

# 유연도행렬 및 질량관성행렬의 축약을 이용한 결합체결 구조부의 등가 계수행렬 요소 모델링

최영휴\* · 신중호\* · 정원지\* · 박종권\*\* · 조재혁\*\*\*

## Equivalent Coefficient Element Modelling for a Jointed Structure Using the Reduction of Flexibility and Mass Matrices

Y. H. Choi, J. H. Shin, W. J. Chung, J. K. Park and J. H. Cho

**Key Words:** Flexibility Matrix(유연도행렬), Mass Matrix(질량행렬), Reduction(축약), Jointed Structure(결합체결구조), Equivalent Element(등가요소), Finite Element(유한요소)

### Abstract

This paper presents the construction of consistent coefficient matrix elements for jointed structures using the reduction of flexibility and mass matrices. The reduced flexibility coefficient matrix has little structural complexity than Guyan's stiffness matrix reduction since the only element of the original matrix, corresponding to the selected nodal degrees of freedom, contributes. The proposed method was applied to building equivalent coefficient matrices for a clamp jointed structure in finite element modal analysis of a cantilevered beam. The theoretical analysis results were compared with those experimental modal analysis. Comparison of both shows good agreement each other.

### 1. 서 론

최근에 여러 가지 형태의 체결부 구조물에 대한 유한요소 모델링이나 등가 강성 및 등가 감쇠 모델링 방법에 관한 연구가 이루어지고 있다.[1-6] Yoshimura[1,2]는 볼트 체결부와 슬라이드 웨이(slide ways) 체결부를 등가 스프링과 감쇠기 요소로 모델링하고, 체결부를 갖는 외팔보의 정현파 가진시험을 통하여 체결부의 등가 모델링 파라미터(parameter)값을 산정하였다. Inamura[3], Wang[4] 등은 볼트로 체결된 두 개의 보 구조물에서 실험적인 방법으로 모달 파라미터(modal parameters)를 추출한 다음 그 것을 이용하여 전체 구조계의 강성행렬과 감쇠행렬을 산정하고 볼트 체결부 요소의 강성과 감쇠를 구하였다. Patel[5]은 보와 평판이 볼트로 체결된 결

합부에서 볼트를 2개의 등가 인장보(tension bar)와 1개의 전단보(shear bar)로 모델링하여 유한요소 해석을 수행하고 실험을 통하여 모델링 파라미터를 보정하였다. 국내에서는 이재운 등[6]이 유한요소법과 유연도 영향계수법을 이용하여 체결부의 등가 강성행렬을 구하였다.

본 연구에서는 기존의 Guyan[7]의 강성행렬 정축약 방법[7]이나, 강성행렬과 유연도계수행렬의 역행렬 관계를 이용한 정축약 방법[6]을 사용하지 않고, 유연도 계수행렬을 직접 축약하는 방법과 이에 대응되는 자유도 변환행렬과 계의 에너지 보존법칙을 이용하여 질량행렬을 축약하는 방법을 제시한다. 이 계수행렬 축약 방법을 두 개의 보가 클램프로 체결된 외팔보 구조계의 체결부의 등가 계수행렬요소 모델링에 적용한다. 제시된 방법의 유용성 검증을 위하여 체결부를 포함한 전체 외팔보의 유한요소 모드해석과 실험모드해석을 수행하고 그 결과를 비교한다.

\* 창원대학교 기계설계공학과  
\*\* 한국기계연구원 공작기계연구그룹  
\*\*\* (주)미래산업 연구소

## 2. 계수행렬 축약이론

### 2.1 유연도계수행렬의 축약

일반적으로  $n$ 개의 자유도를 갖는 구조물의 정역학 방정식을 강성도 계수행렬을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad (2.1)$$

여기서,  $\{F\}$ 는 하중벡터,  $\{U\}$ 는 변위벡터,  $[K]$ 는  $(n \times n)$ 의 강성행렬이다.

식(2.1)에서 구조의 절점변위 자유도를 축약시킬 때, 선택될 자유도와 버릴 자유도로 구분하여 표시하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} F_s \\ F_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sd} \\ K_{ds} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_s \\ U_d \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

위 식에서 하첨자  $s$ 는 선택된 자유도,  $d$ 는 축약시켜서 없애버릴 자유도를 표시한다.

위 식(2.2)을 유연도계수행렬을 이용하여 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} U_s \\ U_d \end{Bmatrix} = [A]\{F\} = \begin{bmatrix} A_{ss} & A_{sd} \\ A_{ds} & A_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_s \\ F_d \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

여기서,  $[A] = [K]^{-1}$ 인 유연도계수행렬이다.

위 식(2.3)에서  $F_d = 0$ 이면 자유도벡터의 변환관계는 다음과 같이 된다.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_s \\ U_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A_{ds} A_{ss}^{-1} \end{bmatrix} \{U_s\} = [T_f]\{U_s\} \quad (2.4)$$

그러므로 식(2.4)의 변환관계로부터 식(2.3)은 다음과 같이 축약된 자유도의 관계식으로 변환될 수 있다.

$$\begin{aligned} [T_f]\{U_s\} &= \begin{bmatrix} I \\ A_{ds} A_{ss}^{-1} \end{bmatrix} \{U_s\} \\ &= \begin{bmatrix} A_{ss} \\ A_{ds} \end{bmatrix} \{F_s\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

위 식의 양변을 비교하면 결국 다음의 축약된 방정식이 성립된다.

$$\{U_s\} = [A_{ss}]\{F_s\} \quad (2.6)$$

그러나 축약된 계가 원래 구조계와 등가이기 위해서

는 원래 계와 축약된 등가계의 변형에너지가 같아야 된다. 즉, 식(2.3)의 원래의 계와 식(2.6)의 축약된 계의 변형에너지  $\{V\}$ 는 다음 관계를 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} \{V\} &= \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} \\ &= \frac{1}{2} \{U_s\}^T [T_f]^T [K] [T_f] \{U_s\} \\ &= \frac{1}{2} \{U_s\}^T [K_{ss} + K_{ds} A_{ds}^{-1} \\ &\quad + (K_{sd} + K_{ds} A_{ds}^{-1}) (A_{ds} A_{ss}^{-1})] \{U_s\} \\ &= \frac{1}{2} \{U_s\}^T [K_{ss} - K_{ds} K_{dd}^{-1} K_{ds}] \{U_s\} \\ &= \frac{1}{2} \{U_s\}^T [K_{eq}] \{U_s\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

위 식(2.4)의 축약된 강성행렬이 원래 구조물의 강성행렬과 등가이기 위해서는 원래 계와 축약된 등가계의 변형에너지가 같아야 된다. 즉, 두 계의 변형에너지  $\{V\}$ 는 다음 관계를 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} \{V\} &= \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} \\ &= \frac{1}{2} \{U\}^T [A]^{-1} \{U\} \\ &= \frac{1}{2} \{U_s\}^T [T_f]^T [A]^{-1} [T_f] \{U_s\} \\ &= \frac{1}{2} \{U_s\}^T [A_{ss}]^{-1} \{U_s\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

그러나 일반적인 분할요소 행렬(Partitioned matrix)의 역행렬(Inverse matrix) 관계식을 이용하면 위 식(2.7)이 성립됨을 증명할 수 있다.

그러므로 식(2.3)의 전체계의 방정식의 유연도계수행렬은 다음과 같이 축약된 유연도계수행렬로 등가화시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} [A_{eq}] &= [T_f]^T [A]^{-1} [T_f] \\ &= [A_{ss}] \end{aligned} \quad (2.8)$$

일반적으로 선형 구조계에서 강성행렬  $[K]$ 와 유연도행렬  $[A]$ 는 역행렬 관계이므로 축약된 계의 등가강성행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[K_{eq}] = [A_{ss}]^{-1} \quad (2.9)$$

### 2.2 질량행렬의 축약

전체 계의 운동에너지와 축약된 계의 운동에너지가 같다는 조건으로부터 축약된 계의 등가 질량행렬을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \{ \dot{U} \}^T [M] \{ \dot{U} \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \dot{U} \}^T \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sd} \\ M_{ds} & M_{dd} \end{bmatrix} \{ \dot{U} \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \dot{U}_s \}^T [T_f]^T \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sd} \\ M_{ds} & M_{dd} \end{bmatrix} [T_f] \{ \dot{U}_s \} \quad (2.10) \\
&= \frac{1}{2} \{ \dot{U}_s \}^T [M_{ss} + A_{ds} A_{ss}^{-1} M_{dd} A_{ds} A_{ss}^{-1}] \{ \dot{U}_s \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \dot{U}_s \}^T [M_{eq}] \{ \dot{U}_s \}
\end{aligned}$$

여기서, 등가 질량행렬  $[M_{eq}]$ 은 다음과 같다.

$$[M_{eq}] = [M_{ss} + A_{ds} A_{ss}^{-1} M_{dd} A_{ds} A_{ss}^{-1}] \quad (2.11)$$

### 3. 적용

Fig. 3.1은 두 개의 보의 끝단을 20mm만큼 겹치게 하여 클램프로 체결시킨 외팔보 구조물이다. 이 외팔보의 결합부를 앞서 제시한 유연도행렬 및 질량행렬 축약이론을 적용하여 등가 계수행렬요소로 모델링한 다음 전체 외팔보의 유한요소 모드해석을 수행하고자 한다.

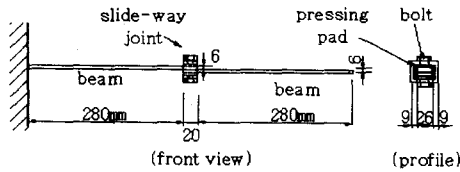


Fig. 3.1 Clamp jointed cantilever beam

#### 3.1 결합부의 등가 강성행렬요소 모델링

먼저 Fig. 3.1의 외팔보 체결 결합부에 대한 등가강성행렬을 구하기로 한다. Fig. 3.2는 결합부만을 수학적으로 모델링한 것이다. 접촉면은 건마찰 접촉 상태이며, 체결부 상·하 단면에 끼워진 프레스 패드(pressing pad)를 볼트(M10×1.25)로 압착시켜 체결력이 접촉면에 균일하게 전달되도록 하였다. 그림에서 절점 I, J는 체결부의 강성을 이 두 절점간의 등가 강성행렬요소로 등가화시키고자 선택된 두 절점이다. 체결부를 유한요소 모델링할 때 상단보의 좌측 단면은 대칭성을 유지하도록 경계조건을 설정하고 나머지 단면은 모두 자유단으로 한다. 하단보의 우측단면의 절점 J에 단위 하중벡터를 작용시킨다. 체결력, P는 균일 분포 하중인 면하중(face load)으로 작용된다.

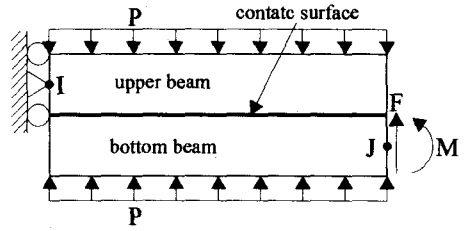


Fig. 3.2 Mathematical modelling of the clamp joint part(front view)

Fig. 3.3은 수학적 모델에 대한 상세한 유한요소 모델이다. 상용 유한요소법 코드를 이용하여 Fig. 3.3의 체결부 상세 유한요소 모델에서 선택된 절점 I, J에 단위 힘을 작용시켜 변위를 해석한 결과로부터 선택될 자유도에 대한 유연도 계수행렬의 요소값을 계산한 다음 앞서 설명한 축약 이론에 따라 등가의 강성행렬을 구하고자 한다. 이 과정에서

Fig. 3.3의 상세 결합부 요소에 대한 등가 요소는 Fig. 3.4와 같이 선택된 절점 자유도를 갖는 선형 보요소라고 가정한다.

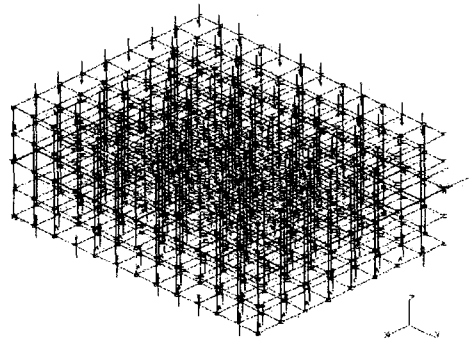


Fig. 3.3 Detailed finite element model of the clamp joint part

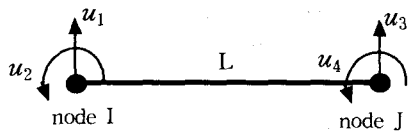


Fig. 3.4 Equivalent beam element modelling to the detailed F.E. model

먼저 Fig. 3.3의 상세 모델에서 절점 I가 포함된 상단보의 좌측단면을 고정시키고 절점 J에 단위 힘  $F=1$ 을

가하여 변위해석을 수행한 결과를 식(2.3)에 대입하면 다음의 식 (3.1)과 같이 된다.

$$\{U_s\} = \begin{Bmatrix} u_1=0 \\ u_2=0 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = [A_{ss}]\{F_s\} \quad (3.1)$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

위 식을 풀면  $A_{33}$ 과  $A_{43}$ 를 구할 수 있다. 마찬가지로 방법으로 절점 J에 단위 모멘트  $M=1$ 을 가하여 변위 해석을 수행한 결과로부터  $A_{43}$ 과  $A_{44}$ 를 구할 수 있다. 또한 절점 J가 포함된 상단 보의 우측 단면을 고정하고 절점 I에 단위 힘과 단위 모멘트를 각각 작용시켜 변위 해석한 결과로부터 마찬가지로 방법으로  $A_{11}$ ,  $A_{21}$ 와  $A_{12}$ ,  $A_{22}$ 를 구할 수 있다.

절점 I에 단위 횡변위만 가했을 경우와 단위 각변위만을 가했을 경우에 대한 각각의 하중 벡터를 구한 다음 전체 강성행렬의  $K_{11}$ 과  $K_{22}$ 을 구한다.

동일한 방법으로 절점 I을 고정시키고 절점 J에 각각 단위 하중  $F_3$ 와 단위모멘트  $F_4$ 를 가하여 전체 강성행렬의  $K_{33}$ 과  $K_{44}$ 를 구한다.

Fig. 3.5는 고정되지 않은 끝단의 한 절점 J에 단위 하중을 작용시켰을 때의 변위 해석 결과 출력의 한 예이다. 유한요소 해석에 사용된 프로그램은 MARC(Rev. 6.2)이다.

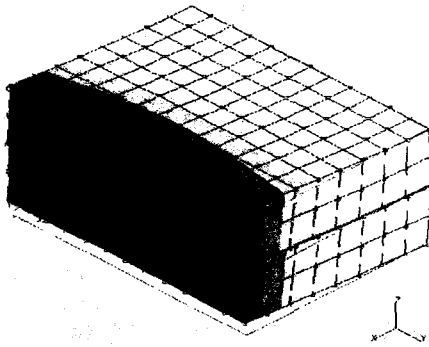


Fig. 3.5 Deformation due to unit load on a node at the free end

최종적으로, 식(2.9)의 관계로부터  $[A_{ss}]$ 의 역행렬을 구하여 Fig. 3.3의 클램프 체결부 요소에 대한 등가 보 요소의 강성행렬을 구하면 다음과 같이 계산된다.

$$[K_{eq}] = 10^6 \times \begin{bmatrix} 93.015 & 0.930 & -93.015 & 0.930 \\ 0.930 & 0.0124 & -0.930 & 0.0062 \\ -93.015 & -0.930 & 93.015 & -0.930 \\ 0.930 & 0.0062 & -0.930 & 0.0124 \end{bmatrix}$$

### 3.2 등가 질량성행렬요소 모델링

식(2.11)의 질량행렬의 축약방법을 이용하여 등가 질량행렬을 구하기 위해서는 불행하게도 전체계의 유연도행렬의 분할요소를 모두 알아야 하는 불편이 따른다. 그러므로 본 연구에서는 축약은 Cook[8] 등이 제시한 집중질량 모델링 방법에 따라 연속체 구조물의 분포질량을 선택된 자유도에 집중(lumped)시켰다. 즉, Fig. 3.6에서 길이 인 보의 분포질량을 절점 I에 총 분포질량의 1/2이 집중시키고, 나머지의 1/2을 절점 J에 집중시킨다. 그리고 회전관성 효과는 보의 질량 관성모멘트로 환산하여 집중시킨다. 축약된 등가 질량행렬은 식(2.15)과 같이 된다.

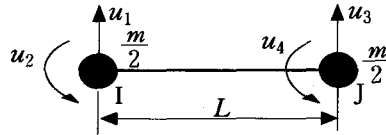


Fig. 3.6 Lumping mass on the selected nodes

$$[M_{eq}] = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^3 \frac{m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^2 \frac{m}{2} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

위 식에서 계산된 등가 질량행렬은 다음과 같다.

$$[M_{eq}] = 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 22710 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.61057 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22710 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.61057 \end{bmatrix}$$

### 3.3 외팔보의 모드해석

결합부의 등가 계수행렬요소 모델링 방법의 타당성을 검증하기 위하여 Fig.2.1에 보인 외팔보 구조물의 유한요소법 모드해석과 실험모드해석을 수행하여 두 결과를 비교하였다.

Fig. 3.1의 외팔보 구조물에 대한 유한요소 모델은 Fig. 3.7과 같다. 이 모델링에서 체결부는 제시된 방법으로 산정한 등가 강성행렬요소와 등가 관성행렬요소로 모델링 되었다.

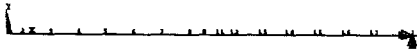


Fig. 3.7 F.E.M model of the jointed cantilever beam

보요소의 물성치는 종탄성계수  $E = 200.078\text{GPa}$ , 포아송비  $\nu = 0.295$ , 밀도  $\rho = 7.81\text{kg/m}^3$ 이다. 체결부의 상세모델 해석시 접촉체결력은 상·하관에 분포 면압 ( $615.385 \times 10^3\text{Pa}$ )으로 작용시켰다.

유한요소 모드해석결과 1차, 2차, 및 3차 고유진동형과 해당 고유진동수는 Fig. 3.8 ~ Fig. 3.10에 나타내었다. 그림에서 실선이 모드형상(mode shapes)을 나타낸다.

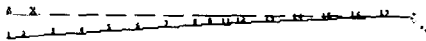


Fig. 3.8 The 1st mode(11.752Hz) by F.E.M.

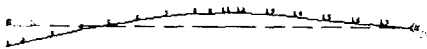


Fig. 3.9 The 2nd mode(72.830Hz) by F.E.M.

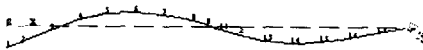
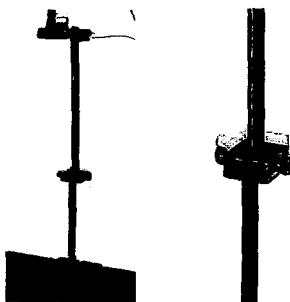


Fig. 3.10 The 3rd mode(212.85Hz) by F.E.M

실험 모드해석은 Fig. 3.11에 보는 바와 같이 체결부를 갖는 외팔보 모델을 제작한 다음 충격 가진시험법으로 고유진동수와 진동형을 구하였다. 실험모드해석 소프트웨어는 CADA-PC를 사용하였다.



(a) test setup (b) zoom of joint  
Fig. 3.11 Modal test of the jointed beam

Fig. 3.12은 외팔보의 실험모드해석을 위하여 CADA-PC에 입력된 외팔보 구조물의 형상 모델이다



Fig. 3.12 Geometry modelling of the jointed beam for experimental modal analysis

실험 모드해석결과 1차, 2차, 및 3차 고유진동형과 해당 고유진동수는 Fig. 3.13 ~ Fig. 3.15에 나타내었다. 그림에서 실선이 모드형상(mode shapes)을 나타낸다.

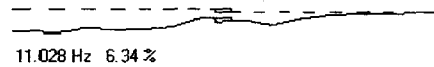


Fig. 3.13 The 1st mode(11.028Hz) by modal test

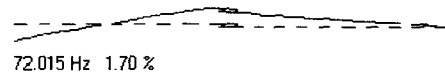


Fig. 3.14 The 2nd mode(72.015Hz) by modal test

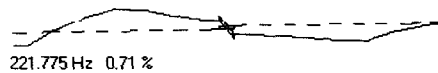


Fig.3.15 The 3rd mode(221.775Hz) by modal test

체결부를 갖는 외팔보 구조물의 유한요소 모드해석결과와 실험 모드해석 결과를 정리하여 비교하면 Table 3.1과 같다.

Table 3.1 Comparison of analysis results

Mode shape	Natural frequency(Hz)	
	F.E.M.	Experiment
1st	11.752	11.028
2nd	72.830	72.015
3rd	212.850	221.775

Table 3.1에서 보는 바와 같이 체결부를 등가 계수행렬요소로 모델링한 외팔보의 유한요소 모드해석 결과가 3차 모드까지 실험모드해석 결과와 잘 일치하고 있다. 따라서 본 연구에서 제시한 유연도행렬 축약방법을 이용한 등가 계수행렬요소 모델링 방법이 체결부의 등가 유한요소 모델에 적합한 것으로 판단된다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 유연도계수행렬의 직접 축약방법과 에너지보존 원리에 바탕하여 구조계의 축약된 등가강성행렬과 등가질량행렬을 구하는 방법을 제시하였다. 본 연구에서 제시한 방법은 기존의 Guyan의 강성계수 행렬의 축약방법에 비하여 유연도 계수행렬의 직접 축약을 이용하므로 보다 간단하게 등가강성행렬을 구할 수 있는 방법이다. 제시한 방법의 유용성을 검토하기 위하여 결합체결부를 갖는 외팔보 구조물의 등가 유한요소 모델링과 모드해석에 적용하고 그 결과를 실험 모드해석 결과와 비교하였다. 두 결과는 매우 잘 일치하였다.

#### 참고문헌

- (1) M. Yoshimura, K. Okushima, "Measurement of Dynamic Rigidity and Damping Property for Simplified Joint Models and Simulation by Computer," *Annals of the CIRP*, Vol.25 No.1, pp.193-198, 1977
- (2) M. Yosimura, "Computer Aided Design Improvement of Machine Tool Structure Incorporating Joint Dynamics Data," *Annals of the CIRP*, Vol.28/1, PP.241~246, 1979
- (3) T. Inamura, T. Sata, "Stiffness and Damping Identification of the Element of a Machine Tool Structure," *Annals of the CIRP*, Vol. 28/1, pp.235-239, 1979.
- (4) J. Wang, P. Sas, "A Method for Identifying Parameters of Mechanical Joints," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.57, pp.337-342, 1990.
- (5) K. V. Patel, and W. F. Chen, "Analysis of a Fully Bolted Joint Connection Using NONSAP," *Computers & Structure*, Vol.21, pp.505-511, 1985
- (6) 이재운, "결합부가 있는 복합구조물의 동적해석," 서울대학교, 박사학위논문, 1993
- (7) R. J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrix," *AIAA journal*, Vol.3, No.2, pp.380, 1965
- (8) R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis," John Wiley & Sons, Inc., 1989