

사각 밀폐용기 내부의 밀도최대치를 가지는 유체의 공진현상

이창호* · 현재민** · 김성진***

Oscillatory enclosed buoyant convection of a fluid with the density maximum

Chang Ho LEE, Jae Min HYUN and Sung Jin Kim

Key Words : resonance, density inversion, natural convection.

Abstract

A numerical investigation is made of time-dependent buoyant convection in a square of a non-Boussinesq fluid. The density-temperature(ρ - T) relation is modeled by a quadratic function, with the maximum density ρ_M at temperature T_M . The horizontal walls of the square are insulated, and a pulsating temperature $T_H = T_M + \Delta T' \sin(\omega\tau)$ is imposed on the hot vertical sidewall. The temperature at the cold wall T_C is constant. Extensive numerical solutions to the governing Navier-Stokes equations are portrayed. Resonance is identified by monitoring the amplitude of the mid-plane Nusselt number, $A(Nu')$. The primary resonance frequency is found by matching ω to the nondimensional basic mode N_1 of internal gravity oscillations. Due to the quadratic (ρ - T) relationship, the effective pulsation frequency for density, 2ω , is meaningful, which brings forth the secondary resonance frequency, i.e., $2\omega=N_1$.

1. 서론

주기적으로 진동하는 경계조건에 의해서 발생하는 비정상 자연대류의 관한 문제가 최근에 여러 연구자들에 의하여 제기되었다. 이러한 문제는 기초연구로서의 관점에서나 실제적인 열적 시스템의 설계의 관점에서나 매우 중요하다. 열적 경계조건이 주기적으로 변화하는 경우 내부유체의 유동장과 온도장 또한 주기적으로 진동하게 되는데, 이때, 공진이라는 현상이 특정한 경계조건인 주파수에서 발생하게 된다. 공진이 발생하는 주파수에서는 내부의 열전달률이 다른 주파수에 비하여 특별히 큰 주파수를 가지고 진동하게 되며, 이때, 유동장 또한 가장 크게 진동하는 현상이 관찰된다.

Lage & Bejan[1]와 Antohe & Lage[2]는 사각용기의 벽면의 열유속이 주기적으로 진동하는 경우, 부력에 의해서 발생하는 대류유동이 특정한 주파수들에서 공진을 일으키는 것을 보고하였다. 공진

이 발생하였을 때, 용기의 단면을 통과하는 열전달률의 평균값이 가장 큰 진폭을 가지고 진동하는 것을 관찰하였다. 주요유동과 열전달의 현상이 주기적인 열적 경계조건이 도입됨에 의하여 크게 변화하고, 이러한 경향은 공진주파수에 접근함에 따라 더욱 뚜렷하게 나타난다. 위의 연구자들은 공진을 열적 경계조건이 진동하는 주파수와 시스템 전체를 순환하는 유동의 주파수(flow wheel)가 일치하는 경우에 발생하는 것으로 추정하였다. 이후의 실험적 연구[3, 4]에서 이러한 추정이 대략적으로 일치함을 보였다.

관련된 노력으로는 Kwak & Hyun[5]과 Kwak et al.[6, 7]의 연구가 있는데, 이들은 공진이 internal gravity waves의 주파수와 열적 경계조건인 진동 주파수가 일치하는 경우에 발생한다고 설명하였다. Kwak et al.[6, 7]은 internal gravity mode의 기본 주파수를 이용하여 공진주파수를 추정된 결과 수치 계산 결과와 거의 일치함을 보였다.

위에서 살펴본 모든 연구들은 밀도와 온도가

* 한국과학기술원 기계공학과

** 한국과학기술원 기계공학과

*** 한국과학기술원 기계공학과

선형적인 관계를 가지는 Boussinesq 유체에 관한 것이었다. 그러나, 유체가 특정한 온도에서 밀도 최대치를 가지는 경우, 밀도 최대치를 가지는 온도 부근에서는 Boussinesq 가정을 사용할 수 없게 된다. 예를 들어, 물의 경우에는 밀도 최대치의 온도, $T_M(\approx 3.98^\circ\text{C})$ 부근에서는 밀도-온도 관계식을 선형적으로 쓸 수 없다.

본 연구에서는 사각용기의 내부에 유체가 가득 차있고, 한쪽 수직벽면의 온도가 밀도 최대치의 온도, T_M 주위로 진동하는 경우에 대한 수치해석을 수행하였다. 이러한 경우, 수직벽면의 온도가 주파수 ω 로 진동할 때 벽면의 온도가 T_M 으로부터 멀어짐에 따라 $T > T_M$ 과 $T < T_M$ 의 모든 경우에 대하여 밀도가 감소하기 때문에, 벽면근처의 밀도는 2ω 의 진동수를 가지고 진동하게 된다. 결국, 공진은 기본적인 internal gravity mode와 ω 가 일치하는 경우뿐만 아니라, internal gravity mode와 2ω 가 일치하는 경우에도 발생하게 된다. 이러한 경향은 Boussinesq 유체의 경우에 하나의 ω 에서 공진이 발생하는 사실과 대조적인 결과이다.

2. 수학적 모형 및 수치계산

높이는 H , 길이는 L 인 정사각형의 용기가 특정 온도에서 밀도 최대치를 가지는 점성유체로 가득 차 있다. 윗벽과 아랫벽은 단열되어 있고 좌측벽은 온도 T_C , 우측벽은 온도 T_H 로 주어진다. T_C 는 일정한 값이나, T_H 는 $T_H = \bar{T}_H + \Delta T' \sin(ft)$ 로 진폭 $\Delta T'$, 진동수 f 로 \bar{T}_H 를 중심으로 진동하고 있다. 이때 T_H 의 평균값 \bar{T}_H 는 $\bar{T}_H \equiv T_C + \Delta T$, $\Delta T > 0$ 이다.

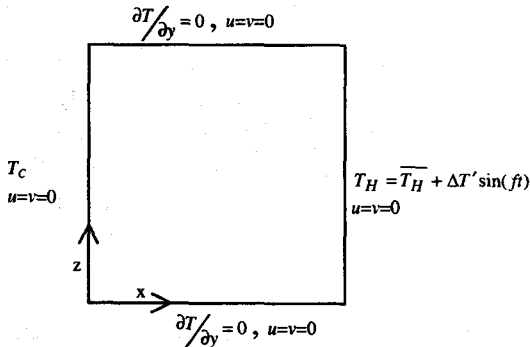


Fig.1 Geometrical configuration.

본 연구에서는 \bar{T}_H 를 밀도가 최대치를 가지는 온도 T_M 으로 고정하였고 물의 경우를 모델로 삼았다. Fig.1에 묘사된 경계조건과 기하학적 모형이

나타나 있다.

본문제의 경우 앞에서 언급하였듯이 특정 온도에서 밀도가 최대치를 가지는 유체의 경우이므로, Boussinesq 가정을 사용할 수 없고, 밀도와 온도에 관한 새로운 관계식이 필요하다. 이러한 유체에 대한 여러가지 밀도-온도($\rho-T$) 관계식이 제안되어 왔으나, 본 연구에서는 Moore&weiss[8]에 따라 2차함수 형태의 관계식을 사용하였다.

$$\rho = \rho_M [1 - \beta(T - T_M)^2] \quad (1)$$

물의 경우 열팽창계수 β 는 $8.0 \times 10^{-6} (\text{C}^\circ)^{-2}$, T_M 은 3.98°C 이며 0°C 와 8°C 사이에서 4%이내의 오차를 가진다. 모든 물성치는 최대밀도를 가지는 온도의 값으로 일정하다고 가정하였다.

유동장과 온도장은 적절히 무차원화된 비정상 Navier-Stokes 방정식과 연속방정식, 에너지 방정식에 의하여 지배되며, 방정식은 생략하였다.

무차원 시간 τ 는 Brunt-Väisälä 진동수 N 의 역수로 무차원화 되었으며 아래와 같이 표현된다.

$$N \equiv [\beta g (\bar{T}_H - T_C)^2 / H]^2 = (Ra Pr)^{1/2} \frac{\kappa}{H^2} \quad (2)$$

위에서 Rayleigh 수는 $Ra \equiv \beta g (\bar{T}_H - T_C)^2 H^3 / \nu \kappa$ 로 정의 하였고 Prandtl 수는 $Pr \equiv \nu / \kappa$ 로 정의되었. ν 와 κ 는 각각 동점성계수와 열확산계수이다.

또한 무차원화된 뜨거운 벽 온도의 진폭과 진동수는 다음과 같다.

$$\varepsilon \equiv \Delta T' / (\bar{T}_H - T_C), \quad \omega \equiv f / N \quad (3)$$

위에서 알 수 있듯이 무차원 진동수 ω 는 Brunt-Väisälä 진동수 N 으로 무차원화 되었으므로, 공진주파수와 Brunt-Väisälä 진동수의 비교가 용의하다.

Nu 는 $X=a$ 에서의 국소 Nusselt 수를 평균한 것으로서 아래와 같이 정의된다.

$$Nu_{X=a} = \frac{L}{H} \int_0^H \left[U \theta (Ra Pr)^{1/2} - \frac{\partial \theta}{\partial X} \right]_{X=a} dY \quad (4)$$

정의된 문제를 풀기 위하여 SIMPLER 알고리즘 [9]에 기초한 FVM 기법에 의한 수치해석방법을 사용하였다. 대류 scheme은 Quick scheme을 사용하였다[10]. 엇갈림 격자를 사용하였고, 계산영역의 모든 경계쪽으로 밀집시켰다. 본 연구의 모든 경우에 대해서 62×52 의 격자를 사용하였고, 모든 경계층 내에 5개 이상의 격자가 포함되었다. 시간 간격의 경우는 기본적으로 무차원 시간 τ 에 대하여, $\Delta \tau = 2\pi / 1024 \omega$ 로써 한 주기를 1024개로 잘라서 계산하였으며, 매우 작은 ω 에 대해서는 더욱 작은 시간간격을 사용하였다. 위의 격자계와 시간간격

을 사용하여 Kwak & Hyun[5]의 경우와 비교한 결과 Nu 의 값이 상대오차 1% 이내로 일치하였다.

모든 값의 ω 에 대하여 가열벽면과 냉각벽면, 그리고 $X=0.5L$ 에서의 열전달량의 한 주기 평균인 $\overline{Nu^*}$ 값의 차이가 10^4 이내로 일치할 때까지 충분히 긴 시간을 계산하여 quasi-periodic 상태에서의 결과를 산출하였다.

3. 결과 및 토의

모든 계산에 대하여 Ra 는 10^7 , Pr 은 11.573, 종횡비 ($\equiv H/L$)는 1.0으로 고정하여 계산하였다.

Fig.2에서는 $\varepsilon=0$, 즉, 가열벽면의 온도가 일정하게 유지되는 경우의 정상상태 해를 보여준다. Fig.2(a)(b)는 각각 본 연구의 경우와 Boussinesq 유체의 경우에 해당한다. Boussinesq 유체의 경우 온도가 높을수록 작은 밀도를 가지게 되므로 가열벽면에서 윗방향의 유동이 발생하여 반시계방향의 유동이 발생한다. 한편, T_H 가 밀도최대치의 온도를 가지는 경우에는 가열벽면에서 밀도최대치를 가지게 되므로 시계방향으로 유동이 발생한다. 그러나, $T_H=3.98^\circ\text{C}$ 인 경우와 Boussinesq 유체의 경우는 전체적인 유동장의 형태나 유동장의 세기는 비슷하고, 두 경우 모두다 경계층 형태의 유동이고 용기 내부에 온도장이 안정하게 성층화 되어 있다.

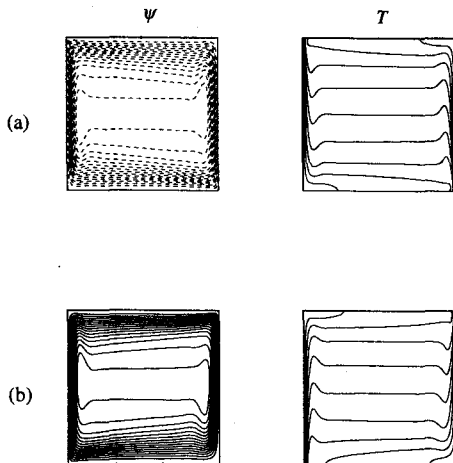


Fig.2 Exemplary steady solutions($\varepsilon=0$).
(a) For a Boussinesq fluid;
(b) For a non-Boussinesq fluid of Eq.(1).

앞에서 언급하였듯이 공진의 발생은 내부 온도

성층화에 의해서 생성되는 internal gravity 진동모드와 관련이 있으므로, 안정한 성층화가 내부에 지배적인 본 연구의 경우에서도 공진이 발생할 것을 예상할 수 있다.

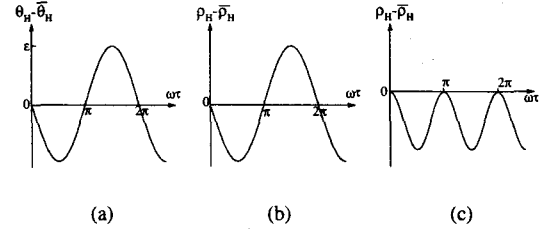


Fig.3 Periodic behavior of the pulsating conditions at the wall($X=1.0$).

- (a) Temperature
- (b) Density for a Boussinesq fluid
- (c) Density for a non-Boussinesq fluid of Eq.(1).

Fig.3에서는 주기적으로 진동하는 온도경계조건과 경계에서의 밀도의 거동을 Boussinesq 유체의 경우와 본 연구의 경우에 대해서 보였다. Fig.3(a)와 같이 온도경계조건은 시간에 따라 단순 sine 곡선으로 주어져 있다. Boussinesq 유체의 경우 밀도가 온도와 선형적인 관계를 가지게 되므로, 밀도 또한 단순 sine 곡선과 같은 형태의 거동을 보이게 된다. 그러나, 본 연구의 경우에는 밀도와 온도가 식(1)과 같이 제곱의 관계를 가지므로, 밀도가 Fig.3(c)과 같은 거동을 보인다. 벽면의 온도가 진동수 ω 로 진동한다면, 본 연구의 경우에 벽면에 인접한 유체의 밀도는 2ω 의 진동수를 가지고 진동하게 된다. 또한, 밀도 값은 3.98°C 때 최대이므로 온도가 평균값을 벗어남에 따라 항상 밀도가 낮아지게 된다. 온도가 3.98°C 인 가열벽면뿐만 아니라, 3.98°C 로부터 온도진폭보다 작은 차이 안에 있는 모든 영역에서 2ω 의 성분의 밀도진동이 존재하게 된다.

위에서 살펴본 2ω 성분의 밀도 진동의 존재가 유체의 공진에 어떠한 영향을 주는지 알아보자.

수치계산의 결과를 분석하기 위하여 Nu 값을 아래와 같이 정의하여 사용하였다.

$$Nu^* = \frac{Nu - Nu_{\varepsilon=0}}{Nu_{\varepsilon=0}}$$

$$A(Nu) = \frac{\text{Max}\{Nu(\tau)\} - \text{Min}\{Nu(\tau)\}}{2}$$

$$\text{for } \tau_o \leq \tau \leq \tau_o + \frac{2\pi}{\omega} \quad (5)$$

위에서 $Nu_{\varepsilon=0}$ 는 $\varepsilon=0$ 일때, 즉, 가열벽면의 온도가 변하지 않고 일정한 경우 ($T_H = \overline{T_H}$)의 Nu 값이다.

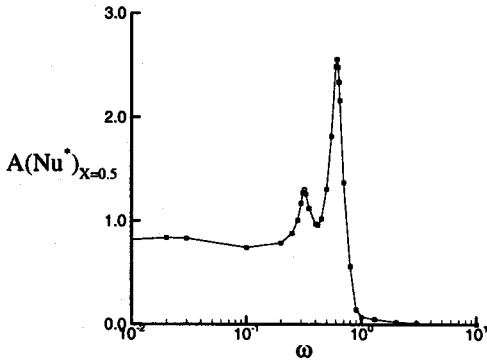


Fig.4 Amplitude of fluctuating part, $A(Nu^*)$, versus ω at $X=0.5L$.

Fig.4는 $\varepsilon=1.0$ 일때 quasi-periodic 상태에서의 열 전달 특성을 나타내고 있다. 즉, 가열벽면의 온도진동의 진폭 ε 이 냉각벽면 온도와 가열벽면의 평균온도의 차와 같은 크기를 가지는 경우이다. 공진을 판명하기 위한 기준으로서는 Lage & Bejan[1]에 의해 제안된 대로 $X=0.5L$ 에서의 열전달량의 진동폭이 최대가 되는 진동수를 공진주파수로 정의 하였다.

Fig.4는 $X=0.5L$ 에서 Nu 수의 진폭 $A(Nu^*)$ 를 여러가지 진동수 ω 값에 따라서 나타낸 것인데 $X=0.5L$ 에서 Nu^* 의 진폭 $A(Nu^*)$ 는 하나의 큰 첨점 외에 또 하나의 작은 첨점을 가지며 특정 주파수에서 열전달량이 크게 요동하는 것으로 보아서 밀도가 특정온도에서 최대치를 가지는 유체의 경우에도 명확히 공진이 발생한다.

Boussinesq 유체에 벽면온도진동이 sine 파의 형태로 가해지는 경우에 대한 연구에서는 공진은 하나의 진동수에서만 발생하는 것으로 보고되었다 [5,6,7]. 그러므로, 이러한 현상은 앞에서 살펴보았듯이 밀도최대치의 온도근처에서 밀도와 온도가 비선형적인 관계를 가지는 것과 관련이 있을 것이다.

Antohe & Lage[2]는 Boussinesq 유체의 경우이고 벽면으로 들어오는 열유속이 사각파의 형태로 주기적으로 진동하는 경우에 주요한 공진이 발생하는 진동수 외에 여러 개의 진동수에서 약한 공진이 일어남을 보였다. 그러나, 공진이 여러 개의 진동수에서 발생하는 이유에 대한 설명은 거의 없었다.

작은 첨점이 발생하는 ω 값은 0.32정도이고, 큰 첨점이 발생하는 ω 값은 0.62 정도였다. 공진주파수 근처에서 Nu^* 의 진폭은 큰 폭으로 증가되었고, 그 크기는 가열벽면의 온도진동의 진폭이 3배정도 증가되었다.

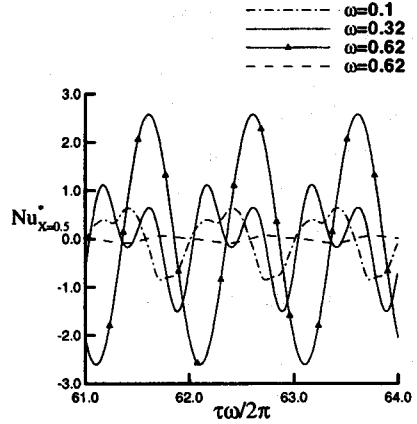


Fig.5 Time history of Nu^* at $X=0.5L$.

Fig.5에서는 첫번째 공진주파수, $\omega=0.32$ 와 두번째 공진주파수, $\omega=0.62$, 그리고, ω 가 공진주파수에 비하여 작은 경우와 큰 경우에 대해서, Nu^* 의 시간에 따른 거동을 보이고 있다. 특이한 현상은 $\omega=0.32$ 와 $\omega=0.1$ 의 경우에 있어서 한주기에 2번 진동하는 2ω 성분 진동이 나타난다는 것이다. 이러한 현상은 Fig.3에서 설명한 2ω 성분의 밀도진동의 영향이 유체의 대류에 영향을 미쳐서 발생한다. 주요한 공진주파수보다 큰 경우($\omega=1.0$)에는 진동수가 커서 벽면의 온도변화에 내부의 유체가 민감하게 반응할 수 없으므로, Nu^* 의 진동폭이 매우 작다.

앞에서 언급하였듯이 Kwak & Hyun[5]은 Paolucci & Chenoweth[11]의 internal wave 주파수를 예측하는 식을 이용하여 내부의 공진주파수를 예측할 수 있음을 보였다. Kwak & Hyun의 경우는 Boussinesq 유체에 관한 것이지만, T_H 가 밀도최대치의 온도를 가지는 경우에도 내부의 온도 성층화가 잘 이루어져 있으므로, internal gravity 진동 모드를 가지게 됨을 예측할 수 있다. 종횡비가 1이고 기본적인 모드에 대해서 Kwak & Hyun[5]의 공진주파수에 관한 무차원식은 다음과 같다.

$$\omega_c = \frac{C_i}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

C_i 는 벽면에서 떨어진 내부에서의 온도 기울기에 비례하는 수로서 정의 되어 있으나, 밀도최대치의 온도근처에서는 밀도와 온도가 선형적인 관계를 가지지 않기 때문에 C_i 값은 밀도기울기에 비례하는 수로서 정의하는 것이 타당하다. $X=0.5L$ 에서 한주기 평균 밀도장을 curve fitting 하여 C_i 값을 구한 결과 $C_i \cong 0.8706$ 였고, 이 값을 식 (6)에 대입하면 $\omega_c \cong 0.62$ 가 된다. 이 값은 주요한 공진주파수 $\omega_c=0.62$ 와 비교하면 잘 일치함을 알 수 있다.

이로써, Boussinesq 유체가 아니라도 내부 밀도 성층화에 대한 정보만 있다면 공진주파수의 예측이 가능함을 알 수 있다.

이러한 사실로부터 $\omega=0.32$ 에서 열전달의 공진이 발생하는 이유에 대한 추론이 가능하다. 온도는 단순 sine 곡선의 형태로 변화하지만, 내부의 유동장은 한 주기 내에서 두번 진동하게 된다. 이러한 경향은 Fig.6의 Nu 수의 진동형태에서 추론할 수 있다. 이러한 한 주기 내의 두번의 유동장의 진동이 시스템의 진동모드와 맞아떨어지면, 일반적인 공진 주파수의 절반이 되는 주파수에서 공진이 발생하는 것이다. $\omega=0.32$ 에서는 유동장이 한 주기 내에서 두번 진동하므로, 유동장은 $\omega=0.64$ 로 진동한다고 생각할 수 있다. 시스템의 진동모드가 주요한 공진 주파수인 $\omega=0.62$ 라고 생각하면 두 주파수가 거의 일치한다. 시스템의 진동모드는 내부의 밀도구배에 비례하므로, 시간에 따라 평균한 밀도구배가 달라지면 공진 주파수는 달라지게 된다[6]. 약간의 오차가 발생하는 것은 평균적인 밀도구배의 차이가 $\omega=0.32$ 인 경우와 $\omega=0.62$ 인 경우에 존재하기 때문일 것이다.

4. 결론

가열벽면의 온도가 밀도최대치의 온도를 중심으로 진동하는 경우, Boussinesq 유체의 경우처럼 공진이 발생하는 것을 확인하였다.

Boussinesq 유체의 경우에 공진주파수를 예측하는 Kwak & Hyun[5]의 방법이 밀도 최대치를 가지는 온도의 영역에서도 적용 가능함을 보였다.

본 연구의 경우 두개의 주파수에서 공진이 발생하였는데, 이러한 현상은 Boussinesq 유체와 대조적인 결과이다. 이러한 현상은 비선형의 밀도-온도 관계에 의한 것이며, Kwak & Hyun[5]의 주장과 일관된 설명이 가능하였다.

후 기

본 연구는 한국과학기술원 기계공학과와 국가지정연구실(National Research Laboratory)인 열전달 제어기술연구실의 연구비 지원에 의해 이루어졌음을 밝히며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. J. L. Lage, A. Bejan, The resonance of natural convection in an enclosure heated periodically from the side, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1993; **36**: 2027-2038.

2. B. V. Antohe, J. L. Lage, A dynamic thermal insulator: inducing resonance within a fluid saturate porous medium enclosure heated periodically from the side. *Int. J. Heat Mass Transfer* 1994; **37**: 771-782.
3. B. V. Antohe, J. L. Lage, Experimental Investigation on pulsating horizontal heating of a water-filled enclosure. *J. Heat Transfer*, 1996; **118**: 889-896.
4. B. V. Antohe, J. L. Lage, Amplitude effect on convection induced by time-periodic horizontal heating. *Int. J. Heat Mass Transfer* 1996; **39**: 1121-1133.
5. H. S. Kwak, J. M. Hyun, Natural convection in an enclosure having a vertical sidewall with time-varying temperature. *J. Fluid Mech.* 1996; **329**: 65-88.
6. H. S. Kwak, K. Kuwahara, J. M. Hyun, Resonant enhancement of natural convection heat transfer in a square enclosure. *Int. J. Heat Mass Transfer* 1998; **41**: 2837-2846.
7. H. S. Kwak, K. Kuwahara, J. M. Hyun, Prediction of the resonance frequency of natural convection in an enclosure with time-periodic heating imposed on one sidewall. *Int. J. Heat Mass Transfer* 1998; **41**: 3157-3160.
8. D. R. Moore, N. O. Weiss, Nonlinear penetrative convection. *J. Fluid Mech.* 1973; **61**: 553-581.
9. S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*. 1980, McGraw-Hill.
10. T. Hayase, J. A. C. Humphery, R. Grief, A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures. *J. Comput. Phys.* 1992; **98**: 108-118.
11. S. Paolucci, D. R. Chenoweth, Transition to chaos in a differentially heated vertical cavity. *J. Fluid Mech.* 1989; **201**: 379-410.