

초음파장하에서 미소기포의 완화적 거동

강상우* · 곽호영**

Relaxation Behavior of a Microbubble under Ultrasonic Field

SangWoo Kang and Ho-Young Kwak

Key Words : 지연 운동 / 시간(relaxation motion / time), 소노루미네스스(sonoluminescence), 광산란법(light scattering method), 되튐운동(bouncing motion)

Abstract

Nonlinear oscillation of a microbubble under ultrasound was investigated theoretically. The bubble radius-time curves calculated by the Rayleigh-Plesset equation with a polytropic index and by the Keller-Miksis equation with the analytical solution for the Navier-Stokes equations of the gases were compared with the observed results by the light scattering method. This study has revealed that the bubble behavior such as the expansion ratio and the bouncing motion after the first collapse under ultrasound depends crucially on the retarded time of the bubble motion to the applied ultrasound.

1. 서론

초음파장에서 기포의 거동은 캐비테이션(cavitation)에 기인한 소음발생¹⁾이나 소노루미네스스(sonoluminescence)현상^{2,3)}과 매우 밀접하게 관계되기 때문에 진동하는 압력장에서 기포의 거동은 지대한 관심의 대상이 되고 있다. Rayleigh-Plesset 방정식⁴⁾이나 Keller-Miksis 방정식⁵⁾으로 표현할 수 있는 기포벽의 운동은 전형적인 비선형 현상을 보여준다. 따라서 주기적인 가진에 대한 기포의 반응은 선형 진동자의 경우와는 확연히 다른 양상을 나타낸다. 비선형 진동의 특징을 나타내는 변수 중의 하나인 시간에 따른 기포의 반경을 측정하고 예측한다는 것은 중요한 일이다. 하지만 초음파장에서 진동하는 미소기포의 반경을 측정할 자료가 많지도 않을 뿐 아니라 이론으로 계산한 결과와 잘 맞지 않는 것이 현실이다⁶⁾.

본 연구에서는 시간에 따른 기포 반경의 변화를 초음파장하에서 기포의 지연 작용을 고려한 이론적인 계산결과와 광산란법(light scattering method)에 의하여 관측한 실험결과를⁹⁾ 비교하였다. 그 결과, 주기적인 가진에 대한 기포의 거동은 초음파장과 같은 위상(phase)으로 기포가 움직이지 않는다는 것을 알았다.

2. 기포 운동 모델

본 연구에서는 기포벽 운동에 대하여 유체의 압축성 효과를 고려한 Keller-Miksis 방정식⁵⁾을 이용하였고 그 식은 다음과 같다.

$$R_b \left(1 - \frac{U_b}{C_b} \right) \frac{dU_b}{dt} + \frac{3}{2} U_b^2 \left(1 - \frac{U_b}{3C_b} \right) = \frac{1}{\rho_\infty} \left(1 + \frac{U_b}{C_b} + \frac{R_b}{C_b} \frac{d}{dt} \right) \left[P_b - P_S \left(t + \frac{R_b}{C_b} \right) - P_\infty \right] \quad (1)$$

여기서, U_b 는 기포벽 속도, C_b 는 기포벽에서 액체의 음속, 기포벽 바깥 쪽의 액체 압력인 P_b 는 기포벽 안 쪽의 압력 P_b 와는 $P_b = P_b - 2\sigma/R_b - 4\mu U_b/R_b$ 의 관계가 있다. 식 (1)은 기포벽 속도가 기포벽의 음속보다 작은 범위에서만 유효한 음향학적 가정을 기초로 하고 있다. 기포에 가진되는 초음파의 압력은 다음과 같이 정현파로 나타낼 수 있다.

$$P_S = -P_A \sin \omega t \quad (2)$$

윗식에서 $\omega = 2\pi f_d$ 이며 f_d 는 가진주파수이다. 구대칭에서의 질량보존식과 운동량 방정식은 다음과 같으며, 구대칭인 경우 운동방정식의 용력항은 없어진다.

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_g u_r r^2) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g u_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_g u_r^2 r^2) + \frac{\partial P_b}{\partial r} = 0 \quad (4)$$

여기서, u_r 는 기포 내의 가스 속도로서, $u_r(R_b, t) = U_b$ 를 만족한다. 식 (3), (4)를 만족시키는 해석해를 Kwak과 Yang⁽²⁾이 구하였고, 그 해는 다음과 같다.

$$\rho_g = \rho_o + \rho_r \quad (5a)$$

$$u_r = \frac{\dot{R}_b}{R_b} r \quad (5b)$$

$$P_b = P_b - \frac{1}{2} \left(\rho_o + \frac{1}{2} \rho_r \right) \frac{\dot{R}_b^2}{R_b^3} r^2 \quad (5c)$$

* 한국과학기술연구원 열유동제어연구센터

** 중앙대학교 기계공학부

여기서, $\rho_a R_b^3 = \text{const.}$ 이며 ρ_r, a, N_{bc} 는 다음과 같이 주어지며, \cdot 은 시간에 대한 미분을, 아래첨자 o 는 기포의 중심을 나타낸다.

$$\rho_r = \frac{a r^2}{R_b^3}, \quad a = \frac{5m(1-N_{bc})}{4\pi}, \quad N_{bc} = \frac{P_{b0} R_b^3 / T_{b0}}{P_{\infty} R_o^3 / T_{\infty}}$$

식 (5b)에 주어진 속도 분포는 중력에 의한 수축⁸⁾에서 일어나는 기포 내부 가스운동의 homologous적인 특징을 보여준다. 즉, 수축과 팽창시 모든 질량은 하나의 점 즉, 기포 중심으로 모여질 수 있으며 또 나올 수도 있다. 더욱이 식 (5)에 나타난 해들은 기포 내부의 가스 거동을 묘사하기 위하여 극고온 초고압에서 거의 알려져 있지 않은 P_b, R_b, T_b 의 관계, 즉 기체의 상태 방정식을 필요로 하지 않는다.

식 (5)에 주어져 있는 밀도, 속도, 압력에 대한 해들은 운동 에너지 방정식도 만족시키므로 다음의 내부 에너지 방정식만 풀면 된다.

$$\rho_a \frac{DT_b}{Dt} = -\frac{P_b}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) - \frac{1}{r^2} (r^2 q_r) \quad (6)$$

이 경우도 구대칭인 경우에는 에너지 방정식에서 점성 소산항이 없어진다. 에너지 방정식의 해는 균일 압력에 의한 온도 분포와 식 (5c)에 보여지는 기포벽 가속도의 급격한 변화에 기인한 반경 방향의 불균일한 압력에 의한 온도 분포를 고려하면 기포 내부의 가스 온도 분포는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T(r) = T_b(r) + T_b'(r) \quad (7)$$

균일 압력 분포에 기인한 온도 $T_b(r)$ 은 잘 알려져 있다⁹⁾. 이 때의 온도 분포는 SL이 일어나지 않는 기포의 경우에 사용할 수 있으며 다음과 같이 주어진다.

$$T_b(r) = \frac{B}{A} \left[-1 + \sqrt{\left(1 + \frac{A}{B} T_{b0}\right)^2 - 2\eta \frac{A}{B} (T_{b0} - T_{\infty}) \left(\frac{r}{R_b}\right)^2} \right] \quad (8)$$

여기서, A 는 온도에 따른 가스 열전도도, $k_g = AT + B$ 에서의 계수이며, $\eta = R_b k_l / (\delta B)$, k_l 은 액체의 열전도도, T_{b0} 와 T_{∞} 는 기포의 중심과 벽에서의 온도이다. 기포벽을 통과하는 열전달 정도를 나타내는 열경계층 두께 δ 는 기포벽 주변의 액체에 대한 보존법칙으로부터 결정할 수 있다. 기포 중심과 기포벽에서의 온도는 Runge-Kutta법을 이용하여 바로 전 단계에서 T_{b0}, T_{∞}, R_b 의 값으로부터 결정된다.

균일한 내부압력 근사만으로는 빛을 발산할 만큼의 충분히 높은 온도를 만들지 못한다¹⁰⁾. 기포의 붕괴 직전의 급격한 온도의 상승과 연이은 급냉은 기포벽의 가속도를 고려하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_b'(r) = -\frac{1}{40(\gamma-1)k_g^2} \left(\rho_0 + \frac{5}{21} \rho_r \right) \left[(3\gamma-2) \frac{R_b R_b}{R_b^2} + \frac{\ddot{R}_b}{R_b} \right] + \frac{1}{20(\gamma-1)} \left[(3\gamma-2) R_b R_b \ddot{R}_b + \ddot{R}_b R_b^2 \right] \cdot \left[\frac{\delta}{k_l} \left(\rho_0 + \frac{5}{14} \rho_{r=R_b} \right) + \frac{R_b}{2k_g^2} \left(\rho_0 + \frac{5}{21} \rho_{r=R_b} \right) \right] \quad (9)$$

이 시간 동안에 발생하는 극고온에서의 가스 열전도도 k_g^2 는 충돌 적분¹¹⁾으로부터 구할 수 있다. 열경계층 두께 δ 는 기포 붕괴 이후 적절한 되튐운동(bouncing motion)을 나타낼 수 있도록 정하였다. 식 (9)에 주어진 온도 분포는 기포 붕괴로부터 약 500 ps 전에 기포

벽 가속도가 10^{12} m/s^2 에 이르렀을 때만 나타나며 바로 이 기포벽 가속도가 기포에서 빛이 발산되는 원인이라 생각할 수 있다. 한 주기 동안에 이렇게 극히 짧은 기간을 제외한 다른 모든 시간대에서 기포 내부의 온도 분포는 식 (8)에 의하여 결정되어진다. 기포벽 속도의 급격한 변화에 기인한 온도의 급격한 상승은 기포 내부에서 가스의 운동에너지가 줄어들 때, 이 운동에너지가 열에너지로 변환되기 때문이다¹²⁾. 빛을 발산하는 기포에 대한 거동을 적절히 묘사하는 방법은 여러 가지 다양한 모델로부터 얻어진 수치해석적 결과와 실험적 결과를 비교함으로써 가능하다.

3. 초음파장하에서 미소기포의 지연 거동

적절한 물리적인 변수들을 이용한 무차원화를 거치지 않고 식 (1)의 적분을 수치적으로 수행하는 것은 일반적으로 불가능하다. 따라서 기포의 운동을 특징짓는 변수들을 선정하여 지배방정식의 무차원화를 다음과 같이 할 수 있다⁹⁾. 반경을 평형반경 R_{b0} , 온도와 압력은 각각 환경온도 T_{∞} , 환경압력 P_{∞} 로 무차원화시킨다. 속도, 시간, 동점성계수, 표면장력 같은 다른 물리적인 양들에 대하여는 무차원화한 이후에도 지배방정식이 변하지 않도록 하는 조건으로부터 그에 해당하는 변수를 구할 수 있다. 이들 무차원 변수들은 다음과 같다.

$$\text{속도} : u_0 = \sqrt{P_{\infty} / \rho_{\infty}} \quad (10-a)$$

$$\text{시간} : t_0 = R_{b0} / u_0 \quad (10-b)$$

$$\text{동점성계수} : \mu_0 = P_{\infty} R_{b0} / u_0 \quad (10-c)$$

$$\text{표면장력} : \sigma_0 = P_{\infty} R_{b0} \quad (10-d)$$

무차원화한 이후, f_0, t_0 을 제외한 나머지 변수들은 무차원 변수를 이용하여 기술된 Rayleigh-Plesset 방정식은 다음과 같다.

$$RR + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \left(1 + \frac{R}{C_{\infty}} \frac{d}{dt} \right) (P_b - 1 + P_A \cos[2\pi(f_d f_0 t) t]) - 4\mu \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R} \quad (11)$$

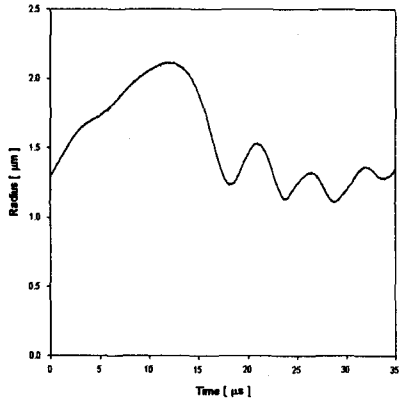
여기서, f_0 는 가진 음파의 특성주파수이다. 식 (11)에 보여지는 것처럼 무차원 방정식에서 가진주파수는 $f_0 t_0 \neq 1$ 일 경우 $f_d f_0 t_0$ 로 변조되게 된다. 하지만 $f_0 t_0 = 1$ 이라면, 기포의 거동과 가진주파수가 공진을 일으키는 인공적인 공진현상을 초래한다¹³⁾. 사실 Rayleigh-Plesset(RP)이나 Keller-Miksis 방정식 같은 기포 운동에 대한 비선형 방정식은 가진 주파수에 절대적인 영향을 받는다. 예를 들면, 가진주파수가 감소했을 때, 평형 반경에 대한 최대 반경의 비의 증가에 따른 기포의 붕괴점에서의 가스의 온도와 압력 상승과 첫 번째 기포 붕괴 이후의 되튐 횟수가 상당히 증가한다. 따라서 타당한 결과를 얻기 위해서 가진력의 특성시간, $1/f_0$ 을 적절하게 선택해야만 한다.

위에서 언급한 것처럼 가진력의 특성주파수 f_0 는 기포 진동의 특성 주파수 $1/t_0$ 와는 다르다. 이 경우, 기포 외부에 대한 기포 운동의 지연된 시간은 다음과 같이 정의될 수 있다¹³⁾.

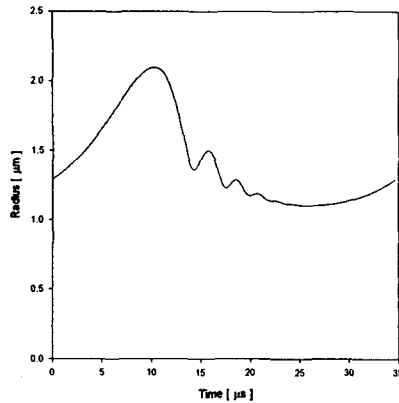
$$\tau = \frac{1}{f_0} - t_0 \quad (12)$$

식 (12)에서 정의된 지연시간은 가진되는 초음파에 대한 미소 기포의 완화적 거동을 특징짓는다.

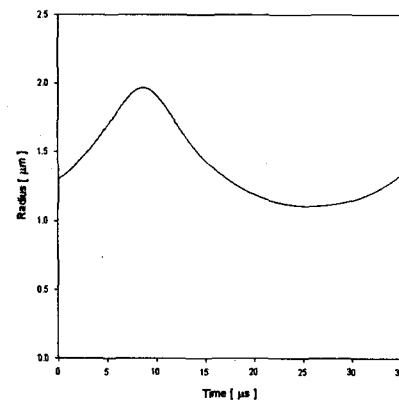
4. 결과 및 토론



(a)



(b)



(c)

Fig. 1 Radius-time curve for air bubble of $R_0=1.3 \mu\text{m}$ at $P_A=1.12 \text{ atm}$

- (a) observed data
- (b) calculated values by KMNS with relaxation time of $0.87 \mu\text{s}$
- (c) calculated values by RP with $r=0$

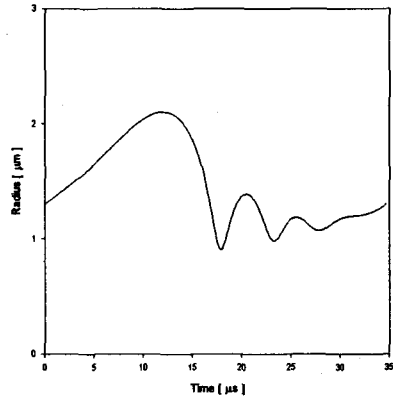


Fig. 2. Calculated radius-time curve for the air bubble case shown in Fig. 1 with $r=2.64 \mu\text{s}$.

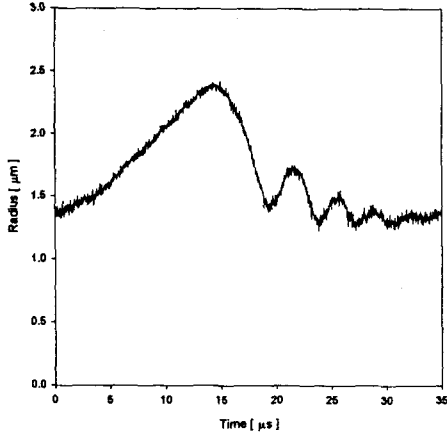
4 개의 각기 다른 경우의 기포 평형반경과 가진 초음파의 진폭에 따라 미소기포의 시간에 따른 반응을 Fig. 1, 3, 5, 6에 각각 나타내었다. 이 그림들은 세 부분으로 나뉘어지는데, 첫 번째는 광산란법⁷⁾으로 얻어진 기포의 반경-시간 곡선이다. 두 번째는 기포 운동과 초음파사이의 유한한 지연시간을 고려해 기포내 가스에 대한 Navier-Stokes 방정식의 해와 함께 Keller-Miksis 방정식(KMNS)을 이용하여 얻어진 계산 결과이다. 세 번째는 지연시간을 고려하지 않은 즉, $r=0$ 인 경우 RP를 이용하여 얻어진 것이다.

Fig. 1에는 $R_0=1.3 \mu\text{m}$, $P_A=1.12 \text{ atm}$ 의 경우, 첫 번째 기포 붕괴 이후에 세 번의 되튐 횟수를 보여주고 있다. 그러나 지연시간을 고려하지 않은 경우의 RP에 의하여 얻어진 계산 결과에서는 이러한 되튐 현상은 나타나지 않는다. $0.87 \mu\text{s}$ 의 지연시간을 사용하고 KMNS를 이용하여 얻어진 결과에서는 여러 번의 되튐 현상을 보여주지만, 첫 번째 기포 붕괴의 시점과 각 되튐 간의 시간 간격이 측정된 결과와는 상당히 다른 양상을 보이고 있다. 그러나 Fig. 2에는 $2.64 \mu\text{s}$ 의 지연시간, 즉 특성주파수를 $3.61 \times 10^6 \text{ Hz}$ 을 사용하고 KMNS를 이용하여 얻어진 결과로서 측정된 결과와 매우 유사한 기포의 거동을 보여주고 있다. 이와 같은 결과는 초음파장하에서 미소기포의 거동에 대하여 기포의 크기와 초음파 사이의 지연시간이 커다란 영향을 미치고 있음을 나타내는 것이다.

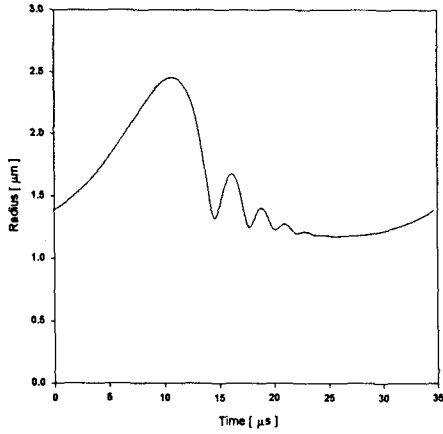
Fig. 3에 보여지는 것처럼 $R_0=1.4 \mu\text{m}$, $P_A=1.15 \text{ atm}$ 일 때의 기포 거동에 대해서도 위의 경우와 같은 해석이 가능하다. $1.94 \mu\text{s}$ 의 지연시간을 사용하여 얻어진 시간에 따른 기포 반경의 곡선은 Fig. 4에 보여지는 바와 같이 실제의 기포 거동과 같음을 알 수 있다.

위의 두 경우로부터 기포의 평형반경이 증가하면 초음파에 대한 기포의 지연시간은 단축된다는 것을 알 수 있다.

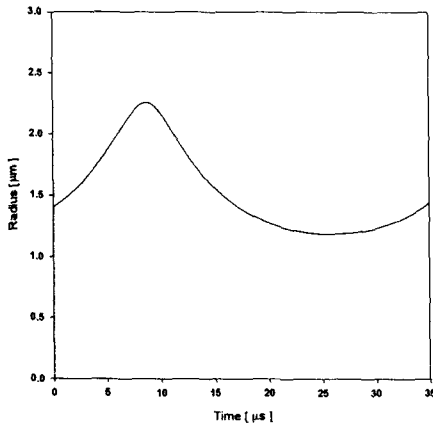
SL 조건에 조금 못 미치는 $R_0=3.2 \mu\text{m}$, $P_A=1.2 \text{ atm}$ 인 경우에서도 Fig. 5에 보여지는 것처럼 $0.68 \mu\text{s}$ 의 지연시간을 사용하고 KMNS를 이용하여 얻어진 결과는 실험적으로 얻어진 기포 거동을 잘 묘사할 수 있음을 알 수 있다. 계산된 최대 기포 크기, 첫 번째 기포 붕괴 이후의 되튐운동 횟수, 주기의 시점부터 첫 번째 기포 붕괴까지의 경과시간 모두가 측정된 결과와 잘 일치되고 있음을 알 수 있다. 하지만, 지연 시간을



(a)



(b)



(c)

Fig. 3. Radius-time curve for air bubble of $R_0=1.4 \mu\text{m}$ at $P_A=1.15 \text{ atm}$ and $f=28.84 \text{ kHz}$

(a) observed data

(b) calculated one by KMNS with relaxation time of $0.87 \mu\text{s}$

(c) calculated values by RP with $\tau=0$.

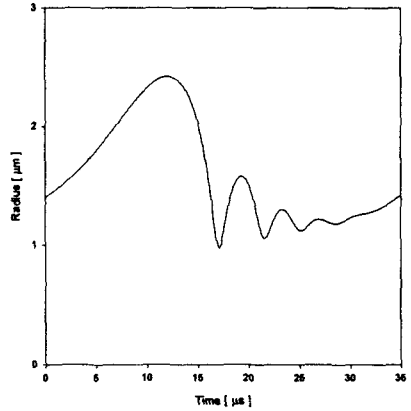


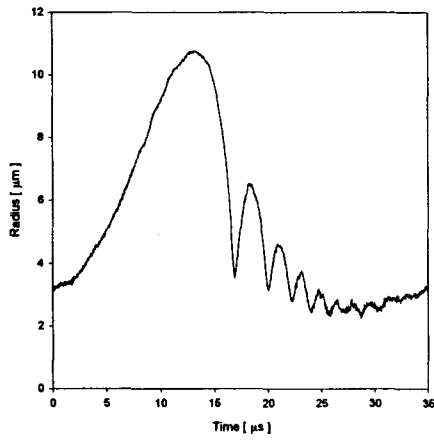
Fig. 4. Calculated radius-time curve for the air bubble case shown in Fig. 3 with $\tau=1.94 \mu\text{s}$.

고려하지 않고 RP를 이용하여 얻어진 계산 결과는 최대 기포 크기를 지나치게 크게 예상하고 있으며, 첫 번째 기포 붕괴 이후의 되튐 현상도 측정된 결과와는 상당히 다른 양상을 보이고 있다.

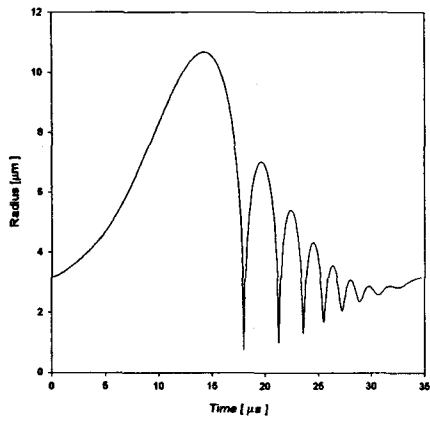
SL이 발생하는 경우, 즉 $R_0=5.4 \mu\text{m}$, $P_A=1.37 \text{ atm}$ 일 때, $0.46 \mu\text{s}$ 의 지연시간을 사용하고 KMNS를 이용하여 얻어진 계산 결과보다 광산란법으로부터 얻어진 최대 기포반경이 더 큰 것으로 Fig. 6에 보여진다. 이는 광산란법으로부터 얻어진 데이터로 최대 기포 반경을 계산할 때, 비례지수 값을 실험에서 얻은⁷⁾ 0.45 대신에 Mie 산란 이론의 0.5를 사용했기 때문이다²⁾. 또 다른 가능성은 계산에 보다 긴 지연시간을 사용했기 때문일 수도 있다. 사실, Fig. 7에 보여지는 것처럼 $0.21 \mu\text{s}$ 의 지연시간을 사용하고 KMNS를 이용하여 얻어진 계산 결과는 측정된 기포의 거동과 상당히 유사하다. 그러나 지연시간을 고려하지 않고 RP를 이용하여 얻어진 계산 결과는 Fig. 6(c)에 나타난 것처럼 최대 기포 크기를 지나치게 크게 예상하고 있음을 알 수 있다.

보다 작은 평형 반경의 기포에 대한 거동을 해석하기 위하여 보다 긴 지연시간이 필요하다는 것은 Fig. 8에 보여지는 $R_0=0.8 \mu\text{m}$, $P_A=1.10 \text{ atm}$ 의 경우에 의하여 확실하게 알 수 있다. 앞의 예들보다 상당히 긴 $4.08 \mu\text{s}$ 의 지연시간을 사용하여 얻어진 기포의 거동은 측정된 것과 유사한 양상을 보이고 있다.

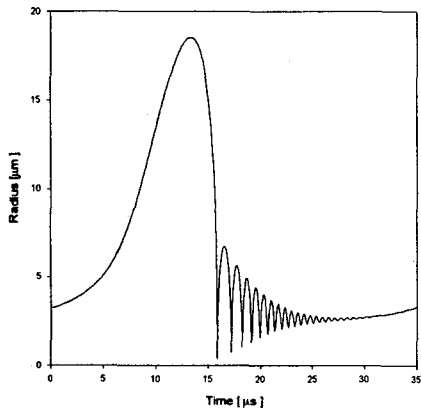
주변 액체와 기포내 가스와의 열교환에 기인하여 감쇠된 기포 진동은 엔트로피 생성에 의한 사용 에너지 손실을 나타낸다. 그러나 RP를 이용한 기포 거동을 해석하는 경우와 같이⁴⁾ $P_b V^m = \text{const.}$ 형태의 폴리트로픽 관계를 사용하는 비선형 기포 해석은 $P_b dV$ 가 완전 미분형태이어서 한 주기에 대한 적분이 상쇄되기 때문에 이러한 열적 감쇠현상을 고려할 수 없다. 그러나 폴리트로픽 지수를 사용하여 RP로부터 얻어진 기포 거동, 그리고 기포벽에서 열전도를 고려한 본 연구에서 사용한 방법(KMNS)으로 얻어진 기포 거동과의 차이점은 기포붕괴 이후의 되튐 현상의 차이를 제외하면 어떠한 차이도 없다. 따라서 기포 내부의 gas와 주변의 액체와의 제한된 열교환에 기인한 열적 감쇠는 초음파장에서 진동하는 미소기포의 경우 중요한 것은 아님을 알 수 있다. 보다 중요한 것은 전형적인 비선형성을 나타내는 미소기포의 가진음파에 대한 반응함수임을 알 수 있다.



(a)



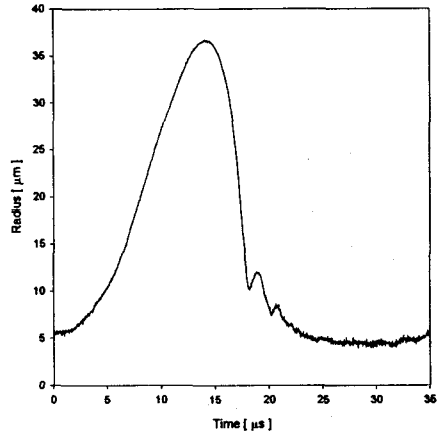
(b)



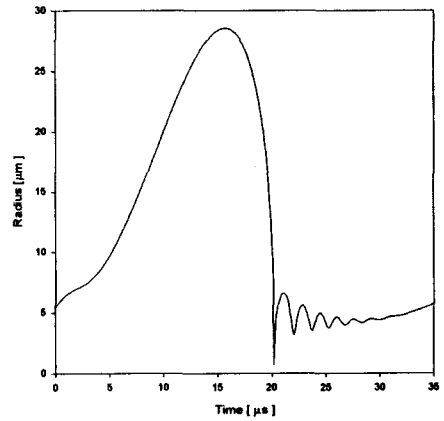
(c)

Fig. 5. Radius-time curve for air bubble of $R_0=3.2 \mu\text{m}$ at $P_A=1.2 \text{ atm}$ and $f=28.84 \text{ kHz}$

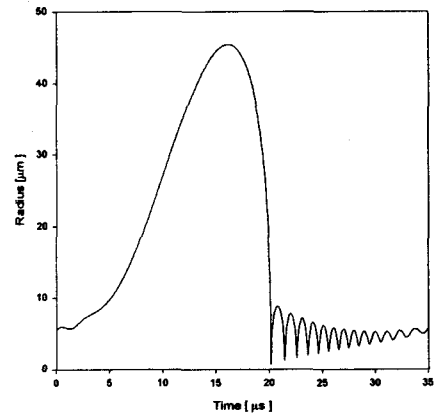
- (a) observed data
- (b) calculated one by KMNS with relaxation time of $0.68 \mu\text{s}$
- (c) calculated values by RP with $\tau=0$



(a)



(b)



(c)

Fig. 6. Radius-time curve for air bubble of $R_0=5.4 \mu\text{m}$ at $P_A=1.37 \text{ atm}$ and $f=28.84 \text{ kHz}$

- (a) observed data
- (b) calculated one by KMNS with relaxation time of $0.46 \mu\text{s}$
- (c) calculated values by RP with $\tau=0$

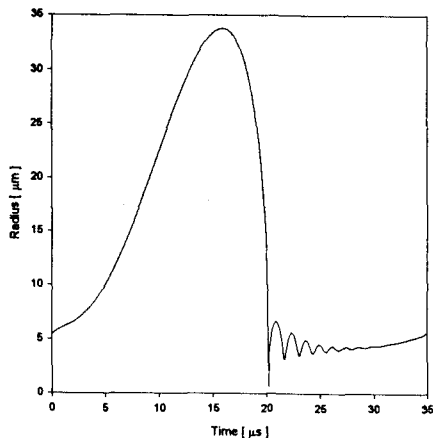
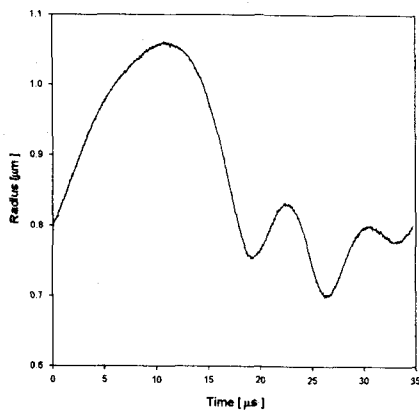
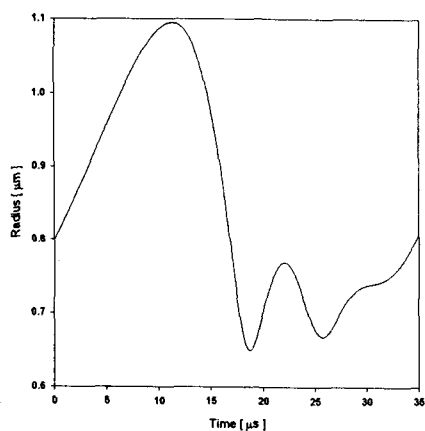


Fig. 7. Calculated radius-time curve for the air bubble case shown in Fig. 6 with $\tau=0.21 \mu\text{s}$.



(a)



(b)

Fig. 8. Radius-time curve for air bubble of $R_0=0.8 \mu\text{m}$ at $P_A=1.10 \text{ atm}$ and $f=28.84 \text{ kHz}$

(a) observed data

(b) calculated one by KMNS with relaxation time of $4.08 \mu\text{s}$

5. 결론

본 연구에서는 초음파장하에서 미소기포의 진동, 즉 진형적인 비선형 진동은 가진된 초음파의 위상과 같이 움직이지 않는다는 것을 밝혔다. 오히려 기포는 가진된 가진력에 지연시간을 두고 진동한다. 이러한 결과로 지연시간을 고려하지 않고 낮은 초음파 주파수에서 계산한 것만큼 팽창비가 크지 않음을 알 수 있다. 기포와 가진된 초음파 사이의 유한한 지연시간을 고려하여 Navier-Stokes 방정식의 해석해와 함께 Keller-Miksis 방정식을 수치적으로 계산함으로써 빛을 발산하는 기포의 거동을 적절하게 해석할 수 있음을 알았다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 특정목적연구비의 지원(과제번호 1999-1-304-002-5)으로 행해진 연구임.

참고문헌

- Lauterborn, W. and Cramer, E., "Subharmonic route to chaos observed in acoustics", J. Acous. Soc. Am., vol. 47, pp. 1445-1448, 1991.
- Barber, B. P. and Putterman, S.J., "Light scattering measurements of the repetitive supersonic implosion of a sonoluminescing bubble", Phys. Rev. Lett., vol. 69, pp. 3839-3842, 1992.
- Weninger, K. R., Barber, B. P. and Putterman, S.J., "Pulsed Mie scattering measurements of the collapse of a sonoluminescing bubble", Phys. Rev. Lett., vol. 78, pp. 1799-1802, 1997.
- Löfstedt, R., Barber, B.P. and Putterman, S.J., "Toward a hydrodynamics theory of sonoluminescence," Phys. Fluids vol. A5, pp. 2911-2928, 1993.
- Keller, J. B. and Miksis, M., "Bubble oscillations of large amplitude," J. Acoust. Soc. Am., vol. 68, pp. 628-633, 1980.
- Holt, R. G. and Crum, L.A., "Acoustically forced oscillations of air bubble in water : experimental results", J. Acoust. Soc. Am., vol. 91, pp. 1924-1932, 1992.
- Kim, B., Jeon, J. and Kwak, H., "Stability and selective bifurcation for gas bubble oscillating under ultrasound", J. Phys. Soc. Jpn., vol. 68, pp. 1197-1204, 1997.
- Jun, J. and Kwak, H., "Gravitational collapse of Newtonian stars", Int. J. Mod. Phys. D, vol. 9, pp. 35-42, 2000.
- Kwak, H. and Yang, H., "An aspect of sonoluminescence from hydrodynamic theory," J. Phys. Soc. Jpn., vol. 64, pp. 1980-1992, 1995.
- Kwak, H. and Na, "Hydrodynamic solutions for a sonoluminescing gas bubble," Phys. Rev. Lett., vol. 77, pp. 4454-4457, 1996.
- Boulos, M. I., Fauchais, P. and Pfender, E., Thermal Plasma, Plenum Press, New York, 1994.
- Yasui, K., "Alternative model of single-bubble sonoluminescence," Phys. Rev. E., vol. 56, pp. 6750-6760, 1997.
- Kwak, H., Lee, J. and Karng, S., "Bubble dynamics for single bubble sonoluminescence," Submitted for publication, 2000.