

# NURBS 곡면에서 사각형 요소망의 자동생성 시스템

김형일\*, 박장원\*, 권기연\*, 조운원\*, 채수원\*\*

## Automatic Generation System for Quadrilateral Meshes on NURBS Surfaces

Hyung-Il Kim, Jang-Won Park, Ki-Youn Kwon, Yun-Won Cho and Soo-Won Chae

**Key Words :** Quadrilateral Mesh, NURBS Surface, Trimmed Parametric Surface, IGES

### Abstract

An automatic mesh generation system with unstructured quadrilateral elements on trimmed NURBS surfaces has been developed. In this paper, NURBS surface geometries in the IGES format have been used to represent model shape. NURBS surface is represented as parametric surface. So each surface could be mapped to a 2D parametric plane through the parametric domain. And then meshes with quadrilateral elements are constructed in this plane. Finally, the constructed meshes are mapped back to the original 3D surface through the parametric domain. In this paper, projection plane, quasi-expanded plane and parametric plane are used as 2D mesh generation plane. For mapping 3D surface to parametric domain, Newton-Raphson Method is employed. For unstructured mesh generation with quadrilateral elements on 2D plane, a domain decomposition algorithm using loop operators has been employed. Sample meshes are represented to demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

### 1. 서 론

최근 제품의 설계에 있어서 기능의 향상은 물론 아름다운 디자인이 점점 더 중요해짐에 따라, 좀 더 복잡하고 유연한 곡면의 사용이 광범위하게 확대되고 있는 추세이다. 자동차, 선박, 항공기, 각종 가전 제품 등의 외형 설계에 사용되는 곡면은, 보통 해석곡면(평면, 원통면, 구면 등 수학적으로 하나의 식으로 표현되는 곡면)으로 표현할 수 없는 복잡한 형태를 포함하게 된다. 따라서 CAD 시스템을 사용하여 이런 제품의 형상을 모델링 할 때, 작은 곡면조각(patch)들의 조합으로 형상을 표현하는 자유곡면이 사용 된다. [1] 특히 NURBS 곡면은 해석곡면과 자유곡면을 모두 표현할 수 있는 일반적인 수학적 기반을 제공하므로, 대부분의 CAD 시스템에서 곡면을 표현하는데 사용되고 있다.

본 논문은 NURBS 곡면으로 이루어진 3차원

모델에 사각형 요소망을 자동 생성하는 시스템의 개발에 관한 것이다. 먼저 CAD 시스템에서 생성한 곡면 모델의 정보를 입력하여 요소망을 생성한 후 해석 시스템에서 사용 가능한 형태의 요소망 정보를 출력한다.

형상정보의 입력은 일반적으로 사용되는, trimmed NURBS 곡면과 표준 자료교환 형식인 IGES format[2]을 사용하였다. 또한 요소망 생성의 계산 효율을 고려하여 간접접근 방식에 기초한 각 곡면상에 요소망을 생성하였다. 요소망을 곡면으로 변환할 때 발생하는 찌그러짐을 줄이고 시스템의 유연성을 높이기 위해 입력된 곡면의 형상에 따라 적절한 변환평면을 사용 하였다.[3-5] 또한 평면에서 요소망 생성을 위해 사각 분할법을 사용 하였다.[6] 각 곡면단위로 요소망을 생성하므로 여러 개의 곡면으로 이루어진 모델의 경우 곡면 경계에서 절점이 중복된다. 따라서 이를 제거한 후 일반적인 해석 시스템과의 연결이 가능하도록 요소망 정보를 출력하였다.

\* 고려대학교 대학원 기계공학과

\*\* 고려대학교 기계공학과

## 2. 형상 정보의 입력

일반적으로, CAD 시스템에서 생성한 곡면모델은 여러 종류의 곡면들을 포함한다. 원통면, 원뿔면, 구면, 회전곡면 등의 해석곡면과 블렌딩 곡면, Bezier 곡면, NURBS 곡면 등의 자유곡면이 여기에 해당한다. 그러나, 대부분의 CAD 시스템들은 다른 시스템과의 자료교환을 위해 이들 곡면에 관한 정보를 가장 일반적인 형태인 NURBS 곡면으로 변환하고, 표준 자료교환 형식으로 출력하고 있다. 본 논문에서는 형상정보 입력의 일반성을 확보하기 위해 IGES 형식으로 표현된 trimmed NURBS 곡면을 사용하였다.

### 2.1 트림곡면(trimmed parametric surface)

CAD 시스템들은 트림곡면(trimmed surface)과, 기저곡면(basis surface)을 매개변수 영역에서 정의되는 트림곡면(trimmed parametric surface)으로 표현하는데, 트림곡면의 경계곡선을 트림곡선(trimming curve)이라 한다. Fig.1 과 식(1) 에서 보는 바와 같이 곡면의 정의역인 매개변수영역과 곡면과의 사상(mapping)은 곡면식  $S(u,v)$  으로 표현되며, 매개변수영역에서  $B(t)$  로 표현된 트림곡선은 위 사상에 의해 3 차원 공간에서  $C(t)$  로 표현된다.

$$\begin{aligned} S(u,v) &= (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \\ (u_{min} \leq u \leq u_{max}, v_{min} \leq v \leq v_{max}) \\ B(t) &= (u(t), v(t)) \quad (t_{min} \leq t \leq t_{max}) \\ C(t) &= S(B(t)) = S(u(t), v(t)) \\ &= (X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)), Z(u(t), v(t))) \end{aligned} \quad (1)$$

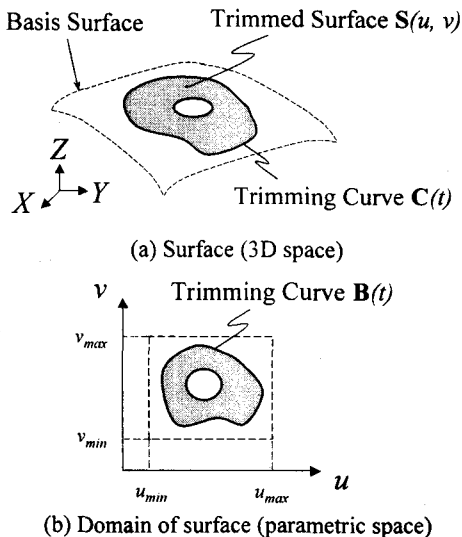


Fig. 1 Trimmed parametric surface

### 2.2 NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) 곡면

NURBS 곡면은 조정점들과 각 조정점의 가중치 그리고 각 구간에서 조정점들의 영향을 계산하는 B-Spline 기저함수로 이루어지는 매개변수 곡면이다. 매개변수  $u$  방향 차수가  $p$  이고  $v$  방향 차수가  $q$  인 NURBS 곡면은 다음과 같은 매개변수 식으로 정의 된다.

$$S(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad (2)$$

$$u_{min} \leq u \leq u_{max}, v_{min} \leq v \leq v_{max}$$

여기서,

$S(u,v)$  : point on surface

$N_{i,p}(u)$  :  $i$ th B-Spline basis function

$N_{j,q}(v)$  :  $j$ th B-Spline basis function

$\{w_{i,j}\}$  : weight  $((n+1) \times (m+1))$ 개)

$\{P_{i,j}\}$  : control point  $((n+1) \times (m+1))$ 개)

이다.

NURBS 곡면은 기저함수의 성질에 의해 충분한 연속성 보장, 극부변형의 가능성, 곡면제어의 편의성 등 많은 장점을 가지고 있어 오늘날 CAD 시스템에서 중요한 위치를 차지하고 있다. 특히 유리(rational)식으로 표현된 기저함수의 사용으로 평면, 구면, 원추 곡면등과 같은 해석곡면과 각종 자유곡면을 모두 표현할 수 있으므로 가장 일반적인 형태의 곡면이라 할 수 있다. [7]

### 2.3 IGES 파일로부터 형상정보의 추출

형상정보는 형상 요소들의 위치에 관한 기하(geometry)정보와 각 요소간의 연결상태에 관한 위상(topology)정보로 구성되어 있다. Fig.2 과 같이 IGES 형식으로 전달되는 형상정보는 각 곡면단위로 전달되므로 곡면들간의 위상정보는 포함되어 있지 않다. 본 논문에서는 IGES 형식의 파일로부터 형상정보를 추출하기 위해, 기하정보는 IGES entity No. 126, 128 로 정의되는 Rational B-Spline curve, Rational B-Spline surface 의 정보를, 위상정보는 IGES entity No. 102, 142, 144 로 정의되는 composite curve, curve on a parametric surface, trimmed parametric surface 의 정보를 사용하였다.[2]

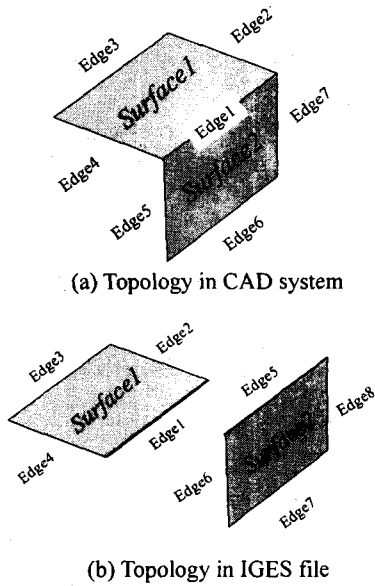


Fig. 2 Characteristics of the IGES format

### 3. 곡면에서의 요소망 생성

간접접근 방식에 기초한 곡면 요소망 생성기법에서는 3차원의 곡면을 가진 곡면을 2차원의 평면으로 변환하여 요소망을 생성한다. 본 논문에서는 요소망을 곡면으로 변환할 때 발생하는 찌그러짐을 줄이고 시스템의 유연성을 높이기 위해 입력된 곡면의 형상에 따라 적절한 변환평면을 사용하였다. 즉, 곡면의 형상을 고려하여 투영평면, 근사 전개 평면, 매개변수 평면 중에서 하나를 선택하도록 하였다.

#### 3.1 투영평면

투영평면(projection plane)은 기저곡면의 네 꼭지점에 대한 변환으로 구해지며[3~4], 다음과 같은 특징을 가진다. 구면, 원뿔면등과 같이 특이점을 포함하는 곡면의 경우에도 요소망 생성이 가능하다. 그러나, 회전각이 큰 회전곡면의 경우 곡면 내부에서 요소망의 질이 좋지 않으며 회전각이 360°인 경우에는 평면의 구성이 불가능하다.

Fig.3에서 보는 바와 같이, 우선 기저곡면의 네 꼭지점 중 세 개를 선택하여 만들어지는 네 개의 삼각형 가운데 면적이 가장 넓은 삼각형을 찾는다. 그리고, 이 삼각형을 포함하는 평면을 투영 평면으로 정한 후, 이 평면에 기저곡면의 네 꼭지점을 투영하여 얻은 사각형의 영역을 투영 평면 영역으로 결정한다.

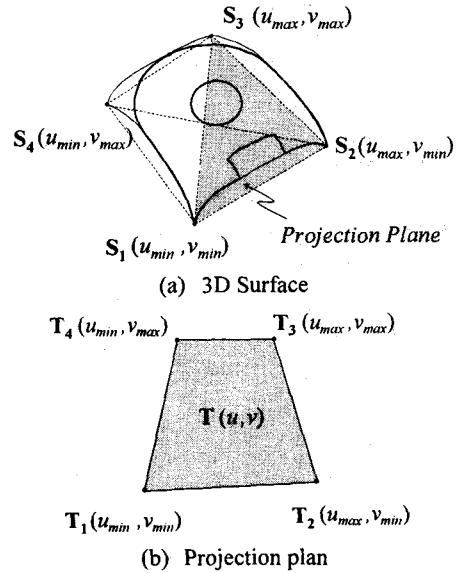


Fig. 3 Definition of the projection plane

이를 위해 곡면의 네 꼭지점  $S_1, S_2, S_3, S_4$ 의 좌표를 동차좌표(homogeneous coordinate)로 바꾼 후 식 (3)의 투영변환을 통해 투영평면의 네 꼭지점  $T_1, T_2, T_3, T_4$ 의 좌표를 구한다.

$$T_i = S_i M \quad i=1,2,3,4 \quad (3)$$

여기서  $T_i^T = (x_i, y_i, 0, 1)$ ,  $S_i^T = (X_i, Y_i, Z_i, 1)$ ,  $M$ 은  $4 \times 4$  크기의 투영 변환 행렬이다.

#### 3.2 근사 전개 평면

근사 전개 평면은 기저곡면의 경계곡선과 대각선의 길이로부터 구해지며[5], 다음과 같은 특징을 가진다. 특이점을 포함하는 곡면의 경우에도 요소망 생성이 가능하며 곡면의 형상을 근사적으로 표현할 수 있다. 그러나, 네 개의 경계곡선의 길이로부터 사각형의 구성이 실패하는 경우에는 평면의 구성이 불가능하다.

Fig.4에서 보는 바와 같이, 우선 기저곡면의 네 경계곡선의 길이  $l_1, l_2, l_3, l_4$ 와 두 대각선의 길이  $l_5, l_6$ 를 구한다. 이렇게 구해진 길이를 바탕으로 펼친평면의 네 꼭지점의 좌표를 구한다.  $T_1 = (x_1, y_1)$ 은 임의의 위치에 선정할 수 있으나, 편의상 원점으로 선택한다.  $T_2 = (x_2, y_2)$ 는  $l_1$ 을 만족하도록 결정한다.  $T_3 = (x_3, y_3)$ 와  $T_4 = (x_4, y_4)$ 는  $l_2, l_3, l_4$ 를 만족시키며 두 대각선의 길이 비( $l_5 / l_6 = l_3 / l_6$ )가 유지되도록 결정한다.

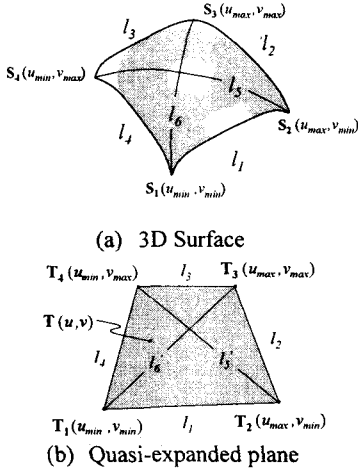


Fig. 4 Definition of the quasi-expanded plane

### 3.3 매개변수 평면

매개변수 평면은 IGES 형식으로 입력된 형상 정보 안에 포함되어 있으므로 따로 구할 필요가 없다. 그러나, 요소망의 찌그러짐이 많이 발생하고 특이점을 포함하는 곡면의 경우 변환평면의 구성이 실패하므로, 투영 평면과 근사 전개 평면이 모두 실패할 경우에만 사용한다.

이렇게 해서 선택된 변환평면 영역은, 구해진 네 꼭지점  $T_1, T_2, T_3, T_4$ 의 선형 보간으로 정의될 수 있으므로 식(4)과 같은 매개변수식으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v)) \\
 &= (u_{\max} - u)(v_{\max} - v)\mathbf{T}(u_{\min}, v_{\min}) + (u - u_{\min})(v_{\max} - v)\mathbf{T}(u_{\max}, v_{\min}) \\
 &\quad + (u - u_{\min})(v - v_{\min})\mathbf{T}(u_{\max}, v_{\max}) + (u_{\max} - u)(v - v_{\min})\mathbf{T}(u_{\min}, v_{\max}) \\
 &= u_{\max}v_{\max}\mathbf{T}(u_{\min}, v_{\min}) - u_{\min}v_{\max}\mathbf{T}(u_{\max}, v_{\min}) \\
 &\quad + u_{\min}v_{\min}\mathbf{T}(u_{\max}, v_{\max}) - u_{\max}v_{\min}\mathbf{T}(u_{\min}, v_{\max}) \\
 &\quad + \{-v_{\max}\mathbf{T}(u_{\min}, v_{\min}) + v_{\max}\mathbf{T}(u_{\max}, v_{\min}) \\
 &\quad - v_{\min}\mathbf{T}(u_{\max}, v_{\max}) + v_{\min}\mathbf{T}(u_{\min}, v_{\max})\}u \\
 &\quad + \{-u_{\max}\mathbf{T}(u_{\min}, v_{\min}) + u_{\max}\mathbf{T}(u_{\max}, v_{\min}) \\
 &\quad - u_{\min}\mathbf{T}(u_{\max}, v_{\max}) + u_{\min}\mathbf{T}(u_{\min}, v_{\max})\}v \\
 &\quad + \{\mathbf{T}(u_{\min}, v_{\min}) - \mathbf{T}(u_{\max}, v_{\min}) + \mathbf{T}(u_{\max}, v_{\max}) - \mathbf{T}(u_{\min}, v_{\max})\}uv
 \end{aligned} \tag{4}$$

### 3.4 경계 절점 생성

일반적으로 NURBS 곡선으로 표현된 경계곡선  $C(t)$ 는 매개변수화가 균일하지 않으므로 매개변수 값  $t$ 를 기준으로 절점들을 생성하면 절점 간격이 불균일해질 수 있다. 따라서 본 논문에서는 3차원 곡선상에서 절점들 사이의 간격을 고려하여 경계 절점들을 생성하였다.

### 3.5 경계 절점의 변환(곡면영역 → 평면영역)

곡면의 경계에 절점들이 생성되고 변환평면이 결정되면, 각 절점들을 변환평면으로 변환한다. 곡면영역  $\mathbf{S}(u, v)$ 과 변환평면영역  $\mathbf{T}(u, v)$ 이 동일한 매개변수 영역에서 정의 되었으므로, 각 경계 절점들은 매개변수 영역을 통하여 정확히 변환평면영역으로 변환될 수 있다.

우선, 곡면에 생성된 절점들을 매개 변수영역으로 변환하기 위해서 각 절점의 3차원 좌표값  $\mathbf{C}(t) = \mathbf{S}(u, v) = (X, Y, Z)$ 에 해당하는 매개변수 좌표값  $(u, v)$ 을 구한다. 본 논문에서는 Newton-Raphson 방법을 이용해 해를 구하였다. 먼저 곡면 위의 한 절점  $\mathbf{S}(u, v)$ 을 점  $(u_i, v_i)$ 를 기준으로 Taylor 급수 전개하고 1차 미분계수를 포함하는 항만 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}(u, v) &= \mathbf{S}(u_i, v_i) + \mathbf{S}_u(u_i, v_i)(u - u_i) \\
 &\quad + \mathbf{S}_v(u_i, v_i)(v - v_i)
 \end{aligned} \tag{5}$$

여기서  $\mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v$ 는 각 절점  $\mathbf{S}(u, v)$ 에서의 매개변수  $u, v$  방향 편미분값이다.

또한, 반복계산의 초기값  $(u_0, v_0)$ 은, 해당 절점을 3차원 공간의 경계곡선  $\mathbf{C}(t)$ 에서 생성할 때 사용했던 매개변수 값  $t$ 를 매개변수공간의 경계곡선  $\mathbf{B}(t) = (u, v)$ 식에 대입하여 구한다.

식 (5)을 행렬형태로 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{A} \bullet \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{S} \tag{6}$$

여기서,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u(u_i, v_i) & \mathbf{X}_v(u_i, v_i) \\ \mathbf{Y}_u(u_i, v_i) & \mathbf{Y}_v(u_i, v_i) \\ \mathbf{Z}_u(u_i, v_i) & \mathbf{Z}_v(u_i, v_i) \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u - u_i \\ v - v_i \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(u, v) - \mathbf{X}(u_i, v_i) \\ \mathbf{Y}(u, v) - \mathbf{Y}(u_i, v_i) \\ \mathbf{Z}(u, v) - \mathbf{Z}(u_i, v_i) \end{bmatrix}$$

이다.

식 (6)의 양변에  $\mathbf{A}^T$ 를 곱하여 정리하면  $\Delta \mathbf{U}$ 가 다음과 같이 얻어진다.

$$\Delta \mathbf{U} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{S} \tag{7}$$

3.6 평면에서의 요소망 생성 및 곡면으로의 변환  
평면에서 사각형 요소망을 생성하는 기법에 대해서는 많은 연구가 이루어져 왔다.[6, 8-11] 본 논문에서는 변환평면에 요소망을 생성하기 위해, 영

역 분할법 (domain decomposition)을 기초로 하고 기본 오퍼레이터들을 사용하여 해석영역 전체를 사각형 요소만으로 구성하는 사각 분할법을 사용하였다.[6] 그리고 Laplacian 기법을 이용하여 평면 영역에서 요소망을 평활화 하였다. 또한 변환평면에 생성된 요소망은 매개변수 영역을 거쳐 곡면으로 변환된다.

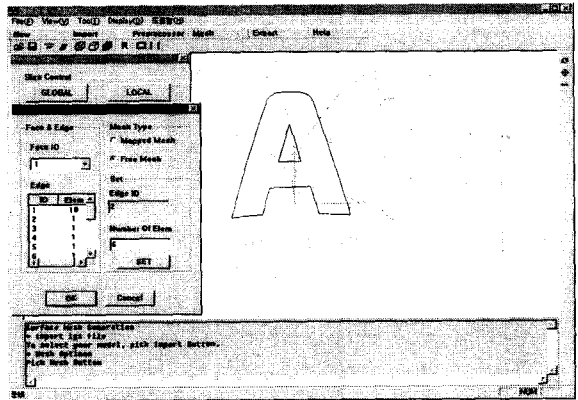
요소망을 매개변수 평면으로 변환하기 위해서는 각 절점의 좌표값  $T(u,v) = (x, y)$ 에 해당하는 매개변수 좌표값  $(u,v)$ 를 구해야 하는데, 이는 식(4)에서 각 절점의 매개변수에 대한 선형 연립방정식을 풀어서 쉽게 얻을 수 있다. 각 절점의 매개변수 좌표값  $(u,v)$ 가 구해지면, 곡면식  $S(u,v)$ 를 통해 3차원 곡면으로 변환되고, 곡면 상에서의 요소망 생성이 완료된다.

#### 4. 구현 시스템

본 연구의 결과로 곡면 요소망 생성 시스템을 개발하였다. 이 시스템은 IGES 형식의 형상정보를 입력 받아 UNV 형식의 요소망 정보를 출력하는 프로그램으로, C/C++로 구현하였으며 PC 환경에서 쉽게 사용할 수 있다.

Fig. 5는 프로그램의 실행 예이다. 이 시스템은 형상정보의 입력과 요소망 정보의 출력 등의 기능을 포함한 주메뉴, 그래픽 출력창, 진행상황 표시창, 요소망 생성에 필요한 기능을 포함하는 mesh tool, 형상의 회전·이동·크기조절·은선제거 기능 등을 포함하는 display tool 등으로 구성되어 있다.

Fig.5(a)는 전역 요소크기(global element size)를 지정하여 절점을 생성하는 방법 Fig.5(b)는 각 경계 곡선에 생성될 요소 개수와 요소크기 변화율을 지정하여 절점을 생성하는 방법을 보여주고 있다.

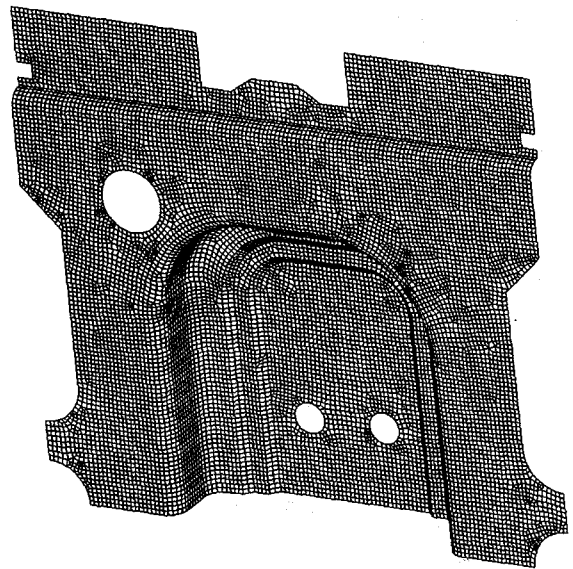


(b) Local element sizing

Fig. 5 An example of mesh generation system

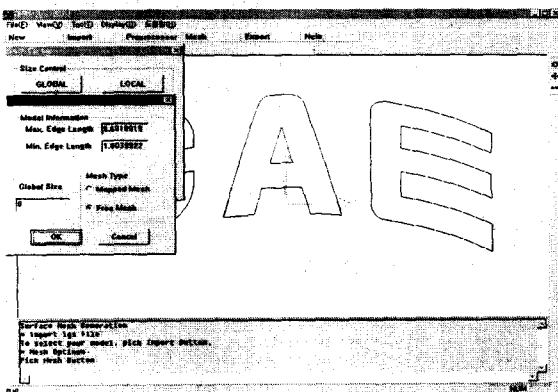
#### 5. 적용 예

본 논문에서 제시한 요소망 생성기법을 적용한 예는 다음과 같다.

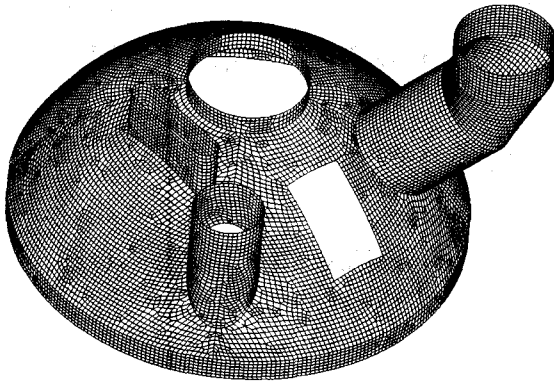


(24 trimmed NURBS Surfaces 15065 elements)

Fig. 6 A machine part model

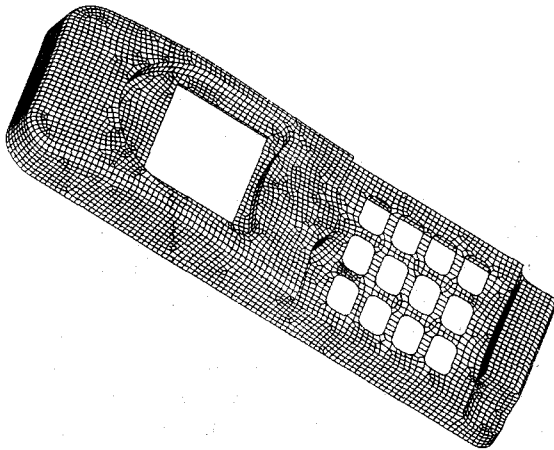


(a) Global element sizing



(31 trimmed NURBS surfaces, 17167 elements)

Fig. 7 A vessel model



(36 trimmed NURBS surfaces, 5528 elements)

Fig. 8 A phone model

## 6. 결론

본 논문에서는 CAD 시스템에서 생성한 곡면 모델에 사각형 요소망을 자동 생성하는 기법 및 프로그램을 개발하였다.

형상정보 입력의 일반성을 위해, trimmed NURBS 곡면과 표준 자료교환 형식인 IGES file 을 사용하였다. 계산의 효율을 고려하여 간접접근 방식에 기초하여 곡면상에 요소망을 생성하였다. 요소망을 곡면으로 변환할 때 발생하는 찌그러짐을 줄이고 시스템의 유연성을 높이기 위해 입력된 곡면의 형상에 따라 적절한 변환평면을 사용 하였다.

평면에서의 요소망 생성은 사각 분할법을 사용하였으며, 곡면과 평면사이의 매핑을 위해 트림곡면 경계곡선의 3 차원 좌표값으로부터 매개변수 좌표를 구하는 기법을 개발하였다. 본 연구에서는 곡면 요소망 생성 시스템을 개발하였으며, 이를 복잡한 형상의 곡면 모델들에 적용해 본 결과 형상비가 우수한 사각형 요소망이 얻어졌다.

## 참고문헌

- (1) V. B. Anand, "Computer Graphics & Geometric Modeling for Engineers", John Wiley & Sons, Inc., 1993
- (2) K. Reed, D. Harrod and W. Conry, "The Initial Graphics Exchange Specification (IGES) Version 5.3", NIST Report, USA, 1996.
- (3) S.W. Chae and J.H. Jeong, "Unstructured Surface Meshing Using Operators", Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable, pp.281-291, 1997.
- (4) 김형일, 채수원, "트림곡면상에서 사각형 요소망의 자동생성", 한국 CAD/CAM 학회 논문집, 제 4 권, 제 2 호, pp.153-161, 1999.6.
- (5) M.C Lee and M.S Joun, "General Approach to Automatic Generation of Quadrilaterals on Three Dimensional Surfaces", Comm. Num. Meth. Eng., Vol.14, No.7, pp.609-620, 1998.
- (6) 채수원, 신보성, 민중기, "사각형 유한요소망의 자동생성", 대한기계학회 논문집, 제 17 권, 제 12 호, pp.2995-3006, 1993.
- (7) L. Piegl, W. Tiller, "The NURBS Book", Springer, Germany, 1995.
- (8) M. A. Yerry and M. S. Shepard, "A Modified Quadtree Approach to Finite Element Mesh Generation", IEEE Comp. Graphics, Applic Vol. 3, pp.39-46, 1983.
- (9) P.L. George, "Automatic Mesh Generation - Application to Finite Element Method", John Wiley & Sons, 1991.
- (10) T.D. Blacker and M.B. Stephenson, "Paving: New Approach to Automated Quadrilateral Mesh Generation", Int. J. Num. Eng., Vol. 32, pp.1441-1483, 1991.
- (11) David R. White, "Redesign of the Paving Algorithm: Robustness Enhancements through Element by Element Meshing", Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable, pp.323-335, 1997.