat{F}_v &= \frac{1}{ReJ} \begin{bmatrix} (\nabla \eta \cdot \nabla \xi) u_\xi + (\nabla \eta \cdot \nabla \eta) u_\eta + (\nabla \eta \cdot \nabla \zeta) u_\zeta \\ (\nabla \eta \cdot \nabla \xi) v_\xi + (\nabla \eta \cdot \nabla \eta) v_\eta + (\nabla \eta \cdot \nabla \zeta) v_\zeta \\ (\nabla \eta \cdot \nabla \xi) w_\xi + (\nabla \eta \cdot \nabla \eta) w_\eta + (\nabla \eta \cdot \nabla \zeta) w_\zeta \end{bmatrix} \\ \hat{G}_v &= \frac{1}{ReJ} \begin{bmatrix} (\nabla \zeta \cdot \nabla \xi) u_\xi + (\nabla \zeta \cdot \nabla \eta) u_\eta + (\nabla \zeta \cdot \nabla \zeta) u_\zeta \\ (\nabla \zeta \cdot \nabla \xi) v_\xi + (\nabla \zeta \cdot \nabla \eta) v_\eta + (\nabla \zeta \cdot \nabla \zeta) v_\zeta \\ (\nabla \zeta \cdot \nabla \xi) w_\xi + (\nabla \zeta \cdot \nabla \eta) w_\eta + (\nabla \zeta \cdot \nabla \zeta) w_\zeta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 Re는 레이놀즈 수이다.

터빈유량계는 회전을 하므로 이것을 고려해 지배 방정식에 구심력과 코리올리(Coriolis)힘을 흡입(source)항으로써 첨가해야 한다. x축을 중심으로 회전을 하므로 식 (1)의 S는 다음과 같다.

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega(\Omega y + 2w) \\ \Omega(\Omega z - 2v) \end{bmatrix}$$

$\Omega$ 는 회전속도이다. 그리고 상대속도 성분은 절

대속도(absolute velocity)성분의 향으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u &= u_a \\ v &= v_a + \Omega_z \\ w &= w_a - \Omega_y \end{aligned}$$

난류모델로서는 일반적으로 널리 이용되는 표준  $k-\epsilon$  모델을 벽함수(wall function)와 함께 사용하였다. 와점성계수는 난류에너지  $k$ 와 소산율  $\epsilon$  으로부터 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5)$$

$k$ 와  $\epsilon$ 에 대한 수송방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\bar{k}}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_T / Pr_k) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] \\ &+ \left( 2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \epsilon \\ \rho \frac{D\epsilon}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_T / Pr_\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \\ &+ C_{e1} \frac{\epsilon}{k} \left( 2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_{e2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (6)$$

이때 상수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_\mu &= 0.09, C_{e1} = 1.44, C_{e2} = 1.92 \\ Pr_k &= 1, Pr_\epsilon = 1.3 \end{aligned}$$

## 2.2 경계조건

터빈유량계 내부 유동에는 입구, 출구, 벽면 및 주기 경계면이 존재하고 Fig. 2는 이러한 경계면을 보여주고 있다.

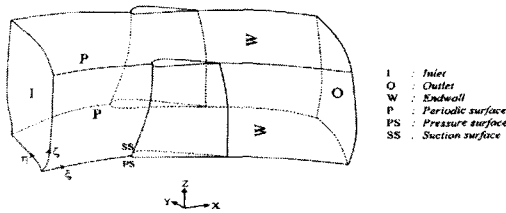


Fig. 2 Coordinate system and boundary surfaces in the physical domain

Fig. 2와 같이 허브와 쉬라우드면에 의한 벽면 조건과 입구 경계면에서 익렬선단까지와 익렬끝단에서 출구 경계면까지 주기 조건을 부여하였다. 입구와 출구 경계면에 대해서는 특성(characteristic) 경계조건이 사용되었다. 압력경계 조건은 벽면에 수직으로 압력구배를 0으로 사용했다.

## 3. 수치해석방법

### 3.1 수치기법

지배방정식의 시간 미분항은 Euler 후향 공식을 이용해 차분하였다. 각 방정식들은 의사 시간(pseudo-time)안에서 해가 정상상태에 도달할 때까지 반복적으로 풀어낸다. 이때 점성유동항은 중앙차분법을 이용하였고, 대류유동항은 3차의 상류도식(upwind scheme)을 사용해 차분하였다.

시간에 따른 선형화 후 식(1)에 대하여, Yoon<sup>(6)</sup>이 제안한 내재적(implicit), 델타형식(delta-law form) 근사와 Jacobi행렬식 사용으로 다음 식과 같은 7블럭의 대각행렬 방정식으로 변환된다.

$$\begin{aligned} \bar{B}\delta Q_{i-1,j,k} + \bar{A}\delta Q_{i,j,k} + \bar{C}\delta Q_{i+1,j,k} + \bar{D}\delta Q_{i,j-1,k} \\ \bar{E}\delta Q_{i,j+1,k} + \bar{F}\delta Q_{i,j,k-1} + \bar{G}\delta Q_{i,j,k+1} = R.H.S \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $\delta Q = Q^{n+1} - Q^n$ 이고  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ 는  $4 \times 4$  대각행렬이다.

이러한 행렬은 Gauss-Seidel 선형이완법으로 풀 수 있고 식(7)에서 우변항은 전 영역에 걸쳐 계산이 되고 저장이 된다. 이러한 선형이완방법은  $\xi, \eta, \zeta$  방향에 걸쳐 스위프(sweep)를 하게 된다. 스위프 방법은  $\eta$ 방향으로의 대각행렬을 풀기 위해  $\xi, \zeta$ 방향으로 전진과 후진을 하며 스위프를 하게 된다. 나머지 방향에 대해서도 마찬가지로 이 런 반복과정을 계속해나가게 된다.

## 4. 결과 및 고찰

### 4.1 90° 굽은 사각곡관

프로그램의 정확성과 안정성을 검증하기 위해 단순한 모델인 90° 구부러진 사각곡관을 수치해석하였다. 이 모델은 새로운 수치해석 기법을 3차원으로 검증할 때 흔히 다루어 지는 문제로 Humphery<sup>(5)</sup>에 의해 실험적으로 연구되었다.

해석에 사용된 격자는 Fig. 3과 같다.

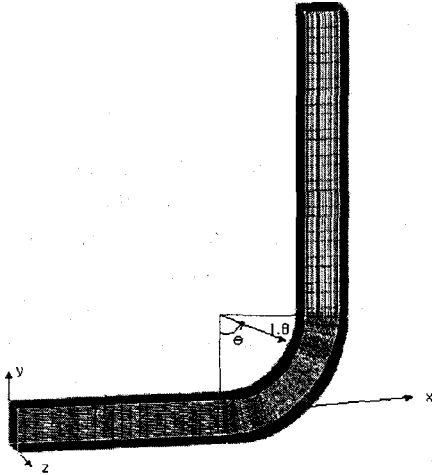


Fig. 3 Geometry of a square duct with 90° bend

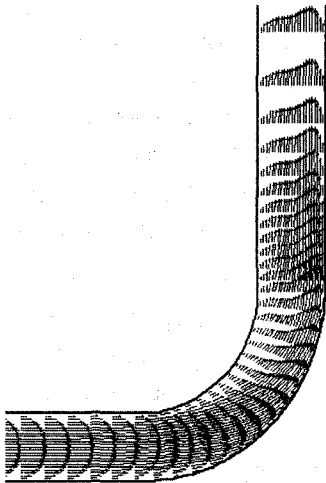
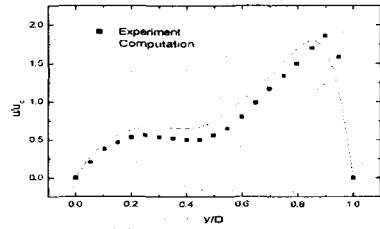
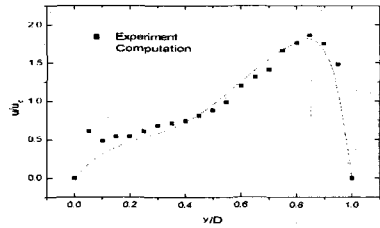


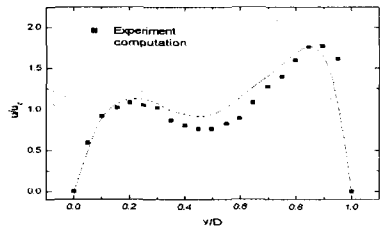
Fig. 4 Flow in the vertical mid-plane



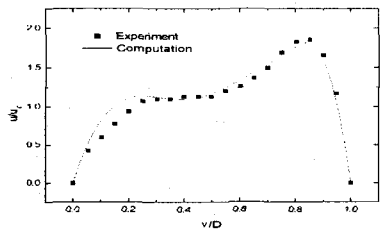
(a) 90° plane along  $z/D=0.5$



(b) 60° plane along  $z/D=0.5$



(c) 90° plane along  $z/D=0.25$



(d) 60° plane along  $z/D=0.25$

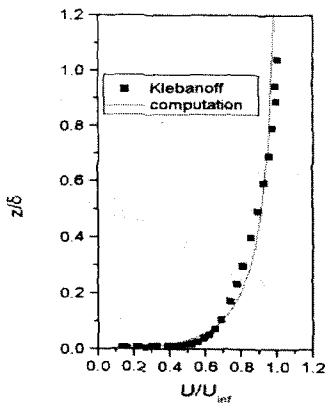
Fig. 5 Comparison of calculation with experimental data and numerical data

Fig. 4에서 곡관의 중심면에 투영된 그림을 보면 안쪽 곡면을 따라서 유체가 급격히 감속되고 바깥쪽 면에서는 가속되는 것을 알 수 있다.

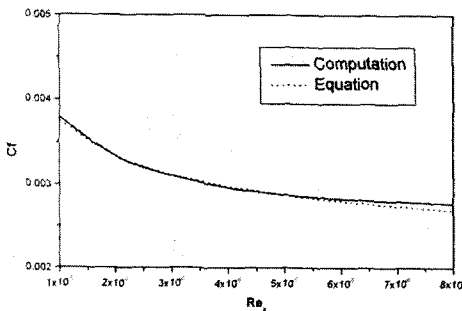
Fig. 5는  $z=0.5$ 와  $z=0.25$ 되는 지점에서  $60^\circ$ 와  $90^\circ$  되는 지점에서 Humphery의 실험 결과와 수치해를 비교하여 나타낸 그림이다. 그림에서 보는 것과 같이 바깥 곡관면 및 안쪽 곡관면에서 유체의 가속과 감속 특성을 잘 예측하고 있고 최고 속도 지점도 잘 예측하고 있다.

## 4.2 평판 유동

프로그램에 사용된 표준  $k-\epsilon$  모델을 검증하기 위해 Klebanoff<sup>(6)</sup>의 실험값과 비교를 하였다. 사용된 격자는  $61 \times 51$ 을 사용하였고 레이놀즈수는  $4.2 \times 10^6$ 이다.



(a) Velocity profile, flat plate



(b) Friction coefficient, flat plate

Fig. 6 Comparison of calculation with experimental data and equation

Fig. 6에서 보는 바와 같이 평판에서의 속도분포가 잘 일치함을 알 수 있고, 저항계수는 비교적 정확히 일치하지만 레이놀즈수가 증가함에 따라 2.2%의 오차가 발생한다.

## 4.3 터빈유량계 유동해석

### 4.3.1 격자구성

터보기계를 포함하여 터빈 유량계의 익형은 기하학적으로 형상이 복잡하고 익형의 위치에 따른 속도가 각각 틀리므로 이런 특성을 고려한 격자 생성이 요구된다. 3차원 익렬 유동 해석시 대부분의 시간은 원하는 격자점을 형성하는데 소요가 된다. 유동해석 결과는 격자구조, 격자수 등에 영향을 받으며 유량계 날개의 형상은 비직교성과 복잡한 유동특성으로 인해 수치해석에 필요한 계산격자의 적절한 배치가 중요한 관건이 된다.

익렬의 점성유동해석에는 주로 C형이나 H형의 격자를 사용하게 되는데 C형 격자는 앞전부분에서 좋은 격자를 얻을 수 있으나 앞전에서 멀어질수록 찌그러짐이 심하게 되고 벽면에 고루 격자를 밀집시킬 수 있고 주기조건 부여에 용이한 H형 격자를 사용하였다.

격자수는 유동방향으로 121개, 스펠방향으로는 41개, 피치방향으로는 41개를 사용하였고 블레이드의 각도는  $30^\circ$ 이다. 벽면에서 첫 번째 격자점은 표준  $k-\epsilon$  모델을 사용하기 위해  $y^+$ 가 30~100이 되도록 위치시켰다.

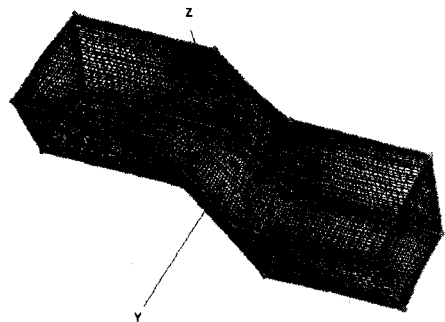


Fig. 7 Computational grids(121×41×41)

#### 4.2.2 결과 및 고찰

터빈유량계의 날개의 각속도, 체적유량과 관련된 식은 다음과 같다.

$$\frac{\omega}{Q} = \frac{\tan \theta}{rA} - \frac{c_1}{cr^2} \quad (8)$$

여기서  $\omega$ 는 각속도,  $Q$ 는 체적유량,  $\theta$ 는 날개의 각도,  $r$ 은 로터의 평균 회전반경,  $A$ 는 유로 단면적을 의미하고  $c$ ,  $c_1$ 은 비례상수이다.

위의 식을 기초로 입구 속도를 2.1m/s, 회전속도를 5 rad/s로, 유체는 공기를 기준으로 수치해석을 하였다.

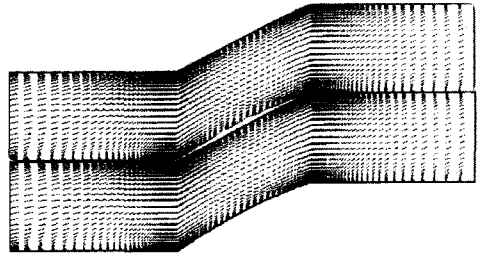
Fig. 8은 입구부부터 출구부까지의 속도벡터장을 보여주는 것으로 회전에 의해 날개 입구부터 유동이 영향을 받게 되며 날개 사이에서는 날개 방향을 따라서 지나가게 된다. 날개를 통과한 후, 후연 근처부터에서 축방향 속도가 감소하는 것을 볼 수 있다.

본 연구에서 3차원 Navier-Stokes 방정식을 계산함으로써 터빈유량계 내부의 속도장과 압력장의 특성을 파악할 수 있었다. 이러한 수치해의 정확성을 검증하기 위해 실험이 실시될 것이다. 향후 연구과제는 이 프로그램을 이용하여 다양한 익형에 따른 정량적인 값으로 비교와 현재의 단일블록이 아닌 멀티블록을 이용해 팁부분의 누설이 유량계에 미치는 영향 등을 연구할 것이다.

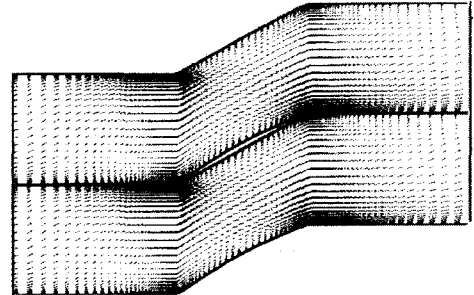
#### 참고문헌

(1) H.H. Dijkstra, 1995, "Low loss straighteners for gas turbine meters", *International gas research conference*, pp.61-66  
 (2) M.El Khelifi, R. Henry, J.P. Vallet, G. Bois, M. Gassel, V. De Laharpe, 1999, "Improvement of the response of turbine meters by modifying the shape of the leading edge of standard blades: an experimental and the theoretical approach", *International gas research conference*, pp. 55-60  
 (3) A.J. Chorin, 1967, "A numerical method for solving incompressible viscous flow problem", *Journal of computational physics*, Vol. 2, pp.12-26

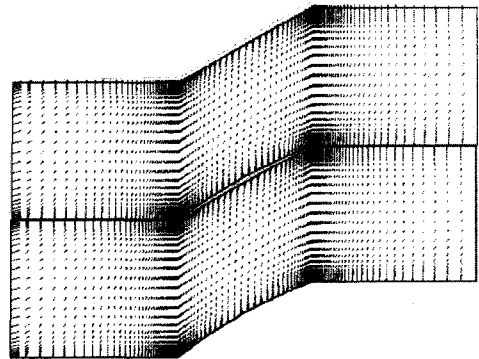
(4) Humphery, J. A. C., Taylor, A. M. K., and Whitelaw, J. H., 1977, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 83, pp. 509-527  
 (5) S. Yoon, D. Kwak, 1990, "Implicit methods for the Navier-Stokes equations", *Computing Systems in Eng.*, Vol. 1, pp.535-547  
 (6) Klebanoff, P. S., 1955, "Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient.", *NACA Report*, pp.1247.



(a) Relative velocity field at span 75%



(b) Relative velocity field at span 50%



(c) Relative velocity field at span 10%

Fig. 8 Relative velocity fields