

# 油壓 管路 內에서 流體 流動의 過渡 應答 特性에 關한 理論的 研究

김형준 · 정지철\* · 유영태\*\*

## A Characteristics of Transient fluid flow in a Hydraulic circular pipe

H. J. Kim, J.C. Jung and Y. T. Yoo

**Key Words:** Hydraulic transmission, Transient Response, Propagation number, Circular pipe

### Abstract

This paper is primarily directed toward analyzing the transient response characteristics in hydraulic pipe lines.

The exact solution to the transient response characteristics was obtained by using the complicated transfer function derived by Iberall.

The discrepancy with the exact and approximate is small, so the approximate solution is adopted to the theoretical one.

An equation was derived which describes the pressure times relationship that occurs at the end of volume terminated transmission line following a sudden pressure change at its inputs.

As a result, It is found that the density has relationship about the Wave Propagation is very useful in analyzing the transient response characteristics of hydraulic pipe lines.

The velocity of Pressure wave Propagation decreases as the density of fluid increased.

### 기호설명

$c_0$	: Acoustic Velocity	(m/sec)
$u(t)$	: Unit step Pulse	
$J_0$	: Bessel function	
$\sigma$	: Prandtl's Number	
$\Gamma$	: Wave Propagation Vector	
$p_m$	: Amplitude of Pipe	(m)
$Z(s)$	: Characteristics impedance	
$Y(s)$	: Shunt admittance	

### 1. 서론

관로 내를 유동하는 유체 중에서 외부환경의 변화에 대한 시간의 변화로 주어지는 과도현상에 의해서 유체에 전달되는 운동량은 순간적으로 매우 커지게 된다. 이러한 물리적 특성을 이해하는 것은 각종 관로로 구성되어있는 유압제어시스템을 설계하고 동력전달 관로망을 구성하는데 기본 요소가 된다.

전파속도는 파수벡터로 나타내며 파수벡터는 관로 내에서 유체가 전달되는 주파수 변화에 따른 파장의 변화에 대응하는 물리적 특성 값을 예측하게 한다.

유체 내 압력파의 전파속도는 짧은 시간 안에 큰 운동량의 변화로 관 벽면에 작용하는 충격력 뿐만 아니라 유압 관로로 구성된 유압기에 커다란 손상을 입힐 수도 있다. 그러므로 이에 대

\* 조선대학교 대학원

\*\* 조선대학교 공과대학 기계공학부

한 정밀한 실험이나 유동해석정보를 바탕으로 하는 새로운 최적설계기술을 도입할 필요가 있다.

지금까지 발표된 연구 논문을 살펴보면 E.L. HOLMBOE<sup>(1)</sup>는 액체 전달관에서 단일펄스의 전파와 수격현상에 대하여 연구한 바가 있다. 이어서 岡村健二郎<sup>(2)</sup>는 유압관로내에서 파동현상에 관하여 연구하였고, Katsuloshi SATO<sup>(3)</sup>는 공기압 전달관에서의 단일 펄스의 전파를 연구하였다. Ikurp IIMURA<sup>(4)</sup>는 공기압 측정용 센서의 측정공에 따른 주파수 응답에 대하여 발표하였다.

Shinichi YOKOTA<sup>(5)</sup>는 “원관의 입구영역에서의 진동류를 차분법에 의해 수식 해를 구하고 L.D.V. 유속계에 의하여 점성에 의한 압력강하와 유량과의 관계를 비교 연구하였다.

근래에 들어 기기의 정밀화, 고성능화 그리고 경제성의 요구에 따라, 각종 관로계의 동특성을 시뮬레이션 하게 되었고, 이에 따라 원형 관로내에서의 주파수 변화에 따른 응답특성에 대한 보다 정확한 해석을 필요로 하게 되었다.

본 연구에서는 각종 유체공급계통의 관로에서, 외부환경의 순간적인 변화에 따라 발생하는 과도응답을 관로 내의 압력과 전달을 지배하는 여러 가지 매개변수를 이용하여 이론적으로 해석하고 작동유체를 각각 물, 공기, 기름으로 하여 기존의 데이터를 이용하여 시간에 대한 압력의 변화, 과도응답의 형태와 진폭의 변화 등을 관의 길이와 반경을 변화시키면서 시뮬레이션 하고자 한다.

## 2. 이론 해석

관로에서 주파수에 대한 점성의 영향을 연구하기 위하여 다음의 연속 방정식과 운동량 방정식을 이용하였다.

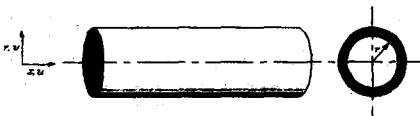


Fig. 1 Cylindrical coordinates and velocity components

수평으로 놓여진 원형 관 내부를 흐르는 중력을 무시한 압축성 Newton 유체의 비정상 축 대칭 유동에 대한 지배방정식인 운동량방정식과 에너지방정식은 Fig. 1에 나타낸 것과 같은 원통좌표

계에서 아래와 같이 정의된다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right] = 0 \quad (1)$$

$$\nu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2)$$

윗 식에서  $u$ 는 속도,  $\rho$ 는 밀도,  $\rho_0$ 는 평균밀도이며,  $x$ 는 축 방향의 좌표이고  $r$ 는 반경방향의 좌표이다.

운동량방정식에서 짧은 시간의 변화에 대하여 대류현상에 의한 영향과 점성의 영향은 무시하였으며 단성관에서 압축성 유체가 흐를 경우 상태방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dp}{\rho_0} = \frac{K}{\rho_0} \quad (3)$$

그리고, 관의 반지름을  $r$ 이라고 하고, 미소유량을  $q$  (flux)라 하면 연속방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = - \left[ \frac{K}{\pi r^2} \right] \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \quad (4)$$

위의 식들로부터 파수전파 벡터(Wave propagation vector)로 정의되는 식(5)를 관로내의 과도특성에 대한 주파수영역에서의 해석을 위하여  $s = j\omega$ 를 이용하여 정리하면 유량과 압력에 대한 식(6)의 전달행렬식을 얻게된다.

$$\delta = \frac{1}{\left[ \frac{2}{a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}(j)^{\frac{3}{2}}} \frac{J_1(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}})j^{\frac{3}{2}}}{J_0(a\sqrt{\frac{\omega}{\nu}})j^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta s}{c} l & -\frac{1}{\delta \rho c} \sin \frac{\delta s}{c} l \\ \delta \rho c \sin \frac{\delta s}{c} l & \cos \frac{\delta s}{c} l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

식 (6)은 다시 전파연산자인  $\Gamma(s)$ 와 특성 임피던스인  $Z_c$ 를 이용해 다음과 같이 정리 될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \Gamma(s)l & -Z_c(s) \sinh \Gamma(s)l \\ -\frac{1}{Z_c(s)} \sinh \Gamma(s)l & \cosh \Gamma(s)l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_2 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기에서 전파연산자  $\Gamma(s)$ 는 Fig.2와 같은 원형 관로에 대한 기본적인 모델에서 식(8)과 같이 특성 Impedance인  $Z(s)$ 와 Shunt admittance인

$Y(s)$ 의 함수로 주어진다.

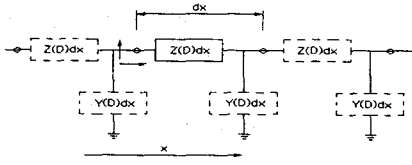


Fig. 2 Elemental model of uniform transmission line

$$\Gamma(s) = \sqrt{Y(s)Z(s)} \quad (8)$$

여기서 직렬임피던스  $Z(s)$ 는 압력구배에 대한 질량유량의 영향을 나타낸 것으로 식(9)로 정리된다.

$$Z(s) = \frac{1}{\pi a^2} \frac{s}{1 - \frac{2J_1\left(ja\sqrt{\frac{s}{\nu_0}}\right)}{ja\sqrt{\frac{s}{\nu_0}}J_0\left(ja\sqrt{\frac{s}{\nu_0}}\right)}} \quad (9)$$

그리고 shunt admittance인  $Y(s)$ 는 관로에서의 압축성 비정상상태 유체의 열전달 현상을 고려함으로써 얻을 수 있다.

$$Y(s) = -\pi a^2 s \frac{\rho_0}{kP_0} \left\{ 1 + \frac{2(k-1)J_1(ja\sqrt{\sigma s/\nu})}{(ja\sqrt{\sigma s/\nu})J_0(ja\sqrt{\sigma s/\nu})} \right\} \quad (10)$$

전파연산자  $\Gamma(s)$ 를 얻기 위해 식(10)에 식(9)와 식(10)을 대입하면 식(11)과 같이 된다.

$$\Gamma(s) = \frac{s}{c_0} \left[ \frac{1 + \frac{2(k-1)J_1(ja\sqrt{\sigma_0/\nu_0})}{ja\sqrt{\sigma_0/\nu_0}J_0(ja\sqrt{s/\nu_0})}}{1 - \frac{2J_1(ja\sqrt{s/\nu_0})}{ja\sqrt{s/\nu_0}J_0(ja\sqrt{s/\nu_0})}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

무한히 긴 관로에서 반사파를 무시한 경우, 압력전달함수는 입력압력  $P_{in}(s)$ 에 대한 출력압력  $P_{out}(s)$ 의 비로 다음과 같다.

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = e^{-\Gamma(s)l} = e^{-\Gamma(j\omega)l} \quad (12)$$

여기에서  $P_{in}(s)$ 과  $P_{out}(s)$ 는 입력신호  $p_{in}(t)$ 와 출력신호  $p_{out}(t)$ 의 푸리에 변환형태이고  $P(s)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$P(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-j\omega t} dt \quad (13)$$

식(13)를 역변환하면 식(14)가 된다.

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (14)$$

식(13)로부터 주파수의 진폭을  $p_m$ , 파수의 폭을  $\tau$ 라 하면 단일 펄스의 입력신호  $P_{in}(j\omega)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_{in}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{in}(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\tau}^{\tau} p_m e^{-j\omega t} dt = \frac{p_m}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau}) \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)를 식(12)에 대입하고 식(14)를 이용하여 역변환 시켜 정리하면, 단일펄스에 대한 하류에서의 응답 파형에 관한 식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} p_{out}(t) &= \frac{2p_m}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha(\omega)l}}{\omega} \sin \frac{\tau\omega}{2} \\ &\quad \times \cos \left( \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \omega - \beta(\omega)l \right) d\omega \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 전파연산자의 실수부  $\alpha(\omega)$ 는 감쇄값이고 허수부  $\beta(\omega)$ 는 위상값이다.

식(16)을 Simpson 공식을 이용하여 적분하여 정리하면 관로 내 손실이 전혀 없는 무손실관로에서는  $\alpha(\omega) = 0$ ,  $\beta(\omega) = \omega/c_0$ 이므로 식(16)은 식(17)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} p_{out}(t) &= \frac{2p_m}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \tau \frac{\omega}{2} \cos \left( \left( t - \frac{\tau}{2} - \frac{l}{c_0} \right) \omega \right)}{\omega} d\omega \\ &= \frac{p_m}{2} \left\{ u \left( t - \frac{l}{c_0} \right) - u \left( \frac{l}{c_0} - t \right) \right. \\ &\quad \left. + u \left( \tau + \frac{l}{c_0} - t \right) - u \left( t - \tau - \frac{l}{c_0} \right) \right\} \\ &= \begin{cases} p_m & \left( \frac{l}{c_0} \leq t \leq \frac{l}{c_0} + \tau \right) \\ 0 & \left( t < \frac{l}{c_0}, t > \frac{l}{c_0} + \tau \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $u(t)$ 는 단일펄스의 정상 단위 계단정수이다.

### 3. 결과 및 고찰

외부환경의 순간적인 변화에 의한 관로 내의 파도현상을 이론해석과 시뮬레이션을 통해 이해하고 그에 대한 대응 방법을 알아보기 위하여 연구하였다. 작동 유체는 같은 조건에서 점성의 영향을 분석하기 위해 각각 공기, 물, 기름을 이용하여 각각의 경우 전파특성을 분석하였고, 각각

의 유체에 대한 물리적 성질(온도 20°C에서의)은 기존의 데이터를 이용하여 이론해석을 통해  $p_{out}/p_m$ 를 시간의 변화에 따라서 시뮬레이션 하였다.

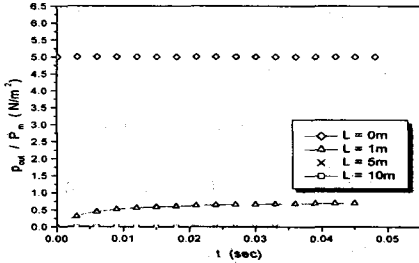


Fig.3 Distortion of pressure pulse propagation in a filled with air, for four different initial amplitudes according to the length  
Initial amplitude at  $5 N/m^2$ ,  $r = 5mm$

Fig.3은 원형 관로에 있어서 관 반경  $5mm$ 에서의 공기압 전달 형태를 관의 길이에 따라 식(42)를 이용하여 나타낸 그래프이다. 관의 길이가  $5m$ 이상일 경우의 응답 파형의 형태는 거의 0에 수렴함을 알 수 있는데, 이것은 관의 길이가 길어짐에 따라 공기의 질량이 작아지기 때문에 관 성력이 작아지기 때문으로 생각된다.

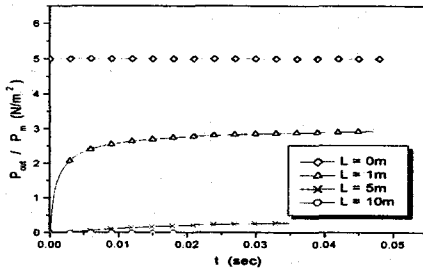


Fig.4. Distortion of pressure pulse propagation in a filled with air, for four different initial amplitudes according to the length.  
Initial amplitude at  $5 N/m^2$ ,  $r = 10mm$

Fig.4는 관의 반경이  $10mm$ 일 경우의 공기압 전달 파형의 형태를 관의 길이에 따라서 나타낸 그래프이다. Fig.3과 같은 관 반경이  $5mm$ 인 경

우에 비하여 관의 길이에 따른 압력과 진폭의 감소 값을 살펴보면  $L = 1m$ 인 경우의 공기압의 전달 파형의 값이 상대적으로 압력비 기본 진폭에 비하여 급격히 작아지는 것으로 나타났다. 관의 반지름이  $5mm$ 인 경우 압력진폭비의 상승속도가 약  $0.02$ 초 정도인데 비하여  $0.01$ 초 이내에 완전히 상승되어 관의 직경이 커지면 과도현상에 의한 압력진폭비의 영향을 크게 받는다는 것이 파악되었다. 관의 직경을  $10mm$ 로 하고 관의 길이를  $5m$ 로 하였을 경우 관의 직경을  $5mm$ 로 하고 관의 길이를  $5m$ 로 하였을 경우와 비교해보면 관의 직경이 커지며 관의 길이가 증가되었을 경우, 완만하게 압력진폭비가 상승하고 있음을 알 수 있다.

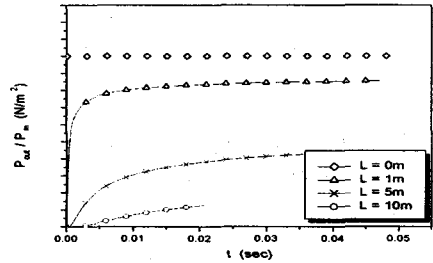


Fig.5. Distortion of pressure pulse propagation in a filled with air, for four different initial amplitudes according to the length.  
Initial amplitude at  $5 N/m^2$ ,  $r = 20mm$

Fig.5는 관 반경이  $20mm$ 일 경우의 공기압 전달 파형의 형태를 관의 길이에 따라서 나타낸 그래프로 초기 입력압력에 대하여 관로 내의 전달 압력과 진폭의 감소가 매우 줄었음을 알 수 있다.

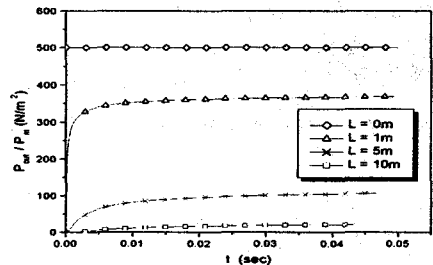


Fig.6. Distortion of pressure pulse propagation

in a filled with water, for four different initial amplitudes according to the length.

Initial amplitude at  $50 \text{ N/m}^2$ ,  $r = 5\text{mm}$

Fig.6은 물에서의 압력파의 전달현상에 대하여 관 반경  $5\text{mm}$ 일 때 나타낸 그래프이다. 공기에 비하여 압력파의 전달현상을 살펴보면 공기의 압력파에 비하여 압력상승시간이 체적탄성계수의 영향으로 빠른 시간에 상승함을 알 수 있다.

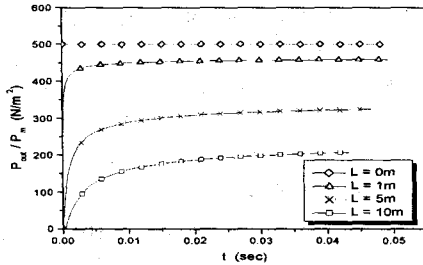


Fig7. Distortion of pressure pulse propagation in a filled with water, for four different initial amplitudes according to the length.

Initial amplitude at  $50 \text{ N/m}^2$ ,  $r = 10\text{mm}$

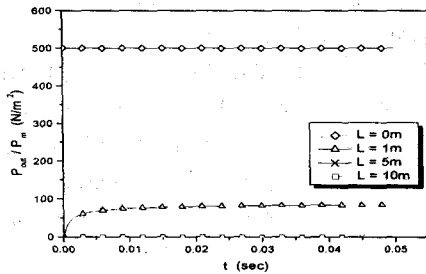


Fig8. Distortion of pressure pulse propagation in a filled with water, for four different initial amplitudes according to the length.

Initial amplitude at  $50 \text{ N/m}^2$ ,  $r = 20\text{mm}$

Fig.7과 Fig.8은 물에서의 압력파의 전달 현상을 관의 반경이 각각  $10\text{mm}$ ,  $20\text{mm}$ 일 때 나타낸 그래프이다. 관의 반경이 커짐에 따라서 과도현상의 응답 파형이 상승시간이 짧아지며 압력진폭 비도 상승하고 있다. 관의 측정길이가 길어짐에

따라서 주파수의 진폭의 감소 값이 현저히 줄어들 수 있는데 이것은 관 벽면에서의 마찰력 증가 때문에 발생한다.

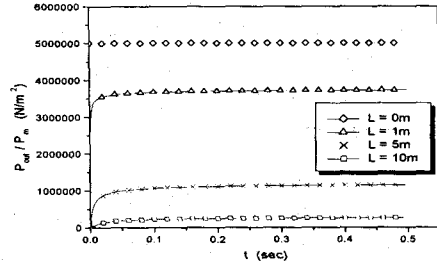


Fig9. Distortion of pressure pulse propagation in a filled with oil, for four different initial amplitudes according to the length.

Initial amplitude at  $50 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $r = 5\text{mm}$

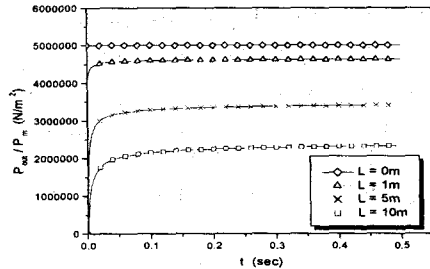


Fig10. Distortion of pressure pulse propagation in a filled with oil, for four different initial amplitudes according to the length.

Initial amplitude at  $50 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $r = 10\text{mm}$

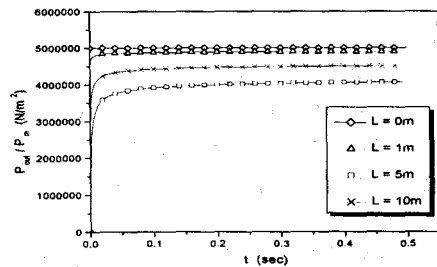


Fig11. Distortion of pressure pulse propagation in a filled with oil, for four different initial amplitudes according to the length.

Initial amplitude at  $50 \times 10^5 N/m^2$ ,  $r = 20mm$

Fig.9와 Fig.10 그리고 Fig.11은 기름의 경우에 있어서 압력파의 전달 현상을 그래프로 나타낸 그래프이다. 물과 공기의 경우에 비하여 점도가 높은 기름의 경우에는 관의 길이와 반경에 따라서 압력진폭값의 감소와 폭의 감소가 상대적으로 매우 작다는 것을 알 수 있다.

기름을 작동유체로 하였을 경우 순간적인 압력 상승시간은 물에 비하여 약 10배정도 느린데 이것은 점성과 체적탄성계수의 차이로 판단된다. 물이나 공기의 경우에는 관의 길이가 커지고 관의 직경이 증가하면 각각 압력진폭비의 증가 값이 뚜렷한 차이가 발생한다. 유압의 경우 관의 지름이 20mm인 경우에는 관이 길이가 커지더라도 압력비의 증가 값의 차이가 다른 작동유체에 비하여 작았다. 이러한 현상은 기름의 경우 물에 비하여 관직경이 커지면 관벽면에서 작용하는 점성에 의한 마찰력보다는 윤활성이 커지기 때문으로 판단된다. 따라서 유압관로에 의해 동력을 전달할 경우 큰 동력을 전달하기 위해서는 유압관로의 저항을 높이기 위해, 특히 관로의 직경에 신중을 기하여 설계해야 함을 의미한다.

#### 4. 결론

원형 관로 내에서 물, 공기 그리고 기름의 물리적인 성질을 사용하여 관의 직경과 길이의 변화에 따라 이론적으로 해석하고, Matlab 5.3을 통한 시뮬레이션으로 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 공기인 경우와 기름의 경우를 비교하면 공기에 비하여 기름의 밀도가 매우 크기 때문에 같은 조건 하에서 압력 상승 시간의 차이가 발생하고 이 밀도의 크기만큼 압력파에 의한 시간 영역이 달라짐을 알 수 있다.

2) 작동유체의 밀도가 커지면 순간적인 압력 상승시간이 길어지는데 이것은 공기가 기름에 비하여 응답시간이 빨리 나타나는 현상과 일치한다.

3) 관로계를 설계할 때 순간적 압력변화만을 고려할 경우 무차원 길이가 길어지면 하류에서 작용하는 배압과 관벽면에서 작용하는 점성에 의한 마찰력의 증가로 압력파가 상승되어 전달되는 시간이 매우 길어져 충격파로 작용되지 않는다.

#### 참고문헌

- (1) E.L. HOLMBOE, W.T. ROULEAU, "The Effect of Viscous shear on Transients in Liquid Lines" ASME. Journal of Basic Engineering pp.174-180. 1967.
- (2) 岡村健二郎, 小西忠孝, 鷲尾誠一, "油壓管路における波動現象の研究" 日本機械學會論文集(第2報)40卷 329号 pp.199-207 1974.
- (3) Katsulosshi SATO, Tsutomu UCHIDA, Hiroshi HATANAKA, "On the single Pulse Transmission Pneumatic Lines" 日本計測自動制御學會論文集 Vol.21, No.2 pp.145-149. 1986.
- (4) Ikurp IIMURA, Kenji SHOJI, Seiichi ISHII, Hiroshi HATANAKA, "The Transient Response of Cavity-Mounted Pressure Sensing Systems" 日本計測自動制御學會論文集 Vol.22, No.4 pp.417-422 1986.
- (5) Shinichi YOKOTA, Kenji SUZUKI, DO-Tae KIM, "An Approach to Extend the Potential of the Remote Measurement Method for Unsteady Flow Rate surging Hydraulic Pipeline Dynamics" 日本機械學會論文集(C編) 58卷 556号 pp.3634-3638 1992.
- (6) J.Y.Park, J.H.Kim, J.C.Jeong, Y.T.Yoo, "A Study on the Dynamic Response Considering Temperature Change in Hydraulic Pipe Lines" KSME 99S201 B. pp. 224-229 1999.