

# 동결과정을 포함한 다공층에서 자연대류에 대한 유한요소 해석

이문희\*, 최종욱\*\*, 서석진\*\*\*, 박찬국\*\*\*\*

## (Finite element solutions of natural convection in porous media under the freezing process)

Moon-Hee Lee, Jong-Wook Choi, Suk-Jin Seo, Chan-Guk Park

**Key words** : 유한요소법(Finite Element Method), 평균체적법(Average Volume Method), 자연대류(Natural Convection), 동결과정(Freezing Process), 용융과정(Melting Process), 다공층(Porous Media), 상 변화(Phase change)

### Abstracts

The Finite Element Solutions is reported on solid-liquid phase change in porous media with natural convection including freezing. The model is based on volume averaged transport equations, while phase change is assumed to occur over a small temperature range. The FEM (Finite Element Method) algorithm used in this study is 3-step time-splitting method which requires much less execution time and computer storage the velocity-pressure integrated method and the penalty method. And the explicit Lax-Wendroff scheme is applied to nonlinear convective term in the energy equation. For natural convection including melting and solidification the numerical results show reasonable agreement with FDM (Finite Difference Method) results.

### 1. 서론

다공층에서의 액-고체의 상변화는 토양의 용융, 채광과 건설작업의 인공적인 동결, 지면에 묻혀있는 열펌프 및 발전소 열교환기의 동결, 반도체의 동결유지등과 같이 자연현상과 산업분야에서 폭넓게 나타난다. 이렇게 다양한 응용에도 불구하고 포

화상태 다공층에서의 액-고체의 상변화에 대한 연구는 상대적으로 적게 관심을 가져왔다.

다양한 울(enclosures)에 대한 포화상태 다공층의 동결과 용융에 대해 Weaber와 Viskanta[1]는 실험 연구를 하였다. 그들의 직사각형 공동(vertical rectangular cavity)에 대한 동결실험은 액체-고체 계면의 모양과 움직임에 대한 자연대류의 영향이 있음을 분명히 보여준다. 또한 Lein과 Tankin은 정상상태 조건을 만족하는 동결과정을 포함한 다공층에서의 자연대류에 대해 실험과 유한차분법을 이용한 수치해석을 하였다.[2] O'Neil 과 Albert는 동결과정을 포함하지 않는 다공층에서의 자연대류에 대해 유한요소법을 이용하여 수치해석을 하였

\* 전남대학교 대학원, 기계공학과

\*\* 전남대학교 대학원, 기계공학과

\*\*\* 전남대학교 대학원, 기계공학과

\*\*\*\* 전남대학교 자동차 공학부

다[3].

복잡한 계면 구성요소를 계산하기 위하여 계산 모델 방정식은 미시적 보존식의 체적평균을 기초로 한다. 본 연구에서 사용하는 체적평균 방정식은 기존의 Darcy법을 이용한 실험식보다 일반적이다. 예를 들면, 평균방정식은 액체, 고체 그리고 다공층 영역에서 체적분류에 대하여 유용하다. 그래서 모든 영역에 단일 영역으로 간주할 수 있는 지배 방정식을 성립할 수 있다.

본 연구는 직각 공동 경계에서 동결과정을 포함한 다공층에서 자연대류에 대하여 체적평균 방정식을 기초로 해서 유한요소법을 이용하여 수치해석을 수행하였다.

본 연구에서는 속도와 압력에 대하여 순차적으로 해를 구하기 때문에 계산시간과 컴퓨터 저장공간이 다른 방법에 비하여 적게 소요되는 속도-압력 분리방법[4]을 이용하였다. 이 방법은 SIMPLE 알고리즘에 의한 방법과, unsteady 알고리즘에 의한 방법으로 나누어지는데, unsteady 알고리즘에 의한 시간분할방법은 연속방정식을 정확히 만족하는 장점을 가지고 있다.

## 2. 해석

### 2.1 지배방정식

본 연구 모델은 거시적(macroscopic) 보존방정식을 얻기위하여 체적평균법에 기초로 한다. 이 방법은 각각의 상(phase)에 대한 미소 체적요소( $V$ )를 적분하기에 타당성이 있다. Fig. 1(a)에서 다공층( $V_p$ )과 고체( $V_s(t)$ )-액체( $V_l(t)$ )로 구분된 유체층( $V_f$ )으로 구성되어 있음을 보여준다. 그래서 각각의 체적요소에 대하여 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\varepsilon = \frac{V_f}{V}, \quad \text{fraction fluid in volume element (1a)}$$

$$\gamma(t) = \frac{V_l(t)}{V_f}, \quad \text{fraction liquid in fluid (1b)}$$

$$\delta(t) = \frac{V_l(t)}{V} = \varepsilon\gamma(t), \quad \text{fraction liquid in volume element (1c)}$$

용융부분에서 유체는 완전한 액체 상태이므로  $\gamma = 1$ ,  $\delta = \varepsilon$  이다. 반대로 고체부분에서는  $\gamma = \delta = 0$  이 된다. 여기에서 다공도( $\varepsilon$ )는 유체상태 조건에 따른다. Fig. 1(b)에서 액-고체 계면의 형상이 다

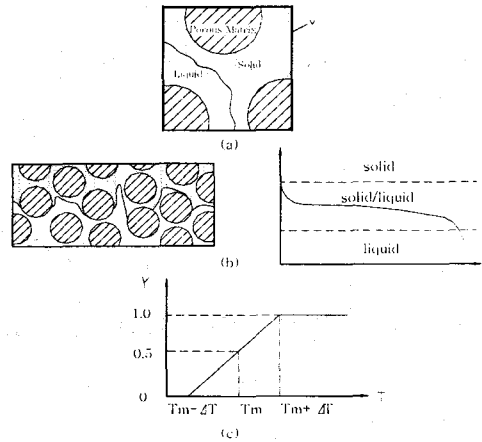


Fig. 1. Illustration of the phase-change process in a porous medium:(a) schematic of a control volume used for averaging; (b) typical liquid fraction profile;(c) variation of the liquid fraction with temperature.

공체 때문에 매우 불규칙적으로 나타나는 것을 보여준다. 이는 다공체와 유체의 열전도도의 차이 때문에 나타난다. 그래서 용융점( $T_m$ )에 근접한 체적 요소는 고체, 액체 상태 그리고 다공체를 동시에 갖게 된다. 이때의 체적요소에서는  $0 < \gamma < 1$ 와  $0 < \delta < \varepsilon$  이 된다.

계산모델은 직각 공동에서 양옆에 온도차를 주고 상,하는 단열조건을 준 경우와 반대로 상,하에 온도차를 주고 양 옆을 단열조건으로 하는 두가지 경우를 고려하였다.

평균 연속방정식, 운동량방정식 그리고 에너지방정식은 식 2(a)-2(c)와 같다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{\rho_l}{\delta} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla P + \frac{\mu_l}{\delta} \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{\mu_l}{K} \mathbf{u} - \rho_l g \beta (T - T_{ref}) \quad (2b)$$

$$\frac{\rho c}{\delta} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_l c_l (\mathbf{u} \cdot \nabla T) = \nabla \cdot (k_{eff} \nabla T) - \varepsilon \rho_l \Delta h \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (2c)$$

운동량 방정식에서 오른쪽 두 번째는 거시적 전단 응력을 계산하는 Brinkman항이고, 세 번째는 경험적 Darcy항이다. Brinkman항의 유효 점성계수는 액체의 점성계수와 동일하다. 식 2(c)서 혼합체의

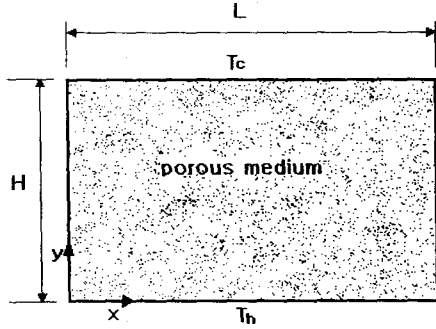


Fig.2 The physical model and coordinate system

평균 열용량( $\overline{\rho c}$ )는 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{\rho c} = \epsilon \rho_l [\gamma c_l + (1 - \gamma) c_s] + (1 - \epsilon) \rho_p c_p \quad (3)$$

투과도( $K$ )는 Kozeny-Carman 방정식으로부터 계산될 수 있다.

$$K(\delta) = \frac{d_m^3 \delta^3}{175(1 - \delta)^2} \quad (4)$$

$d_m$ 은 구슬의 평균 지름이다.

## 2.2 무차원화 방정식

본 연구에서 고려된 물리적 모델 Fig 2(a), 2(b)이다. 직각공통에서 높이( $H$ ),너비( $L$ ),온도( $T_H, T_C$ )의 경계조건을 보여 주고 있다.

초기에 계는 일정온도( $T_i$ )로 유지되며, 동결과정을 고려한 본 연구에서  $T_i = T_H$ 이다. 용융온도( $T_m$ )는  $T_C < T_m < T_H$ 이고, 유체는 초기( $t=0$ )에 액체 상태에 있고, 시간의 경과( $t>0$ )에 따라 저온의 영향 때문에 동결을 시작한다.

무차원화 변수 및 연속방정식, 운동량방정식, 에너지방정식 그리고 초기조건 및 경계조건은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (5a)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{1}{\delta} \frac{\partial u_i}{\partial \tau} = -\nabla P + \frac{1}{\delta} \nabla^2 u_i - \frac{x}{Da} u_i + Ra \theta e_y \quad (5b)$$

$$\Omega \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u_i \cdot \nabla \theta = \nabla \cdot (\Lambda \nabla \theta) - \frac{1}{Ste} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} \quad (5c)$$

Fig (1c)에서 온도에 대한 액체량( $\delta$ )의 관계는 다음의 무차원화 표현을 갖는다.

$$\delta = \begin{cases} \epsilon & \text{for } \theta \geq \theta_m + \Delta \theta \\ \epsilon \left( \frac{\theta - \theta_m + \Delta \theta}{2\Delta \theta} \right) & \text{for } \theta_m - \Delta \theta < \theta < \theta_m + \Delta \theta \\ 0 & \text{for } \theta \leq \theta_m - \Delta \theta \end{cases} \quad (6)$$

각 경우에 대한 경계조건 및 초기조건은 다음과 같다.

( 경우 1 )

$$\begin{aligned} \theta = 1, u, v = 0 & \text{ at } \xi = 0, 0 \leq \eta \leq LH \\ \theta = 0, u, v = 0 & \text{ at } \xi = 1, 0 \leq \eta \leq LH \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0, u, v = 0 \text{ at } \eta = 0, LH \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{melting} \\ 1 & \text{freezing} \end{cases} \text{ for } \tau \leq 0$$

( 경우 2 )

$$\begin{aligned} \theta = 1, u, v = 0 & \text{ at } \eta = 0, 0 \leq \xi \leq LH \\ \theta = 0, u, v = 0 & \text{ at } \eta = 1, 0 \leq \xi \leq LH \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0, u = 0, \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \text{ at } \xi = 0, LH \quad 0 \leq \zeta \leq 1$$

$\theta = 1$  at  $0 \leq y^* \leq 1, 0 \leq x^* \leq LH$  for  $\tau \leq 0$   
식 (5a-c)에서 나타낸 무차원 변수는 다음과 같다.

$$Ra = \frac{g \beta \lambda (T_H - T_C) H^3}{\nu \alpha_i} \quad \text{Rayleigh 수}$$

$$Pr = \frac{\nu_l}{\alpha_i} \quad \text{Prandtl 수}$$

$$Da = \frac{K(\epsilon)}{H^2} \quad \text{Darcy 수}$$

$$Ste = \frac{c \lambda (T_H - T_C)}{\Delta h} \quad \text{Stefan 수}$$

$$\theta_m = \frac{T_m - T_C}{T_H - T_C} \quad \text{용융 온도}$$

## 2.3 유한요소법을 이용한 수치해석

운동량방정식에 대하여 확산항, 압력항, 속도보정 단계로 나누어서 계산하는 3단계 시간분할방법이 사용되고, 에너지방정식에 대하여 대류항, 확산항 단계로 나누어서 2단계 시간분할방법이 사용된다.

### 2.3.1 확산항(운동량방정식)

운동량방정식에서 확산항과 source항을 고려하면 식(9)와 같고, Galerkin 방법을 적용하면 식(10)과 같다.

$$\frac{1}{Pr} \frac{1}{\delta} \frac{\partial u_i}{\partial \tau} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_j^2} + \frac{x}{Da} u_i - Ra \theta e_y = 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_j u_j^c d\Omega &= \int_{\Omega} N_j u_j^0 d\Omega - \Delta t \text{Pr} \int_{\Omega} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_j^0}{\partial \xi_i} d\Omega \\ &+ \Delta t \text{Pr} \int_{\Gamma} N_j \frac{\partial u_j^0}{\partial \xi_i} n_i d\Gamma - \Delta t \frac{\text{Pr} \delta}{Da} \int_{\Omega} N_j u_j^0 d\Omega \\ &+ \Delta t \text{Pr} \delta Ra \int_{\Omega} N_j \theta d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,  $N$ 은 보간함수이고, 속도와 압력에 대하여 1차 선형함수가 된다. 첨자  $\nu$ 는 확산항에서 계산된 값을 나타내고, 첨자 0는 초기값을 나타낸다

### 2.3.2 압력항

운동량방정식에서 압력항만 고려하면 식(11)과 같고, 양변에 gradient를 취한 후 연속방정식을 적용하면 식(12)와 같다.

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\delta} \frac{\partial u_j}{\partial \tau} = - \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 p^n}{\partial \xi_j^2} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\delta} \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial u_j^n}{\partial \xi_j} \quad (12)$$

여기서, 첨자  $n$ 은 다음 단계의 값을 나타내고, 식(12)에 Galerkin 방법을 적용하여 정리하면 식(13)와 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} N \frac{\partial p^n}{\partial \xi_j} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial \xi_j} \frac{\partial p^n}{\partial \xi_j} d\Omega &= \\ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\delta} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} N \frac{\partial u_j^n}{\partial \xi_j} d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

### 2.3.3 속도보정

식(13)에서 구한 압력  $p^n$ 은 연속방정식을 만족한다. 그러나 확산항에서 구한 속도값  $u^n$ 은 연속방정식을 만족하지 못하기 때문에 이에 대한 속도보정 과정이 필요하다. 연속방정식을 만족하는 속속도는 압력항식(12)을 이용하여 구해진다. 식(12)을  $u_j^n$ 에 대하여 전개하면 식(14)과 같다.

$$u_j^n = u_j^c - \Delta t \text{Pr} \delta \frac{\partial p^n}{\partial \xi_j} \quad (14)$$

식(14)에서 속도  $u_j^n$ 은 확산항에서 구한 속도  $u_j^c$  값과 압력항에서 구한 압력  $p^n$  값을 이용하여 구한다. 식(14)에 Galerkin 방법을 적용하여 정리하면 식(15)과 같다.

$$\int_{\Omega} N u_j^n d\Omega = \int_{\Omega} N u_j^c d\Omega - \Delta t \text{Pr} \delta \int_{\Omega} N \frac{\partial p^n}{\partial \xi_j} d\Omega \quad (15)$$

### 2.3.4 대류항(에너지방정식)

에너지방정식에서 대류항만 고려하면 식(16)과 같고, 식(16)에 Galerkin 방법을 적용하여 다시 정리하면 식(17)과 같다. 여기서 비선형 대류항에 explicit Lax-Wendroff scheme을 적용하기 위해 2차 미분항까지 고려한 Taylor 급수전개가 이용된다.

$$\Theta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u_j \frac{\partial \theta}{\partial \xi_j} = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N \theta^c d\Omega &= \int_{\Omega} N \theta^0 d\Omega - \frac{\Delta t}{\Theta} \int_{\Omega} N \overline{u_j^n} \frac{\partial \theta^0}{\partial \xi_j} d\Omega \\ &- \frac{\Delta t^2}{2\Theta} \left[ \int_{\Omega} N \overline{u_j^n} \frac{\partial \overline{u_j^n}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \theta^0}{\partial \xi_j} d\Omega \right. \\ &\left. + \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial \xi_j} \overline{u_j^0} \overline{u_j^0} \frac{\partial \theta^0}{\partial \xi_j} d\Omega \right] \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2\Theta} \int_{\Gamma} N \overline{u_j^0} \overline{u_j^0} \frac{\partial \theta^0}{\partial \xi_j} n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

### 2.3.5 확산항

에너지 방정식에서 확산항과 source항을 고려하면 식(18)과 같고, Galerkin 방법을 적용하여 정리하면 식(19)과 같다.

$$\Theta \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \Lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_j^2} + \frac{1}{\text{Ste}} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N \theta^n d\Omega &= \int_{\Omega} N \theta^c d\Omega - \frac{\Delta t}{\Theta} \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial \xi_j} \frac{\partial \theta^c}{\partial \xi_j} d\Omega \\ &+ \frac{1}{\text{Ste}} \frac{1}{\Theta} \int_{\Omega} N \delta d\Omega + \frac{\Delta t}{\Theta} \int_{\Gamma} N \frac{\partial \theta^c}{\partial \xi_j} n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (19)$$

## 3. 결과 및 토론

### 3.1 좌,우 온도차에 따른 해석

수치계산에 필요한 시간 간격은  $\tau = 6 \times 10^{-6}$  ( $t=0.46s$ )으로 하였고, 유체는 순수한 물로 가정하였다.

용융과정을 포함한 다공층의 유선 및 계면의 위치에 대하여 Fig. 3 (a),(b)는 유한요소법에 의한 결과이고 Fig. 3 (c),(d)는 Wen-Jeng Chang과 Dong-Fang Yang[5]이 계산한 유한차분법의 의한 결과이다. 계산결과에 따른 유선 및 계면의 위치는 유한차분법의 결과값이 좀더 진진해 있음을 보여주고 있다. 본 연구에서는 운동량방정식의 계산을 위해 Forchheimer 항과 대류항을 배제하였기 때문에 유한차분법의 계산결과보다 속도영향의 차이 때문에 유선이 약간의 차이가 남을

알 수 있다. 그러나 대체적으로 결과 값은 상당한 일치율을 보여주고 있다. 계산 결과에서 윗면의 용융 속도가 밑면의 속도보다 빠르게 움직임을 알 수 있다. 자연대류에 의한 유동현상이 고온의 경계근처에서 상승하는 속도가 하강 속도보다 크기 때문에 질량보존 법칙에 따른 밑면의 속도폭이 작게 나타난다. 따라서 Fig. 3.에서 보는 것처럼 계면이 기울어진 형태로 나타나게 된다.

동결과정을 포함한 다공층의 유선은 Fig. 4와 같다. 동결과정은 앞에서 설명한 것 처럼 초기조건을 바꾸면 용융과정과 동일한 수치해석 방법으로 계산될 수 있다. 대체적으로 유선 및 계면의 형태는 용융과정의 형태와 유사하게 나오고 있다.

### 3.2 상, 하 온도차에 따른 해석

3.1에서 고려한 유한차분법과의 비교결과를 통해 상,하의 온도차를 부여해서 다공층의 동결과정을 수치해석 하였다. 고온( $T_H$ )을  $10^\circ\text{C}$ 로 하고,저온( $T_C$ )을  $-10^\circ\text{C}$ 로 경계조건을 주었으며, 다공도( $\epsilon$ )는 0.3, 투과도( $K$ )는  $2.55 \times 10^{-4}$ 이고, Pr 수 9.45로 하였다. Fig. 5은 각각의 시간경과에 따른 유선을 보여주고 있다. 시간이 경과 될수록 온도차에 따른 자연대류의 움직임이 활발하게 나타나는 것을 볼 수 있다. 또한 계면의 형태는 파동주기를 갖으며, 폭은 시간이 흐를수록 크게 나타난다. 계에서 보여주는 2개의 cell은 질량보존에 따라서 거의 대칭적으로 나타나고 있다.

Fig. 6은 시간경과에 따른 온도분포를 보여주고 있다. 많은 시간이 경과할수록 저온의 영향과 유동의 움직임이 활발하게 생김으로서 온도분포가 전 영역에 대하여 고루 분포되고, 정확한 대칭성을 보여주고 있다.

아랫면에 고온( $T_H$ )을 준 경우에 자연대류 현상이 좌,우에 온도차를 준 경우보다 활발하게 나타난다. 이는 계면의 형태와 위치에 많은 영향을 주게 되는데 초기에 유동의 움직임이 크게 됨으로 동결과정에서 생기는 계면생성을 저해시킨다. 그래서 계면의 위치는 Fig. 6에서 처럼 시간의 경과에 따라서 매우 적게 하강하고 있다. 전체적인 계산결과는 기존의 논문과 잘 일치한다.

## 4. 결 론

다공층에서 용융과 동결에 따른 액-고체의 상변

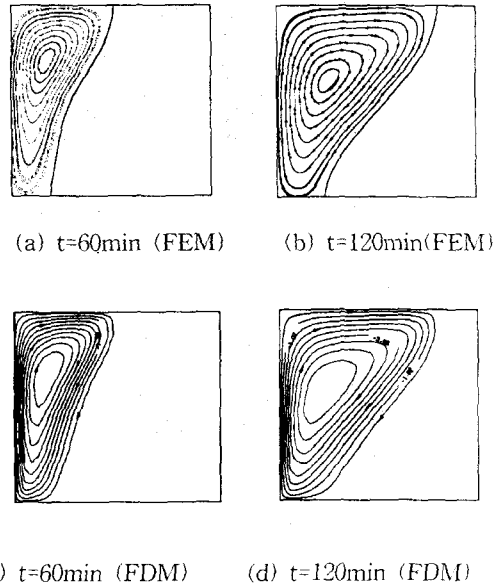


Fig. 3. Comparison of streamlines for melting for  $Ra = 5 \times 10^7$ ,  $Ste = 0.16$ ,  $Da = 6 \times 10^{-6}$

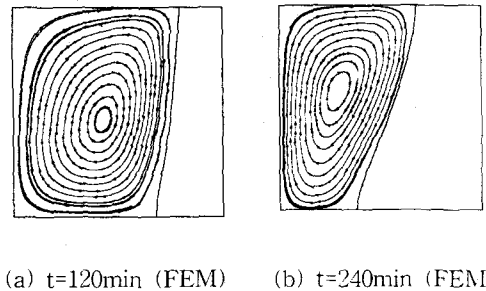
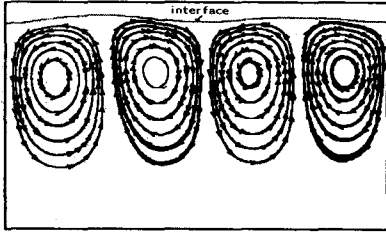


Fig. 4 Streamlines obtained by FEM for  $Ra = 5 \times 10^7$ ,  $Ste = 0.16$ ,  $Da = 6 \times 10^{-6}$

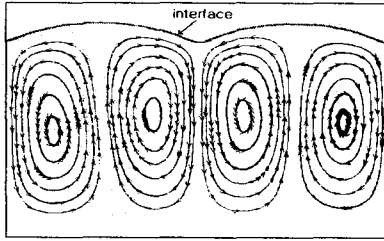
화가 생기는 경우의 자연대류를 유한요소법으로 해석하였다. 수치해석방법으로 유한요소법 중 계산 시간과 컴퓨터 저장공간을 적게 소요되는 3단계 시간분할방법을 이용하였고, 복잡한 계면의 계산을 위하여체적평균 방정식을 이용하였다.

용융과 동결과정의 계산결과를 유한차분법의 해석 결과와 비교하였을 때에 상당히 일치하는 것을 볼 수있었다. 또한 상,하의 온도차가 있을 때의 동결과정을 해석하였으며, 시간경과에 따른 계면의 형태를 알 수 있었다.

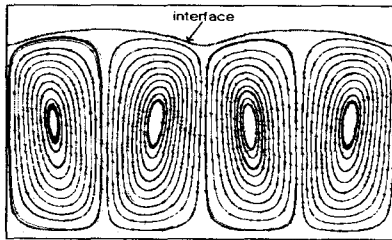
본 연구결과를 기초로 유한요소법의 장점을 최대



(a) t=140 min



(b) t=280 min



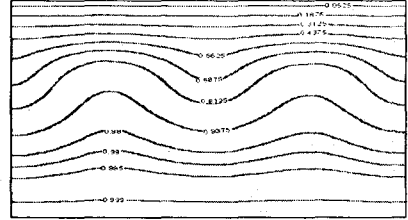
(c) t=350 min

Fig. 5. Measured the contours for time dependent streamlines for  $Ra = 9.8 \times 10^7$ ,  $Da = 2.55 \times 10^{-6}$ ,  $Ste = 0.034$

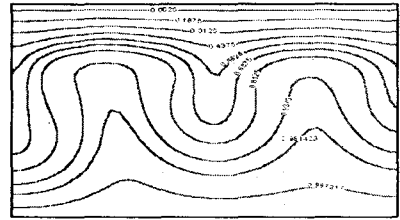
한 이용한다면 상변화가 있는 다공층의 3차원 해석 및 다양한 유체를 포함한 자연대류 해석에 적절할 것으로 생각된다.

### 참고문헌

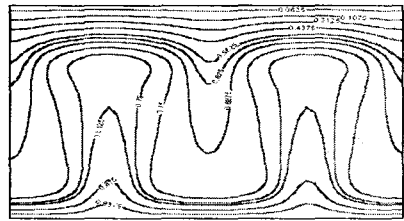
- (1) J.A.Weaver and R.Viskanta, 1986,"Freezing of liquid-saturated porous media", *ASME J. Heat Transfer* 108,654-659
- (2) H.Lein and S.Tankin,1990,"Natural convection in porous media-Freezing", *J. Heat Transfer*, vol35



(a) t=140 min



(b) t=280 min



(c) t=350 min

Fig. 6. Measured the contours for time dependent temperature profile for  $Ra = 9.8 \times 10^7$ ,  $Da = 2.55 \times 10^{-6}$ ,  $Ste = 0.034$

pp255-268

- (3) K.O'Neil and M.R.Albert,1984,"Computation of porous media natural convection flow and phase change",pp 213-229,Springer,Berlin
- (4)B.Ramaswamy,1988,"Finite Element Solution for advection and Natural convection flow".*Comput. Fluids*, Vol.16,pp 349-388
- (5) Wen-Jeng Chang,1994,"Natural convection for the melting of ice in porous media",*J. Heat Transfer*, Vol.39, pp 2333-2348
- (6)S.Chellaiah,1987,"Freezing of water-saturated porous media in the presence of natural convection"