

## 층상류 속에 있는 구 후류의 비정상 와류 형성에 관한 수치 해석

이 승 수\*, 양 경 수\*

### A Numerical Study of Formation of Unsteady Vortex behind a Sphere in Stratified Flow

Sungsu Lee and Kyung-Soo Yang

**Key Words** : Stratification (층상화), Unsteady Vortex (비정상 와류), Sphere (구), Finite Element Method (유한요소법), Vortex Shedding

#### Abstract

Stratified flow past a three-dimensional obstacle such as a sphere has been a long-lasting subject of geophysical, environmental and engineering fluid dynamics. In order to investigate the effect of the stratification on the near wake, in particular, the unsteady vortex formation behind a sphere, numerical simulations of stratified flows past a sphere are conducted. The time-dependent Navier-Stokes equations are solved using a three-dimensional finite element method and a modified explicit time integration scheme. Laminar flow regime is considered, and linear stratification of density is assumed under Boussinesq approximation. The computed results include the characteristics of the near wake and the unsteady vortex shedding. With a strong stratification, the separation on the sphere is suppressed and the wake structure behind the sphere becomes planar, resembling that behind a vertical cylinder.

#### 기호설명

$C_D$  : 무차원 저항 계수,  
 $F_D / \frac{1}{8} \rho_0 U^2 \pi D^2$

$D$  : 구의 직경

$N$  : 밀도 층상화의 부력 주파수 (buoyancy frequency),  $-g\rho'_b/D$

$n_j$  : 경계의 수직 방향 단위 벡터의  $j$  축 방향의 성분

$f$  : Vortex Shedding 주파수

$F_D$  : 저항

$Fr$  : Froude 수,  $U/ND$

$g$  : 중력가속도

$p(x_j; t)$  : 동압력

$p_i$  : 전압력

$Re$  : Reynolds 수,  $UD/\nu$

$St$  : Strouhal 수,  $fD/U$

$t$  : 시간

$U$  : 유입 유속

$u_j$  :  $j$  축 방향의 유속

$x_j$  : 직교 좌표계 ( $j=1,2,3$ 은 각각  $x, y, z$ )

#### 그리스문자

$\delta_{ij}$  : Kroenecker Delta 함수

$\Gamma$  : 유한요소소의 경계

$\mu$  : 점성 계수

$\nu$  : 동점성 계수

$\rho(x_j; t)$  : 변동 밀도

$\rho_b(z)$  : 수직방향 층상화 밀도 분포 (stratified density distribution)

$\rho_0$  : 기준 밀도

$\rho_i$  : 전 밀도

$\sigma_{ij}$  : 응력,  $-p\delta_{ij} + \tau_{ij}$

$\tau_{ij}$  : 무차원화된 전단응력,  $\frac{1}{Re}(u_{i,j} + u_{j,i})$

$\Omega$  : 유한요소

\* 정회원, 인하대학교 기계공학과

## 1. 서론

밀도차에 의한 층상류 (density-stratified flow) 속에 위치된 물체 주위의 유동은 유체 역학적인 관점 뿐만 아니라 실지형을 지나는 대기의 움직임 및 수층을 지나는 물수체 주위의 유동과 관련하여 지속적인 관심의 대상이 되어왔다. 균일한 (homogeneous) 유입 유동의 경우와 비교하여, 물체 후류는 유동의 평면화를 포함한 독특한 특성을 나타낸다<sup>(1)</sup>.

구 주위의 층상류에 의한 유동장 변화의 물리적 특성을 이해하기 위하여 비교적 최근에 주로 실험적인 방법에 의한 선행 연구가 진행되어 왔다. Debler 와 Fitzgerald<sup>(2)</sup>는 유동 가시화 방법에 의해 층상화의 정도가 높을 경우, 구 후면에서의 유동의 박리 현상 (separation)이 지체되는 현상을 관찰하였다. Brighton<sup>(3)</sup>은 반구 (hemisphere)를 포함한 여러 가지 물체주위의 층상화 유동에 관한 실험을 수행하였다. 그 결과에 의하면 층상화에 의해 후류는 평면화 되는 경향을 보이며 층상화의 정도가 증가함에 따라 von Karmar Vortex와 같은 후류내 Vortex Shedding이 관찰되었다.

유동의 층상화 정도는 밀도의 분포가 수직 방향  $z$ 의 함수라고 가정할 때, 수직 분포  $\rho_b(z)$ 의 기울기에 의해 정의되는 부력 주파수  $N$ 에 의해 나타내며, 이는 중력가속도와 길이에 의해 무차원화되어 Froude 수  $Fr$ 로 나타낼 수 있다. 광범위한 Froude 수와 Reynolds 수에서의 구 주위 유동의 실험적인 연구는 최근에 Lin 등<sup>(4)</sup>, Chomaz 등<sup>(5)</sup>에 의해 수행되었다. 이들의 결과에 의하면 층상화의 정도가 약한 경우 ( $Fr > 2.25$ ), 구 후류의 유동은 균일한 밀도를 갖는 유입 유동의 경우와 매우 유사하여 Reynolds 수에 의해 유동 특성이 결정된다. 층상화의 정도가 커짐에 따라, 후류내에 내부 중력파 (internal gravity wave)의 형성이 현저해지고,  $Fr$ 가 0.4에 근접하게 되면 파고가 최대점에 이르며, 구 후면에서의 유동 박리현상은 거의 사라지는 것으로 관찰되었다. 층상화의 정도가 더욱 증가하면 유동의 박리는 다시 나타나고,  $Fr$ 가 0.4보다 작아지면 후류의 수직방향 운동은 매우 제한되어 평면화되며 거의 2차원 유동 특성을 보인다.  $Fr$ 가 0.25보다 작아져 층상화가 매우 큰 경우에 이르면, 후류내에는 2차원 주상체의 후류에서 볼 수 있는 Vortex Shedding이 발생하였다. 이러한 현상들은 Froude 수 이외에 Reynolds 수에 의해서도 그 특성이 결정되어지나, 층상화의 정도가 커짐에 따라 Reynolds 수에 대한 의존도는 상대적으로 감소하는 것으로 관찰되었다<sup>(6)</sup>.

한편, 구 주위의 층상류 유동 특성에 대한 수치 해석 연구는 매우 드문 편이다. Hanazaki<sup>(6)</sup>는 Reynolds 수가 200인 경우, 층상화가 후류에 미치는 영향에 관하여 유한차적법을 이용하여 수치 해석을 수행하였다. 그러나, 비정상 수치 해석에도 불구하고

고려된 전 범위의 Froude 수에 대해 정상 (steady) 유동으로 계산되어, 실험적인 연구들에 의해 관찰된 바 있는 층상화가 큰 경우의 비정상 Vortex Shedding은 보여주지 못하였다.

따라서 본 연구에서는 층상류 중에 있는 구 주위의 유동을 수치 해석함으로써 후류내의 비정상 유동을 모사함을 그 목표로 하였다. 지배 방정식의 이산화는 유한요소법을 이용하였으며, 수정된 외재적 (explicit) 방법에 의해 시간 적분을 수행하였다. 운동방정식의 부력항과 연계되어 추가된 밀도 전송 방정식은 Crank-Nicolson 방법에 의해 수치해석을 수행하였다. 이 연구에서는 Hanazaki<sup>(6)</sup>의 경우에 대하여 계산을 수행하여 Reynolds 수는 200으로 고정하였으며 Froude 수는 0.02에서 100까지 변화시켰으며, 밀도의 선형적 변화만을 고려하였다.

## 2. 문제의 정식화

비압축성, 점성 유체가 수직방향  $z$ 로 밀도의 선형적 분포를 갖는 경우의 지배방정식은 다음과 같다<sup>(7)</sup>.

$$u_{j,j} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_i(u_{i,i} + u_j u_{i,j}) = -p_i - \rho_i g \delta_{i3} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\rho_{i,i} + u_j \rho_{i,j} = 0 \quad (3)$$

위 식의 아래 첨자 중  $i, j$ 는 각각 시간과  $x_j$  방향에 대한 편미분을 나타낸다. 식 (3)의 밀도 전송 방정식에서 확산항은 무시하였다.

Boussinesq 가정을 이용하여 밀도의 변화가 기준 밀도에 비해 작고 운동량 방정식의 부력항에만 영향을 미친다고 가정하면, 전압력  $p_i$  중 정압력은 층상류의 밀도 변화에 따른 항과 서로 상쇄되고, 식 (2)와 (3)은 다음과 같이 단순화 된다.

$$u_{i,i} + u_j u_{i,j} = -p_i - \delta_{i3} \rho / Fr^2 + \tau_{ij} \quad (4)$$

$$\rho_j + u_j \rho_j = u_j \quad (5)$$

식 (4)와 (5)에서  $\rho$ ,  $u_j$  와  $x_j$ 는 각각  $\rho_0$ ,  $U$ 와  $D$ 에 의해 무차원화 되었다. 따라서  $i$ 와  $p$ 는 각각  $D/U$ 와  $\rho_0 U^2$ 에 의해 무차원화 되었으며, 식 (5)에서 유입 유동의 수직 방향 밀도 분포의 기울기는 음수로 가정하였다.

## 3. 수치 해석 기법

### 3.1 유한요소법에 의한 이산화 및 경계 조건

유한요소법에 의한 지배 방정식의 공식화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \psi u_{i,j} d\Omega &= 0 \\
\int_{\Omega} (\phi u_{i,j} + \phi u_{j,i} + \phi_j \tau_{ij} - \phi_i p) d\Omega \\
&= -\frac{\rho_0}{\Gamma^2} \int_{\Omega} \phi \rho d\Omega + \int_{\Gamma} \phi \sigma_{ij} n_j d\Gamma \\
\int_{\Omega} (\phi \rho_j + \phi u_{j,i} \rho_j) d\Omega &= \int_{\Omega} \phi u_{i,j} d\Omega \quad (6)
\end{aligned}$$

위 식의  $\phi$  는 유속과 밀도 변수에 대한 가중 함수이며,  $\psi$  는 압력에 대한 가중 함수이다. 본 연구에서는 유속 및 밀도에 대하여는 선형 유한 요소를 이용하였고, 압력은 각 유한 요소 내에서 일정한 것으로 가정하였다. 운동량 방정식은 수치 해석의 안정성을 위하여 유선상류도식 (Streamline Upwind Method)<sup>(8)</sup>을 이용한 Petrov-Galerkin 형식을 적용하였다.

계산 영역의 유입면에서는 균일한 유속  $U$  를 갖는 유동이 유입되는 것을 가정하였다. 유입 유동의 층상화의 영향은 식 (5)에서 보는 바와 같이 지배 방정식의 소오스 항으로 공식화되었으므로, 유입 유동의 변동 밀도는 없는 것으로 가정하였으며, 구의 표면에서는 No-slip 경계조건을 적용하였다. 계산 영역의 측면 및 출구면에서는 traction-free 조건 ( $\sigma_{ij} n_j = 0$ )을 적용하였다.

식 (6)의 비정상해를 구하기 위해서는 초기 조건이 요구된다. 본 연구에서는  $t=0$ 에 유입 유동이 시작되는 것으로 가정하였으며, 계산 영역 내 밀도 변화는 0으로 가정하였다.

### 3.2 시간 적분

본 연구에서는 속도항 보정 방식<sup>(9)</sup>에 의해 시간 적분을 수행함으로써 식 (6)의 이산화된 지배 방정식의 비정상해를 구하였다. 그 과정은 다음과 같다.

각 시간 단계에서 Poisson 방정식에 의해 압력을 얻는다. 이때, 이전 단계에서 얻은 유속과 밀도를 이용한다. 유한 요소법의 특징인 요소들의 비구조적 연계성 (unstructured connectivity)에 의해 행렬은 매우 sparse하며, 이를 위해 본 연구에서는 행렬 해법으로 PCG (Preconditioned Conjugate Gradient)를 이용하였다. 이때 압력을 위한 Poisson 방정식의 행렬은 Hermitian 이므로 행렬 요소의 연산은 계산의 초기에 한번만이 요구된다.

압력이 계산되면, 밀도 방정식을 시간 적분하게 되는데 식 (6)은 확산항이 없는 순 대류 방정식의 형태를 갖고 있어, 수치 해석의 안정성을 위해 Crank-Nicolson 방법을 이용하였다.

유속은 계산된 압력 및 밀도를 이용하여 운동량 방정식을 수정된 외재적 방법 (Modified Explicit

Method)을 이용하여 시간 적분을 수행함으로써 얻을 수 있다. 주어진 시간 단계는 수치 해석의 안정성의 기준이 되는 CFL 수에 의해 결정되는 더 작은 준 시간 단계들로 세분되고, 각 세분된 준 시간 단계에서 운동량 방정식을 외재적 방법에 의해 시간 적분하였다.

## 4. 결과 및 고찰

### 4.1 계산 영역 및 이산화

본 연구에서는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 길이와 직경이 각각  $20D$ 와  $12D$ 인 원통형 계산 영역을 설정하였으며, 구는 유입면으로부터  $3D$ 의 거리에 위치하도록 하였다. 계산 영역은 8개의 절점을 갖는 육면체와 6개의 절점을 갖는 삼각기둥의 복합 요소들로 이산화 하였으며, 구 주위에서 보다 조밀한 분포를 갖도록 하였다. 선형 계산을 통하여, 구 표면의 가장 작은 유한 요소의 크기를  $0.01D$ 로 정하였으며, 인접한 요소들의 크기 비는 수치 해석의 안정성을 위하여 1.1을 넘지 않도록 하였다. 계산에 이용된 유한 요소의 수는 48320인데 Fig. 2는 구 주위의 격자를 보이고 있다.

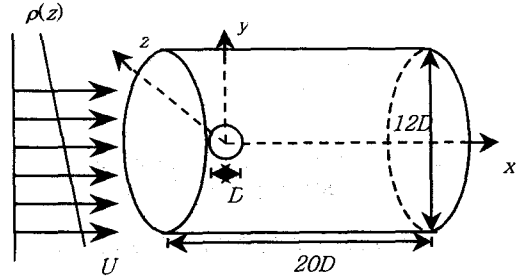


Fig. 1 Schematic diagram of computational domain

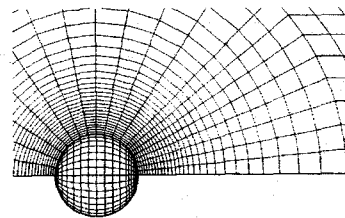


Fig. 2 Mesh distribution near sphere

#### 4.2 Froude 수 100의 경우에 대한 계산에 의한 계산 방법 검증

본 연구의 선행단계로서 유입 유동이 균일한 밀도를 갖는 경우에 대하여 Reynolds 수 100에서 500까지의 비정상 유동의 수치해석이 수행된 바 있다<sup>(10)</sup>. 본 연구에서 이용된 수치 해석 방법을 검증하기 위하여, 층상화의 영향이 거의 무시되는 Froude 수 100의 경우를 수치 해석하여 이전의 결과와 비교함으로써 본 연구의 수치 해석 방법을 검증하였다. Reynolds 수는 서론에서 밝힌 바와 같이 200으로 고정하였다.

Fig. 3에서는 계산된 저항 계수를 선행 연구<sup>(10)</sup> 및 실험 결과와 비교하고 있다.  $Re=200$ 에서 균일 유동의 경우 저항 계수는 선행 계산에 의해서 0.773, 본 연구에 의해서 0.771을 얻어 실험에 의한 저항계수 0.775과 1% 미만의 오차를 보여주었다.

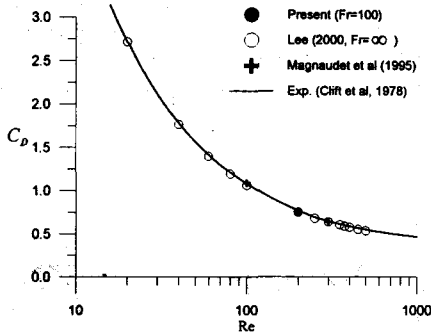


Fig. 3 Computed drag coefficient at  $Re=200$  compared with previous studies

#### 4.3 Froude 수 변화에 따른 후류의 변화

Fig. 4는 각각 Reynolds 수가 200이고 Froude 수가 100, 1 및 0.5 경우 수직면인  $x-z$  평면과 수평면인  $x-y$  평면의 유속 분포를 보여준다. 이미 위의 저항 계수의 검증에서 나타난 바와 같이 Froude 수가 100인 경우 (a)는 균일 유동의 경우와 차이가 없어 두 평면의 유속 분포가 일치하여 축대칭의 후류 분포를 보여주고 있고, 그 뒷면의 재순환 (recirculation) 구역이 잘 발달하여 있다. 층상화가 증가한 Froude 수 1의 경우 (b), 수평면상의 유동 박리 위치는 Froude 수 100의 경우와 거의 유사하나, 수직면 상의 박리점은 구 후미로 이동되고 있음이 관찰되었다. 이는 층상화가 증가함에 따라 내부 중력파의 파장이 점차 감소하고 파의 최저점이 구 후면에 근접함에 따라, 수직면상의 유선들이  $x$ -축을 중심으로 밀집 하기 때문이다. Froude 수가 더욱 감소하여 0.5 (c)에

이르면, 후류의 재순환 영역은 붕괴되어 유선의 박리는 구 후면의 정점에서 발생하게 된다.

Lin 등<sup>(4)</sup>에 의하면,  $Re = 200$ 의 경우 Froude 수가 0.25보다 작아지면 후류내에 von Karman vortex와 같은 vortex shedding이 관찰된 바 있다. 본 연구의 경우 유동장은 Froude 수가 0.2까지는 정상상태를 유지하였으나, 그 보다 작은 Froude 수에서 후류의 평면화와 수평면상에 비정상 vortex shedding이 발생하였다.

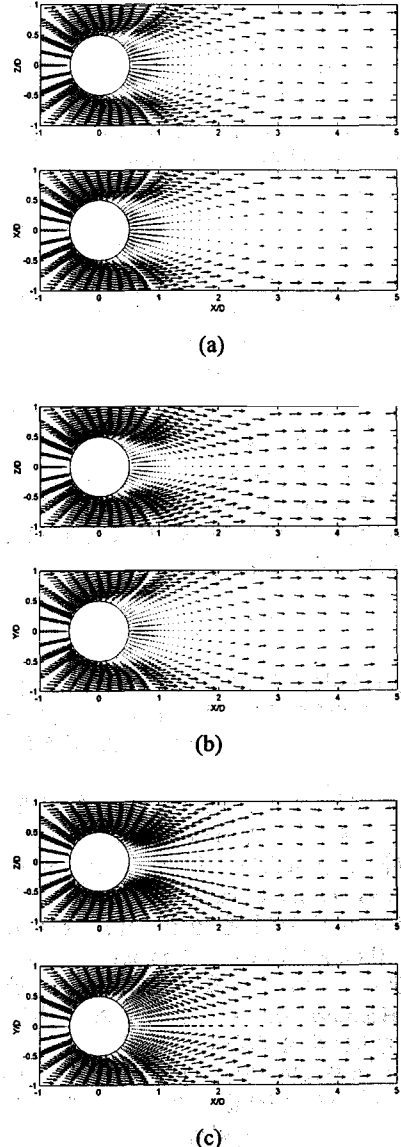


Fig. 4 Side views on vertical plane ( $x-z$ ) and plan views on horizontal plane ( $x-y$ ) of velocity vectors for  $Fr = 100$  (a), 1 (b) and 0.5 (c) at  $Re = 200$

Fig. 5는  $Re = 200$ 에서 Froude 수가 0.1인 경우 수직 및 수평면상의 유속 분포를 나타내고 있다. 비정상성으로 인해 vortex shedding의 반주기 시간 간격의 유속 분포를 나타내었는데, 수직면상에서는 시간에 관계 없이 평면화된 유속 분포를 보여주고 있다.

이에 반해 수평면의 유속 분포는 원형 주상체 후류와 유사한 vortex shedding이 잘 발달되어 있음을 알 수 있다.

이 같은 비정상 유동 현상은 이전의 수치 해석 연구인 Hanazaki<sup>(6)</sup>의 결과에서는 나타나지 않았던 결과이며, 실험 결과<sup>(4)(5)</sup>와 일치하고 있다.

Vortex shedding에 의한 Strouhal 수는 본 연구에서 고려된  $Fr = 0.18 - 0.05$ 사이에서 약 0.196으로 계산되었으며, 이 또한 실험치인 0.2<sup>(4) (5)</sup>와 잘 일치하고 있다

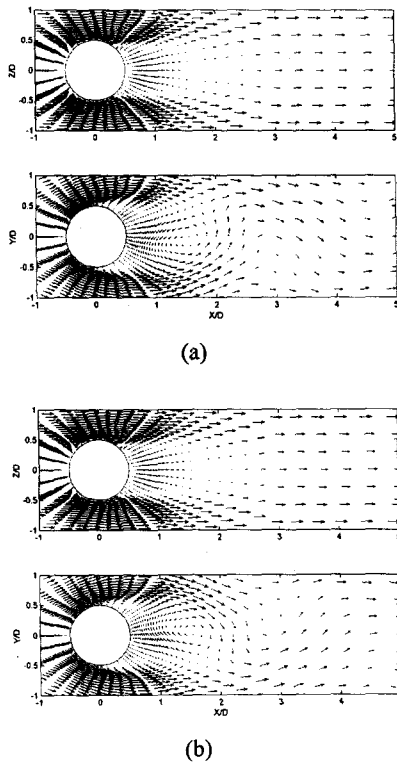


Fig. 5 Side views on vertical plane (x-z) and plan views on horizontal plane (x-y) of velocity vectors for  $Fr = 0.1$  and  $Re = 200$  at  $t = 0$  (a) and  $t = T/2$  where  $T$  is a vortex shedding frequency

#### 4.4 층상화가 박리점에 미치는 영향

Fig. 6은 Froude 수 변화에 따른 유동 박리점의 변화를 나타내고 있다. 박리점의 위치는 구 후면의

정점을 기준으로, 본 연구의 결과를 Hanazaki<sup>(6)</sup>의 결과와 비교하였다.

앞에서 설명된 바와 같이 층상화가 증가는 내부 증력과의 파장 감소로 인하여 구 후면 가까이에서 수직면상의 유선을 밀집 시키는 결과를 가져오고, 따라서 유동의 박리점을 구 후미로 이동시킨다. Froude 수가 0.5에 가까워지면, 박리는 구 후면의 정점에서 발생하게 된다. Froude 수가 더 감소하게 되면, 다시 박리점은 구의 전면을 향해 이동하나 이때 후류는 거의 수평면에 평행한 평면화가 나타나게 된다.

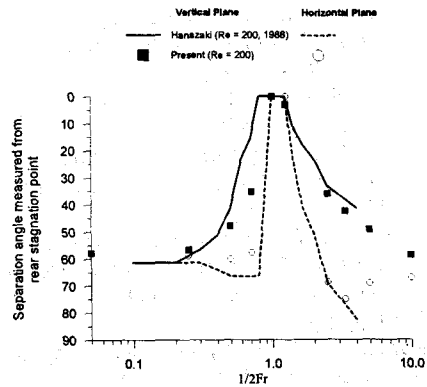


Fig. 6 Effects of Froude number on separation points on sphere

Fig. 6에서 보는 바와 같이 본 연구의 결과는  $Fr > 0.5$ 인 경우 수직면상의 박리 각도가 Hanazaki<sup>(6)</sup>의 결과 보다 크게 계산되었다. Hanazaki<sup>(6)</sup>의 결과와 큰 차이를 보이는 영역은 유동의 비정상성이 나타나는  $Fr < 0.2$ 의 경우 수평면상의 박리점의 위치이다. Hanazaki의 결과는 계속 박리 각도가 증가하는 것으로 나타나고 있는데 반해, 본 연구의 결과는 약 70도 정도로 계산되었는데, 이는 원형 주상체의 경우  $Re = 200$ 에서 박리 각도 68.5도<sup>(11)</sup>와 매우 근사함을 알 수 있다.

#### 5. 결론

본 연구에서는 유입 유동이 수직 방향으로 밀도의 선형적 변화에 의해 층상화되어 있는 경우 구 주위의 유동을  $Re = 200$ 에 대하여, 유한 요소법과 수정된 외재법에 의한 시간 적분에 의해 수치해석을 수행하였다. 계산 결과, 기존의 실험에 의해 보여진 층상화의 정도가 높은 경우 구 후류에 나타나는 비정상 vortex shedding 현상을 수치 해석에 의해 재현하였는데, 이는 선행된 Hanazaki<sup>(6)</sup>의 수치 해석에 의해서는 나타나지 않았던 결과이다. 그 외에 다음과 같은 특성이 계산에 의해 확인되었다.

- (1) 층상화의 증가에 의해 내부 증력파의 파장이 감소하여 유동 박리점을 구 후미로 이동시키며,  $Fr = 0.5$ 에서 재순환 영역의 소멸을 야기한다.
- (2)  $Fr < 0.2$ 인 경우 후류는 수직방향의 운동이 극도로 제한되어 거의 평면화되며, 원형 주상체 후류와 유사하게 비정상 vortex shedding이 발달한다.

#### 참고 문헌

- (1) Sheppard, P.A., 1956, "Airflow over mountains," *Quart. J. R. Met. Soc.*, vol.82, pp.528-529
- (2) Debler, W. and P. Fitzgerald, 1971, "Shadowgraph observations of the flow past a sphere and a vertical cylinder in a density stratified liquid," *Tech. Rep. EM-71-3, Dept. of Engrg Mech., Univ. of Michigan.*
- (3) Brighton, P.W.M., 1978, "Strongly stratified flow past three-dimensional obstacles," *Quart. J. R. Met. Soc.*, vol.104, pp.289-307.
- (4) Lin, Q., W.R. Lindberg, D.L. Boyer and H.J.S. Fernando, 1992, "Stratified flow past a sphere," *J. Fluid Mech.*, vol.240, pp.315-354.
- (5) Chomaz, J.M., P. Bonneton and E.J. Hopfinger, 1993, "The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid," *J. Fluid Mech.*, vol.254, pp.1-21.
- (6) Hanazaki, H., 1988, "A numerical study of three-dimensional stratified flow past a sphere," *J. Fluid Mech.*, vol.192, pp.393-419.
- (7) Gill, A.E., 1982, *Atmosphere-ocean dynamics*, Academic Press, San Diego, CA, USA
- (8) Brooks, A. and J.R. Hughes, 1982, "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on incompressible Navier-Stokes equations," *Comp. Methods in App. Mech. Eng.*, vol. 32, pp.199-259.
- (9) Chan, S.T., P.M. Gresho, R.L. Lee and C.D. Upson, 1981, "Simulation of three-dimensional, time-dependent, incompressible flows by a finite element method," *Lawrence Livermore Laboratory Report UCRL-85226.*
- (10) Lee, S., 2000, "A numerical study of the unsteady wake behind a sphere in a uniform flow at moderate Reynolds numbers," *Computers & Fluids, Int. J.*, to be published
- (11) Franke, R. and W. Rodi, 1993, "Calculation of vortex shedding past a square cylinder with various turbulent models," *Turbulent Shear Flows VIII*, pp.189-204.