

다공성 물질 안에서의 자연대류 현상에 대한 열역학적 국소평형상태 가정의 고찰

김인선* · 남진현* · 김찬중**

An Investigation on Local Thermodynamic Equilibrium Assumption of Natural Convection in a Porous Medium

In Seon Kim, Jin Hyun Nam and Charn-Jung Kim

Key Words: porous medium(다공성 물질), local thermodynamic equilibrium(열역학적 국소평형), natural convection(자연대류)

Abstract

A numerical study on natural convection in a vertical square cavity filled with a porous medium is carried out with Brinkman-Forchheimer-extended Darcy flow model, and the validity of local thermodynamic equilibrium assumption is studied. The local thermodynamic equilibrium refers to the state in which a single temperature can be used to describe a heat transfer process in a multiphase system. With this assumption, the analysis is greatly simplified because only one equation is needed to describe the heat transfer process. But prior to using this assumption, it is necessary to know in what conditions the assumption can be used. The numerical results of this study reveal that large temperature difference between fluid phase and solid phase exists near wall region, particularly when the convection becomes dominant over conduction. And the influence of flow parameters such as fluid Rayleigh number, fluid Prandtl number, dimensionless particle diameter and conductivity ratio are investigated.

1. 서론

다공성 물질이란 고체 사이에 공극(pore)이 형성되어 있어 그 사이로 유체의 흐름이 가능한 물질이다. 이러한 다공성 물질은 화학공정 중의 촉매를 이용한 화학반응기, 석유 및 핵폐기물의 저장, 건물의 단열, 지하수 및 지하침출수의 유동, 지열시스템 등에서 나타나는 운동량 및 열전달 현상과 관련하여 활발한 연구의 대상이 되어 왔다. 특히 최근에는 밀집형 열교환기의 개발에 따른 편 성능의 향상문제, 마이크로칩의 고집적화에 따른 단위면적당의 빌열량 증가 및 냉각문제 등과 관련하여 단위부피당 유체와 접촉하는 표면적(비표면적)이 넓은 다공성 물질을 이용하려는 시도가 활발해지고 있다.⁽¹⁾

다공성 물질 안에서 자연대류 현상에 대한 초기

의 이론적인 연구들은 Darcy의 법칙을 따르는 운동량 방정식과 에너지 방정식에 바탕을 두고 있다.^(2,3) 그러나 Darcy의 법칙은 벽경계에 의한 전단응력의 영향을 무시할 수 있는 낮은 투과율의 다공성 물질이나 관성 효과를 무시할 수 있는 저속도 유동에만 적용될 수 있으며, 대부분의 경우 실제 유동 및 열전달은 Darcy의 법칙이 예측하는 바와는 많은 차이가 난다.⁽⁴⁾

Forchheimer가 관성효과를 설명하기 위해 관성항을, 또 Brinkman이 벽경계에 의한 전단응력의 영향을 처리하기 위해 벽면 전단응력항을 운동량 방정식에 포함시킨 아래로, 다공성 물질의 운동량 방정식은 순수유체에 대한 Navier-Stokes 방정식과 비슷한 형태로 변화하여 왔다. 이러한 모델들 중 가장 대표적인 것이 Brinkman-Forchheimer-extended Darcy 모델로, 이 BFD 모델을 사용하여 강제대류와 자연대류에 관한 많은 연구가 성공적으로 진행되어 왔다.⁽⁵⁻⁸⁾

* 서울대 대학원

** 서울대 기계항공공학부

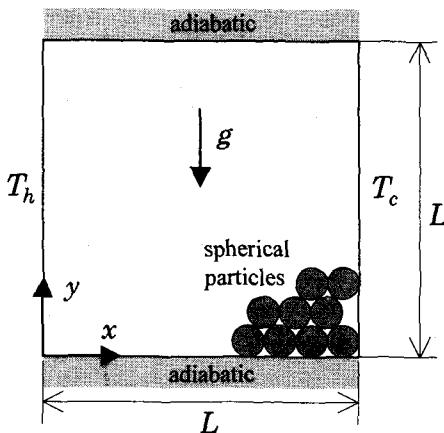


Fig. 1 Schematic of problem definition of natural convection in a vertical square porous cavity considered in this study

하지만 앞서 언급한 연구들은 모두 다공성 물질을 구성하고 있는 유체와 고체가 열적 평형상태에 있다는 열역학적 국소평형상태 가정을 도입하여 운동량 및 열전달 현상을 해석하였다. 그러나 그들의 연구에서 가정의 타당성에 대한 검증은 미흡한 실정이다. 다만 Amiri와 Vafai⁽⁹⁾가 2차원 채널에서의 강제대류현상에 대해 BFD 모델을 사용하여 유체와 고체가 열역학적 국소평형상태에 있지 않다는 가정을 도입하여 해석을 시도하였다. 그렇지만 그들의 연구에서도 열역학적 국소평형상태 가정에 대한 검증이 대상이 아니었기 때문에, 벽면 근처에서 가정의 타당성이 만족되지 않는다는 언급이 있을 뿐 구체적인 원인이나 경향, 무차원 인수의 변화에 따른 양상 등에 대해서는 자세하게 언급이 되어있지 않다.

따라서 본 연구에서는 열역학적 국소평형상태의 가정의 타당성 및 가정에 영향을 주는 인자를 알아보기 위해 구형입자로 가득 채워진 수직정사각공동 내부의 자연대류현상에 대해 고찰한다. 해석을 위하여 본 연구는 BFD 모델 및 다공성 물질을 구성하고 있는 유체와 고체에 대한 두 개의 에너지 방정식이 도입하여 해석하며, 또한 공극율의 변화와 thermal dispersion 현상도 고려한다. 해석은 지배방정식을 무차원화하여 얻은 무차원 인수들을 변화시켜 가면서 가정의 타당성을 대하여 고찰하며, 그 결과로 가정의 타당성을 전체적으로 살펴볼 수 있는 도식은 제시할 것이다. 이 도식은 열역학적 국소평형상태라는 가정을 자연대류 현상의 해석에 적용하는데 있어서, 그 타당성을 판단하는데 하나의 기준이 될 수 있다.

2. 해석

2.1 해석대상 및 모델

본 연구에서 고려하고 있는 문제는 구형의 입자들이 층을 이루면서 채워져 있는 이차원 수직정사각공동 안에서의 자연대류현상이며, 이의 기하학적 형상 및 좌표계를 Fig. 1에 나타내었다. Fig. 1에서 보듯이 양쪽에 있는 두 개의 수직한 벽은 서로 다른 온도로 유지되어 있고, 위/아래의 평행한 벽은 단열되어 있다.

다음은 지배방정식을 유도하기 위해 도입된 가정들이다.

1 이차원, 정상상태, 비압축성, 층류 유동이다.

2 다공성물질을 구성하고 있는 유체와 고체의 온도는 다르다.

3 부시네스크 근사가 유효하며, 따라서 부력함을 나타내는 밀도 외의 다른 물성은 일정하다.

4 공극율이나 유효열전도계수는 구형입자의 직경이나 벽면으로부터의 수직거리 및 다른 물리량에 따라 변화할 수 있다.

5 수직정사각공동에 채워져 있는 구형의 입자들은 크기와 모양이 일정하다.

6 구형의 입자들 사이에서 일어나는 복사효과는 무시할 수 있다.

2.2 지배방정식

다공성 물질을 흐르는 유동에 대한 지배방정식은 미소 검사체적에 바탕을 둔 보존법칙이 아니라 다공성 물질을 대표할 수 있는 거시 검사체적에 바탕을 둔 평균적 개념의 보존법칙을 통하여 얻어진다. 그러나, 이러한 체적평균기법의 적용시에는 온도장이나 속도장에 대한 세부사항이 어느 정도 간과되기 때문에 실험에 바탕을 둔 관계식을 부가적으로 필요하게 된다.

전 절에 주어진 가정을 바탕으로 하여 평균체적기법과 실험식에 의하여 얻어진 지배방정식은 다음과 같다.

○ 연속 방정식

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

○ 운동량 방정식

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_f \frac{\vec{v}}{\epsilon} \frac{\vec{v}}{\epsilon}) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 (\frac{\vec{v}}{\epsilon}) \\ &+ \rho_f \vec{g} \beta (T_f - T_{ref}) - (\frac{\mu}{K} + \frac{\rho_f C_F}{\sqrt{K}} |\vec{v}|) \vec{v} \end{aligned} \quad (2)$$

○ 유체의 에너지 방정식

$$\nabla \cdot (\rho_f \vec{v} T_f) = \nabla \cdot \left(\frac{k_{eff}}{c_{pf}} \nabla T_f \right) + \frac{h_s a_{sf}}{c_{ps}} (T_s - T_f) \quad (3)$$

○ 고체의 에너지 방정식

$$\nabla \cdot \left(\frac{k_{eff}}{c_{ps}} \nabla T_s \right) - \frac{h_s a_{sf}}{c_{ps}} (T_s - T_f) = 0 \quad (4)$$

위에서 식 (2)의 운동량 방정식은 BFD 모델로서 $\mu/K\vec{v}$, $\mu\nabla^2(\vec{v}/\epsilon)$, $\rho_f C_F/\sqrt{K} |\vec{v}| \vec{v}$ 는 각각 Darcy 항, Brinkman 항, Forchheimer 항이다. 위의 식 (2)에서 다공성 물질에만 해당하는 저항항, 즉 Darcy 항과 Forchheimer 항을 제외하면 형태에 있어서 순수유체의 Navier-Stokes 방정식과 비슷하다. 또 유체와 고체에 대한 에너지 방정식인 식 (3)과 (4)도 유체와 고체 사이의 열교환항을 제외하고 국소평형상태를 가정하면 순수유체에 대한 에너지 방정식과 형태가 비슷해진다.

위에서 사용된 다공성 물질의 투과율과 관성계수는 실험에 의해 얻어진 결과에 바탕을 두고 있으며 다음과 같이 표현되어진다.

$$K = \frac{\epsilon^3 d_p^2}{a(1-\epsilon)^2} \quad (5)$$

$$C_F = \frac{b}{\sqrt{a} \epsilon^{3/2}} \quad (6)$$

여기서 d_p 는 수직정사각공동에 채워져 있는 구형입자의 직경을 나타내며, a 와 b 는 각각 실험에 의해 얻어지는 상수로서 본 연구에서는 Cheng et al.⁽¹⁰⁾에 의해 얻어진 $a=215$, $b=1.92$ 의 값을 사용하였다.

다공성 물질을 구성하고 있는 유체와 고체에 대한 에너지 방정식, 식 (3)과 (4)에서 공통적으로 나타나는 비표면적 a_{sf} 는 기하학적 형상으로부터 유도되는데 Vafai and Sozen⁽¹¹⁾에 의하면 다음과 같이 표현되어진다.

$$a_{sf} = \frac{6(1-\epsilon)}{d_p} \quad (7)$$

유체와 고체 사이에서의 열교환을 나타내는 열전달계수 h_s 는 다음과 같이 Wakao et al.⁽¹²⁾의 실현식을 사용하였다.

$$h_s = k_f \left[2 + 1.1 \text{Pr}_f^{1/3} \left(\frac{\rho_f |\vec{v}| d_p}{\mu} \right)^{0.6} \right] / d_p \quad (8)$$

유동의 속도가 빨라짐에 따라 관성효과에 의해 유동의 재순환 및 박리현상이 생겨나고, 이러한 유동의 혼합은 추가적인 열전달을 발생시키는데 이러한 현상을 thermal dispersion이라고 한다. 따라서 이 현상은 다공성 물질 안에 존재하는 운도 구배와 관련되어 추가적인 확산으로 취급되어 유효열전도계수를 구성한다. 본 연구에서는 Cheng과 Hsu⁽¹³⁾에 의해 주어진 식을 사용한다. 다음은 각각 유체와 고체에 대한 유효 열전도계수이다.

$$k_{eff} = \epsilon k_f + C \rho_f c_{pf} |\vec{v}| l / d_p \quad (9)$$

$$k_{eff} = (1-\epsilon) k_s \quad (10)$$

여기서 C 는 dispersivity value로서 실험에 의해 결정되어지는 상수이며 본 연구에서는 Cheng과 Hsu⁽¹³⁾에 의해 주어진 0.02의 값을 사용하였다. l 은 dispersive length로서 다음과 같다.

$$l = \frac{(1-\epsilon)}{\epsilon} \quad (11)$$

실험에 의하면 구형입자들에 의해 구성되어 있는 다공성 물질의 경우 공극율은 벽면으로부터의 거리에 지수함수적으로 감소하는 경향을 나타내는데 이를 수학적으로 표현하면 다음과 같다.

$$\epsilon = \epsilon_\infty + (\epsilon_o - \epsilon_\infty) \exp(-Nx/d_p) \quad (12)$$

여기서 ϵ_∞ 는 벽면의 영향을 무시할 수 있는 곳에서의 공극율(free stream porosity), ϵ_o 는 벽면에서의 공극율, N 은 실험에 의해 결정되어지는 상수로서 본 연구에서는 각각 0.36, 0.9, 7의 값을 사용하였다.⁽⁷⁾

2.3 경계조건

본 연구에서 고려하고 있는 문제는 벽면에서 점착조건을 만족한다. 이때, 양쪽의 수직한 벽은 균일하지만 서로 다른 온도로 유지되어 있고 위/아래의 평행한 벽은 단열되어 있다. 따라서 경계조건은 다음과 같다.

$$u(x, y=0) = u(x, y=L) = 0 \quad (13a)$$

$$v(x, y=0) = v(x, y=L) = 0 \quad (13b)$$

$$u(x=0, y) = u(x=L, y) = 0 \quad (13c)$$

$$v(x=0, y) = v(x=L, y) = 0 \quad (13d)$$

$$T_f(x=0, y) = T_s(x=0, y) = T_h \quad (14a)$$

$$T_f(x=L, y) = T_s(x=L, y) = T_c \quad (14b)$$

$$\left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{y=L} = 0 \quad (14c)$$

$$\left. \frac{\partial T_s}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial T_s}{\partial y} \right|_{y=L} = 0 \quad (14d)$$

여기서 L 은 수직정사각공동이 가지는 한 변의 길이이다.

2.4 무차원 인수 및 수치해석

수직정사각공동 안에서의 자연대류현상에 영향을 주는 인자들을 알아보기 위해 앞에서 주어진 지배방정식 및 경계조건을 무차원화하였다. 무차원화를 위해서 길이에 대해서는 L , 온도에 대해서는 $T_h - T_c$, 속도에 대해서는 a_f/L , 압력에 대해서는 $\rho_f a_f^2 / L^2$ 등과 같은 기준척도를 도입하였다. 무차원화 결과, 구형입자로 가득 찬 수직정사각공동 내의 자연대류는 다음의 다섯 개의 무차원 인수에 의해서 영향을 받음을 확인하였다.

$$\text{Rayleigh number } Ra_f = \frac{g\beta(T_h - T_c)L^3}{\nu a_f}$$

$$\text{Prandtl number } Pr_f = \frac{\nu}{a_f} = \frac{\mu c_{pf}}{k_f}$$

$$\text{Dimensionless particle diameter } \gamma = \frac{d_p}{L}$$

$$\text{Porosity } \epsilon$$

$$\text{Conductivity ratio } \lambda = \frac{k_s}{k_f}$$

위의 다섯 개의 무차원인수 중 Ra_f , Pr_f 는 유체의 열적상태량에 의존하는 인수로서 다공성 물질 자체의 구조나 고체의 열적상태량에는 의존하지 않는다. 반면에 γ , ϵ 는 다공성물질 자체의 구조에 의존하며 유체와 고체의 열역학적 물성에는 영향을 받지 않는다. 그러나 λ 는 유체와 고체의 열적상태량에 모두 의존한다.

무차원화로 얻어진 지배방정식 및 경계조건은 비엇갈림격자계와 유한체적법을 이용하여 이산화되었으며, SIMPLE 알고리즘을 사용하여 속도장과 압력장을 해석하였다. 대류항과 확산항의 결합은 상류도식과 중앙차분도식을 적절히 혼합한 flux blending 도식을 사용하였다.

수치해석에 사용된 격자계는 벽면에서의 점착조건과 벽면으로부터의 수직거리에 따른 공극율 변화를 고려하여 벽면 근처에서 간격을 조밀하게 구성한 80×80 의 비균일 격자계를 사용하였다.

3. 결과

다양한 조건하에서의 다공성 물질의 열역학적 국소평형상태 가정의 타당성을 검증하기 위해, 무차원 인수인 Rayleigh 수, Prandtl 수, 무차원 입자직경 및 열전도도비를 변화시켜하면서 수직정사각공동 안에서의 자연대류현상을 고찰한다. 국소평형가정의 타당성에 대한 지표로서 유체와 고체의 온도를 비교하여 다음과 같이 상대온도차를 정의하였으며, 가정의 타당성을 Table 1에서처럼 등급별로 분류하였다.

$$\% TD = \frac{|T_f - T_s|}{(T_h - T_c)} \times 100 \quad (15)$$

Table 1 Classification of suitability of one-equation analysis for energy

% Temperature difference	Classification
~ 1%	very good
1% ~ 5%	good
5% ~ 10%	fair
10% ~ 15%	poor
15% ~	very poor

위에서 very poor에 가까울수록 국소평형상태 가정이 점점 타당성을 잃게 되며, 이 경우 다공성 물질을 구성하는 유체와 고체에 대한 두 개의 에너지 방정식이 모두 고려되어야 한다.

우선 Rayleigh 수와 무차원 입자직경이 LTE 가정의 타당성에 미치는 영향을 살펴보기 위해 $\epsilon_\infty = 0.36$, $Pr_f = 1$, $\lambda = 1$, $A = 1$ 로 고정하고 Ra_f 와 γ 의 값들을 변화시켜 계산하였다.

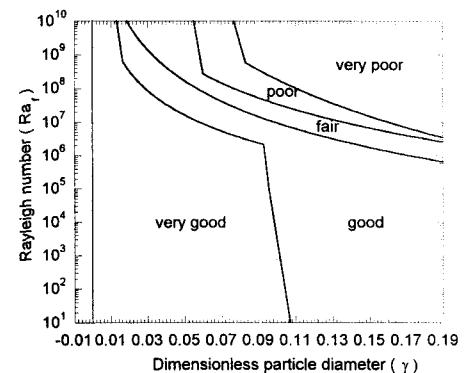


Fig. 2 Effect of Rayleigh number and dimensionless particle diameter on LTE assumption; $\epsilon_\infty = 0.36$, $Pr_f = 1$, $\lambda = 1$, $A = 1$

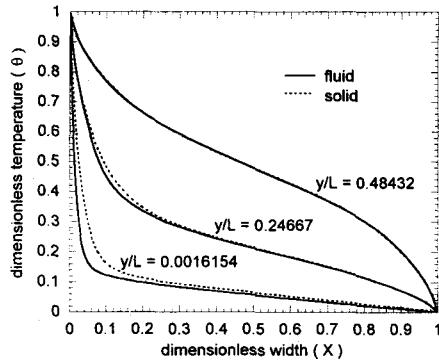


Fig. 3 Temperature distribution of fluid and solid at various horizontal locations; $\epsilon_\infty = 0.36$, $\Pr_f = 1$, $\lambda = 1$, $A = 1$, $\text{Ra}_f = 10^7$, $\gamma = 0.19$

Fig. 2에서 보듯이 Ra_f 와 γ 모두 열역학적 국소평형상태의 가정에 영향을 미치는 인자임을 알 수 있다. 또한 그 값들이 커짐에 따라 가정이 타당성을 잃어가고 있음도 알 수 있다. 이러한 현상은 Ra_f 와 γ 가 커지면 부력항의 상대적인 영향이 커지면서 유체의 속도가 빨라지기 때문이다. 따라서 이렇게 빨라진 유동은 열전달 메카니즘을 전도에서 대류로 바꾸게 되며 벽면 근처에서의 온도구배가 커지게 된다.

Fig. 3은 $\text{Ra}_f = 10^7$ 에 대해 γ 가 0.19인 경우의 여러 수평선상의 온도분포를 나타낸 그림이다. 그 결과를 살펴보면 온도구배가 커지는 벽면 아래쪽 근처에서 온도차가 커짐을 확인할 수 있다. 이것은 대류에 의해 찬 유체의 유입이 있음을 의미하며 γ 가 커질수록 심화된다.

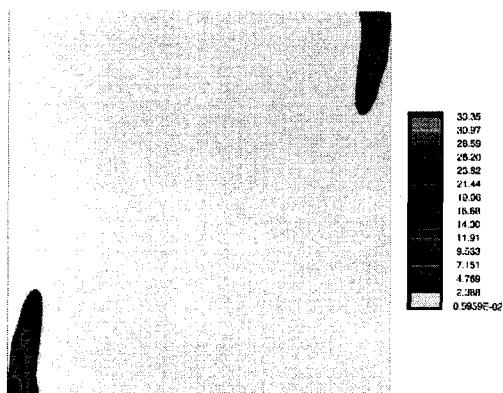


Fig. 4 Contour plots of relative temperature difference in percent; $\epsilon_\infty = 0.36$, $\lambda = 1$, $A = 1$, $\text{Ra}_f = 10^8$, $\gamma = 0.09$, $\Pr_f = 100$

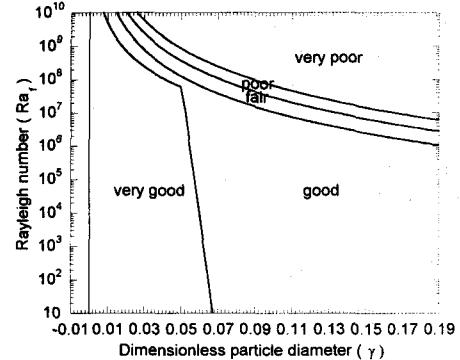


Fig. 5 Effect of conductivity ratio on LTE; $\epsilon_\infty = 0.36$, $\Pr_f = 1$, $\lambda = 10$, $A = 1$

다음으로 전체적인 온도차의 양상을 살펴보기 위해 $\text{Ra}_f = 10^8$, $\gamma = 0.09$ 로 고정시켜 놓고 \Pr_f 가 100일 때의 상대 온도차의 등고선을 Fig. 4에 나타내었다. 그림에서 좌측 벽면 아래와 우측벽면 위에서 온도차가 커짐을 알 수 있는데, 이것은 이 지점에서 벽면으로의 유체의 유입이 가장 크기 때문이다. 또한 자연대류의 온도분포에서 이 부분이 가장 온도구배가 큰 지점이다.

다음으로 Fig. 5에 열전도도비의 영향을 알아보기 위하여 Fig. 2의 경우와는 달르게 $\lambda = 10$ 에 대한 결과를 등급별로 구분하여 전체적인 도식으로 나타내었다. 그림에서 λ 값이 10배로 커지면 열전달 메카니즘이 전도에서 대류로 전이되는 현상이 빨라지며 큰 Ra_f 와 γ 값에 대해 열역학적 국소평형상태의 가정에 대한 타당성이 점점 약해짐을 알 수 있다. 그 이유는 고체의 열전도도가 커지는 경우 벽면 근처에서 고체 온도장은 온도구배를 더욱 완만해지고 그 결과 유체와 고체의 온도 사이에 차이를 심화시키기 때문이다.

다음으로 열역학적 국소평형가정에 대한 유체의 Prandtl 수의 영향을 살펴보기 위하여 \Pr_f 를 100으로 변화시켜 해석을 수행하였으며 그 결과를 Fig. 6에 나타내었다. Fig. 6에서 보여진 결과는 앞서의 Fig. 2의 결과와 비슷한 경향을 나타내고 있다. 두 결과의 비교에서 \Pr_f 가 100인 경우가 온도차가 큰 영역이 조금 커지는 것을 관찰할 수 있다. 이것은 \Pr_f 값이 커질수록 유체내에서 전도보다는 대류에 의한 열전달이 더 지배적이 되고 이로 인해 벽면 근처의 온도구배가 큰 지점을 중심으로 유체와 고체의 온도장에 차이가 생기기 때문이다.

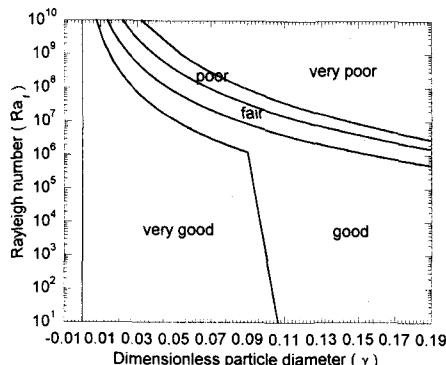


Fig. 6 Effect of Prandtl number on LTE assumption; $\epsilon_\infty = 0.36$, $Pr_f = 100$, $\lambda = 1$, $A = 1$

4. 결론

본 연구에서는 구형입자로 가득 찬 2차원 수직 정사각공동 안에서의 자연대류현상을 해석함으로서 열역학적 국소평형상태 적용의 타당성에 대하여 고찰하였다. 이를 위해 지배방정식을 무차원화하였으며 얻어진 무차원 인수 즉, Rayleigh 수, Prandtl 수, 무차원 입자직경, 열전도도비를 변화시켜 가면서 해석하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

공통적인 한 가지 현상은 수직정사각공동 안에서 일어나는 열전달 메카니즘이 전도에서 대류로 전이될수록, 벽면 근처 유체의 벽면방향으로 유입이 커지는 지점 또는 온도구배가 큰 지점들을 중심으로 유체와 고체의 온도차가 점점 커진다는 것이다. 즉, 대류의 강도가 커질수록 이러한 지점에서부터 열역학적 국소평형상태 가정이 타당성을 잃는다. 각 무차원 인수의 영향을 정리하면 Rayleigh 수와 무차원 입자직경이 커질수록, 열전도도비가 커질수록, Prandtl 수가 커질수록 국소평형상태 가정이 타당성을 잃는다.

참고문헌

- (1) 김진호, 강병하, 김서영, 이재현, 1998, 대한기계학회 1998년도 춘계학술대회논문집 B, pp. 206-211
- (2) J. E. Weber, 1975, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 18, pp. 569-573
- (3) K. L. Walker and G. M. Homsey, 1978, J. Fluid Mech., vol. 87, pp. 449-474
- (4) V. Prasad, F. Kulacki, and M. Keyhani, 1985,

J. Fluid Mech., vol. 150, pp. 89-119

- (5) D. Poullikakos and M. Kazmierczak, 1987, J. of Heat Transfer, vol. 109, pp. 653-662
- (6) K. Vafai and R. Thiagaraja, 1987, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 30, pp. 1391-1405
- (7) Shih-Wen Hsiao, 1998, Int. J. for Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, vol. 8, pp. 97-117
- (8) Chao-Kuang Chen, Shih-Wen Hsiao and P. Cheng, 1990, Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 17, pp. 431-448
- (9) A. Amiri and K. Vafai, 1994, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 37, pp. 939-954
- (10) P. Cheng, A. Chowdhury and C. T. Hsu, 1990, Proc. NATO Advanced Study Institute on Convective Heat and Mass Transfer in Porous Media, pp. 361-404
- (11) K. Vafai and M. Sozen, 1990, J. Heat Transfer, vol. 112, pp. 690-699
- (12) N. Wakao, S. Kaguei and T. Funazkri, 1979, Chem. Engng Sci., vol. 34, pp. 325-336
- (13) P. Cheng and C. T. Hsu, 1986, Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol. 13, pp. 613-625