

진동 특성을 고려한 회전 외팔보 형상의 최적화

윤영훈* · 유흥희**

Shape Optimization of a Rotating Cantilever Beam Considering Its Modal Characteristics

Young Hoon Yun and Hong Hee Yoo

Key Words: Cantilever Beam(외팔보), Rotating Angular Speed(회전 각속도), Modal Analysis(진동 해석), Natural Frequency Variation(고유진동수 변화), Shape Optimization(형상최적화)

Abstract

It is well known that natural frequencies increase when a cantilever beam rotates about the axis perpendicular to its longitudinal axis. Such phenomena that are caused by centrifugal inertia forces are often referred to as the stiffening effects. Occasionally it is necessary to control the variation of a natural frequency of a rotating beam. By changing the thickness of the rotating beam, the modal characteristics can be changed. The thickness of the rotating beam is assumed to be a cubic spline function in the present work. An optimization method is employed to find the optimal thickness shape of the rotating beam. This method can be utilized usefully for the design of rotating structures such as turbine blades and aircraft rotary wings.

1. 서 론

헬리콥터의 회전익이나 터빈의 블레이드 등과 같이 회전하는 기계 구조물은 우리 주위에서 흔히 볼 수 있다. 이와 같이 구조물이 회전할 경우의 동적 특성은 회전하지 않는 경우의 동적 특성과는 다르다. 일반적으로 구조물이 회전할 경우 회전에 의한 원심력의 영향으로 굽힘 방향 강성이 증가하게 되는데 이러한 강성의 증가는 결국 시스템의 고유진동수의 변화를 야기시킨다. 최근에 들어 구조물의 중량 감소 및 기타 경제적인 요인에 의해 여러 신소재를 사용하게 되면서 구

조물의 유연성이 증가하게 되었고, 그 결과 회전에 의한 강성변화의 영향은 현격하게 나타난다. 그런데 회전에 의한 고유진동수의 변화는 때때로 주변 구조물의 고유진동수와 일치되는 것과 같은 바람직하지 못한 현상을 발생시킬 수도 있으므로 이에 대한 정확한 예측이 필요하며 경우에 따라 이러한 변화를 설계자가 원하는 방향으로 유도할 필요가 있다.

1920년대 초 Southwell⁽¹⁾ 등에 의해 시작된 회전 구조물의 진동 특성에 대한 연구는 1950년대와 1970년대를 거치면서 많은 이론적, 수치해석적 방법들이 제시되어 왔다.⁽²⁻⁵⁾ 그러나 제시된 방법들은 비선형 운동방정식에 기초하며 유도과정이 복잡하다는 단점을 가진다. 최근 이러한 단점을 극복할 수 있는 간명한 선형 운동방정식에 기초한 모델링이 제시되었다.⁽⁶⁻⁸⁾ 본 논문은 이 최근의 연구에서 제시된 모델링을 이용하여 회전하는 외팔보의 고유진동수 변화를 원하는 방향으로 유도하기 위한 보의 최적 형상을 찾기 위한 방법을

* 비회원. 한양대학교 대학원

** 정회원. 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@email.hanyang.ac.kr

TEL : (02)2290-0446 FAX : (02)2293-5070

개발하는데 그 목적을 둔다. 연구의 편의성을 위해 보의 폭은 일정하게 두고 길이방향에 대한 보의 두께를 3차 다항식으로 가정한다. 가정한 3차 다항식의 계수 값들을 설계변수들로 하고, 고유진동수 변화를 제어할 수 있는 목적함수를 정의하여 이를 최소로 하는 계수값을 구함으로써 보의 형상을 결정한다. 회전 외팔보의 운동방정식은 Kane⁽⁹⁾의 동역학 이론을 이용하고 동시에 근사화를 위하여 가상모드법을 사용하였다. 또한 최적화를 수행하기 위해 널리 알려진 최적화 프로그램인 ADS를⁽¹⁰⁾ 사용하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어 2장에서는 3차 다항식 형태로 변화하는 두께를 갖는 회전 외팔보의 운동방정식과 이를 토대로 한 진동방정식의 유도과정을 보이고, 3장에서는 2장에서 얻어진 진동방정식을 이용하여 최적화 문제를 정식화 한 후 수치해석을 실시하였으며, 여기서 얻어진 결과를 토의하였다. 마지막장인 결론 부분에서는 논문 전체 내용을 요약하여 정리하였다.

2. 진동방정식 유도

2.1 운동방정식의 유도

이 절에서는 복합 변형변수를 이용한 선형 동적 모델링에 의한 운동방정식 유도과정을 간략히 소개하기로 한다. 이에 관한 상세한 내용은 참고문헌 (7)을 참조할 수 있다.

본 연구에서는 회전 외팔보의 단면 형상변화에 의한 진동 특성 변화에 초점을 맞추기 위해 다음의 가정을 하였다. 첫째, 외팔보의 단면은 폭은 일정하고 두께만 변화하며 그 재질은 일정하고 등방성이다. 둘째, 전단 효과와 회전 관성 효과(rotary inertia effect)는 고려하지 않았다. 이 효과들을 포함하는 것은 식을 복잡하게는 하나 아무런 문제도 없다. 셋째, 해석은 회전 평면내의 굽힘 방향으로만 실시하였다.

Fig. 1은 해석 대상이 되는 회전 외팔보의 2차원 평면상의 모습을 나타내고 있다. \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 는 기준계에 부착된 단위 벡터들이며 \vec{u} 는 외팔보의 임의의 점 P_0 의 탄성변위벡터를, u_1 과 u_2 는 그 성분을, 그리고 s 는 인장변위를 각각

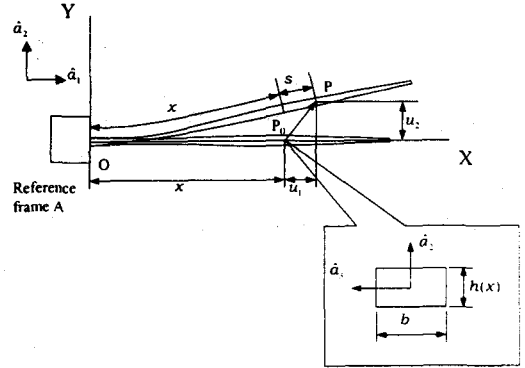


Fig. 1 Configuration of a cantilever beam

나타낸다. 기준틀 A의 각속도와 O점의 속도를 각각 $\vec{\omega}^A$ 와 \vec{v}^O 로 표시하고 이들을 기준틀 A의 단위벡터를 이용하여 표시하면 다음과 같다.

$$\vec{\omega}^A = \Omega \hat{a}_3 \quad \vec{v}^O = v_1 \hat{a}_1 + v_2 \hat{a}_2 \quad (1)$$

또한 이를 이용하여 P점의 속도를 구하면

$$\vec{v}^P = [v_1 + \dot{u}_1 - \Omega u_2] \hat{a}_1 + [v_2 + \dot{u}_2 + \Omega(x + u_1)] \hat{a}_2 \quad (2)$$

여기서 인장변수 s 를 u_2 와 함께 다음과 같이 근사화 한다.

$$s(x, t) = \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \quad (3)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j}(x) q_{2j}(t)$$

여기서 ϕ_{1j} , ϕ_{2j} 및 q_{1j} , q_{2j} 는 각각 s 와 u_2 를 근사화하기 위한 가상모드와 일반좌표들이며 μ_1 및 μ_2 는 모드함수의 개수이다. u_1 대신 s 를 근사화하므로 식 (2)에 나타난 u_1 및 \dot{u}_1 은 모두 s 와 u_2 로 표시되어야 하므로 다음의 기하학적 관계식을 사용한다.

$$x + s = \int_0^x \left[\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right)^2 \right]^{1/2} d\sigma \quad (4)$$

Kane의 방법에 따른 운동방정식의 형태는

$$\int_0^L \rho b h \left(\frac{\partial \dot{v}^P}{\partial q_i} \right) \cdot \frac{d\dot{v}^P}{dt} dx + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (5)$$

($i = 1, 2, \dots, \mu$)

여기서 ρ , b , L 은 각각 보의 밀도, 폭, 그리고 길이를 나타내는 상수값이다. h 는 보의 두께로 길이방향에 대한 3차의 다항식 형태로 다음과 같이 변화할 수 있다고 가정한다.

$$h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (6)$$

q_i 는 q_{1i} 와 q_{2i} 로 이루어지며 μ 는 일반좌표의 총 개수로 μ_1 과 μ_2 의 합이다. 또한 U 는 보의 탄성에너지로 다음과 같이 표시된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E b h \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E \frac{b h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (7)$$

여기서 E 는 영의 계수이다.

이상의 과정을 종합하여 회전 외팔보의 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} \left[\left(\int_0^L \rho b h \phi_{1i} \phi_{1j} dx \right) \ddot{q}_{1j} \right. \\ & - \Omega^2 \left(\int_0^L \rho b h \phi_{1i} \phi_{1j} dx \right) q_{1j} \\ & + \left(\int_0^L E b h \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \right) q_{1j} \left. \right] \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[2\Omega \left(\int_0^L \rho b h \phi_{1i} \phi_{2j} dx \right) \dot{q}_{2j} \right. \\ & + \dot{\Omega} \left(\int_0^L \rho b h \phi_{1i} \phi_{2j} dx \right) q_{2j} \left. \right] \\ & = \Omega^2 \int_0^L \rho b h x \phi_{1i} dx \\ & - (\dot{v}_1 - \Omega v_2) \int_0^L \rho b h \phi_{1i} dx \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, \mu_1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left(\int_0^L \rho b h \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) \ddot{q}_{2j} \right. \\ & - \Omega^2 \left(\int_0^L \rho b h \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) q_{2j} \\ & + \left(\int_0^L E \frac{b h^3}{12} \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \right) q_{2j} \left. \right] \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_1} \left[\left((\dot{v}_1 - \Omega v_2) \int_0^L \rho b (a_0(L-x) \right. \right. \\ & + \frac{a_1}{2}(L^2 - x^2) + \frac{a_2}{3}(L^3 - x^3) \\ & + \frac{a_3}{4}(L^4 - x^4) \left. \left. \right) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \right. \\ & - \Omega^2 \int_0^L \rho b \left\{ \frac{a_0}{2}(L^2 - x^2) \right. \\ & + \frac{a_1}{3}(L^3 - x^3) + \frac{a_2}{4}(L^4 - x^4) \\ & + \left. \left. \frac{a_3}{5}(L^5 - x^5) \right\} \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \right. \left. \right] q_{2j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_1} \left[2\dot{\Omega} \left(\int_0^L \rho b h \phi_{2i} \phi_{1j} dx \right) \dot{q}_{1j} \right. \\ & + \dot{\Omega} \left(\int_0^L \rho b h \phi_{2i} \phi_{1j} dx \right) q_{1j} \left. \right] \\ & = -\dot{\Omega} \int_0^L \rho b h x \phi_{2i} dx \\ & - (\dot{v}_2 + \Omega v_1) \int_0^L \rho b h \phi_{2i} dx \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, \mu_2) \end{aligned} \quad (9)$$

2.2 진동방정식

인장 방향 운동에 의한 간섭효과를 무시한다고 가정하고 O 점이 회전중심이라 가정하면 회전 각속도가 일정한 정상상태에 관해 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} & [M^{22}] \{ \ddot{q}_2 \} + [K^B] \\ & - \Omega^2 [M^{22}] + \Omega^2 [K^{GB}] \{ q_2 \} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $[M^{22}]$, $[K^B]$ 그리고 $[K^{GB}]$ 의 요소들은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} M_{ij}^{22} & \equiv \rho b \int_0^L h \phi_{2i} \phi_{2j} dx \\ K_{ij}^B & \equiv \frac{E b}{12} \int_0^L h^3 \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \\ K_{ij}^{GB} & \equiv \rho b \int_0^L \left\{ \frac{a_0}{2}(L^2 - x^2) + \frac{a_1}{3}(L^3 - x^3) \right. \\ & \quad \left. + \frac{a_2}{4}(L^4 - x^4) + \frac{a_3}{5}(L^5 - x^5) \right\} \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \end{aligned} \quad (11)$$

Table 1 Data for numerical simulation

Young's modulus(E)	69.0×10^9 Pa
Density(ρ)	2.71×10^3 Kg/m ³
Thickness(b)	35.0×10^{-3} m
Length(L)	0.4 m

3. 문제 설정 및 최적화

앞에서 세운 진동방정식을 살펴보면 시스템의 고유진동수들 ω_k 는 다음과 같이 회전각속도 및 나항식의 계수들의 내재적인 함수로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega_k &= \omega_k(\Omega, a_0, a_1, a_2, a_3) \\ &= \omega_k(\Omega, \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (12)$$

(k -th natural frequency)

이로부터 우리는 4개의 계수값들을 디자인 변수 (\mathbf{X})로 하고, 회전 각속도에 의한 k 번째 고유진동수의 변화량을 제어할 수 있는 목적함수를 정의할 수 있으며, 마찬가지로 구속조건을 부여할 수 있다.

최적화에 앞서 두께 h 가 일정한 경우, 즉 계수들 중 a_0 만 값을 가지는 경우의 첫 번째 고유진동수 변화량을 살펴보도록 하자. 해석을 위해

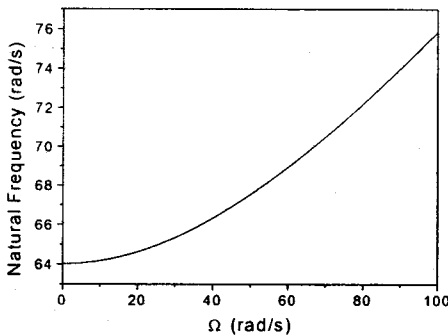


Fig. 2 Variation of the first natural frequency

사용된 모드함수의 개수는 5개이며, 재료의 물성치는 일반적인 알루미늄이 가지는 물성치로 Table 1에 나타나 있다.

Fig. 2 에서 보듯이 균일한 두께를 가지는 보의 경우 회전하지 않을 때 64.02 rad/s의 고유진동수를 가진다. 그러나 보가 회전할 경우 각속도의 증가와 함께 고유진동수가 증가하다가 회전 각속도가 $\Omega = 100$ rad/s에 도달했을 때는 75.86 rad/s까지 보의 고유진동수가 증가함을 알 수 있다. 최적화 수행 시 이 결과를 기준으로 하여 최적화를 수행하도록 한다.

Fig. 3은 회전하지 않을 때 첫 번째 고유진동수가 균일한 폭을 갖는 보의 그것과 같고, 보의 전체 질량은 변하지 않는다는 2개의 등가 구속조

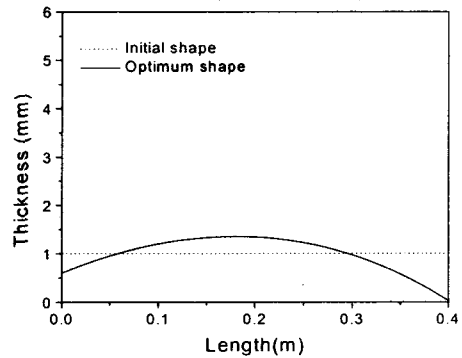


Fig. 3 Beam shape which minimizes natural frequency variation

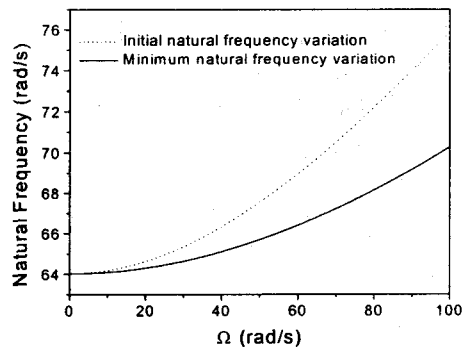


Fig. 4 Initial and minimum natural frequency variations

건을 부여한 후, 회전 시 첫 번째 고유진동수의 변화량을 최소로 하는 보의 형상을 찾기 위한 문제를 수행한 결과 얻어진 보의 형상이다. 이 문제를 위한 목적함수와 구속조건은 다음과 같다.

$$F(\mathbf{X}) = [\omega_1(100, \mathbf{X}) - \omega_1(0, \mathbf{X}_0)]^2 \quad (13)$$

$$\omega_1(0, \mathbf{X}) - \omega_1(0, \mathbf{X}_0) = 0 \quad (14)$$

$$\int_0^L h(\mathbf{X}, x) dx - Lh_0 = 0$$

여기서,

$$h(\mathbf{X}, x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

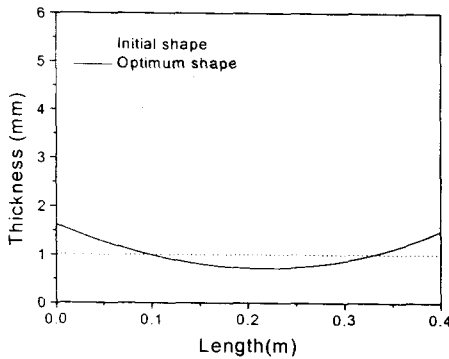


Fig. 5 Beam shape which maximizes natural frequency variation

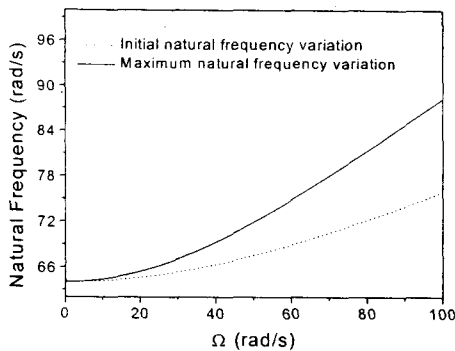


Fig. 6 Initial and maximum natural frequency variations

Fig. 4는 이러한 형태의 보일 경우 고유진동수의 변화량을 회전 각속도에 따라 얻은 결과이다. Fig. 4에서 보듯이 고유진동수의 변화 자체를 막는다는 것은 불가능 하지만 그 변화량을 최소로 하는 형상을 찾을 수 있다는 사실을 보여준다. Fig. 3에서 보는 바와 같이 최적화 루틴에서 회전에 의한 강성의 증가를 막아서 고유진동수 변화량을 줄이기 위해 질량을 회전 중심 쪽으로 분포시키려는 시도가 이루어 졌음을 알 수 있다. 하지만 모든 질량을 회전 중심으로 분포시키지 않은 이유는 어느 특정시점에서 부터는 강성감소량 보다는 질량의 감소정도가 더 지배적이라는 사실을 역으로 유추할 수 있겠다.

Fig. 5 와 Fig. 6은 앞서와 같은 구속조건을 가지고 이번에는 반대로 첫 번째 고유진동수의 변화량을 최대도 하는 문제에 대한 결과이다. 이 결과는 최적화된 보의 형상이 앞서의 문제와는 반대되는 형태를 나타낸다는 사실을 확인할 수 있다.

이상의 결과로부터 우리는 우리가 원하는 목적함수의 변화량이 Fig. 4와 Fig. 6에의 나타난 경계 내부에 존재할 경우 충분히 그러한 진동 특성을 갖는 보의 형상을 구할 수 있다는 결론에 도달할 수 있다. 그러나 고유진동수의 변화 형태는 항상 단순 증가함수의 형태가 되는 것을 이상의 결과들로부터 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 회전운동을 하는 외팔보의 두께 h 를 3차의 다항식 형태로 가정한 후 운동방정식 및 진동방정식을 유도하였다. 그리고 이를 이용하여 최적화 문제를 정식화 하였으며 그 적용 예로 회전 속도에 의한 첫 번째 고유진동수 변화량이 식 (14)의 구속조건을 만족하면서 최소 혹은 최대가 될 때, 즉 고유진동수 변화량의 경계선을 찾아보았다. 그리고 이때의 보의 형상이 어떠한지 살펴보았으며 이러한 결과의 물리적 의미에 대해 고찰하였다.

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적 설계신기술연구센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C. Reports and Memoranda No.766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, Vol 25, pp. 28~30.
- (3) Carnegie, W., 1959, "Vibrations of Rotating Cantilever Blading : Theoretical Approaches to the Frequency Problem Based on Energy Methods," *J. Mechanical Engineering Sci.*, Vol 1, pp.235~240.
- (4) Yntema, R., 1955, "Simplified Procedures and Charts for the Rapid Estimation of Bending Frequencies of Rotating Beams," NACA 3459.
- (5) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *J. Sound and Vibration*, Vol 56, pp. 175~185.
- (6) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *J. Guidance, Control, and Dynamics*, Vol 10, pp.139~151.
- (7) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995 "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 181, No.2, pp.261~278.
- (8) Yoo, H. and Shin, S., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *J. of Sound and Vibration*. Vol.212, No.5, pp.807~828.
- (9) Kane, T. and Levinson, D., 1985, Dynamics : Theory and Applications, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y.
- (10) Vanderplaats G. N., 1985, ADS Manual, Engineering Design Optimization Inc., Santa