

3차원 구조물의 동적응답 해석알고리즘에 관한 연구

문덕홍* · °강현석** · 최명수***

A Study on Dynamic Response Analysis Algorithm for Three Dimensional Structure

D. H. Moon, H. S. Kang and M. S. Choi

Key Words : Dynamic response analysis, Transfer stiffness coefficient method, Transfer matrix method, Time integration method, Lumped mass system, Newmrk method

Abstract

This paper suggests new analysis algorithm for the dynamic response of three dimensional structure which is frequently found in pipe line system of plant by the combination of the transfer stiffness coefficient method(TSCM) and Newmark method.

Presented analysis algorithm for dynamic response can improve the computational accuracy remarkably owing to advantages of the TSCM in comparison of transfer matrix method(TMM). Analysis system was modeled as a lumped mass system in this method. The analysis algorithm for dynamic response was formulated for the three dimensional structure. The validity of the this method is demonstrated through the results of numerical experiment for simple computational model by the TSCM and TMM.

1. 서 론

원자력발전소 및 화학플랜트등의 기기·배관계의 지진시의 응답해석⁽¹⁾등 외부로부터 가진을 받는 기계구조물의 동적응답 해석은 설계의 안정성 확보와 대형사고를 사전에 미리 방지한다는 측면에서 매우 중요시 되고 있다. 최근, 퍼스널 컴퓨터(PC ; Personal Computer)의 발달에 따라 과거 대형컴퓨터에 의존했던 3차원 구조물의 동적응답 해석을 PC에 적용하고 있는 실정이다.

그러나 해석대상 구조물이 대규모인 경우에 계산에 요구되는 전체자유도가 확대되어 PC를 사용함에 있어 문제점이 되는 것이 계산시간 및 기억용량이다.

한편, 이러한 문제점의 일부를 해결하기 위한 수단으로 전달매트릭스법(TMM ; Transfer Matrix Method)을 이용한 기법이 보고되어 있다^{(2), (3)}.

본 연구는 강성계수의 축차전달에 기본개념을 두고 있는 전달강성계수법^{(4),(5)}에 시간적분법인 Newmark 법을 적용하여, 배관계등에서 많이 보여지는 3차원 구조물을 해석대상으로 하여 중·급힘·비틀림 연성 강제진동에 대한 동적응답 해석알고리즘을 정식화하고, 간단한 3차원 계산모델에 대한 수치실험을 통해 본 해석기법의 유용성을 입증하고자 한다.

* 부경대학교 제어기제공학과

** 부경대학교 대학원

*** 부경대학교 산학연협동연구센터

2. 동적응답 해석알고리즘

해석대상계는 이산화하여 질량과 회전관성 및 보요소가 직렬결합되어 있는 집중질량계로 모델링한다. 계의 양단과 기초지지(BSE : base support element)가 존재하는 부분 및 강제력이 존재하는 부분등 힘벡터가 불연속으로 되는 부분은 반드시 절점으로 분할하여, 계의 좌단을 절점 0, 우단을 절점 n 이라 하고, 절점 $j-1$ 과 절점 j 사이의 보요소를 j 번째 부재라고 한다.

본 연구에서 사용하고 있는 기호의 의미는 다음과 같다.

- (1) 기호 「 \wedge 」는 기초지지 요소에 대한 물리량을 나타낸다.
- (2) 기호 「 $\bar{\cdot}$ 」는 절점 좌측의 물리량, 붙어 있지 않은 기호는 절점 우측의 물리량을 나타낸다.
- (3) 아래첨자 「 j 」는 절점 j 또는 j 번째 부재에 관한 물리량을 나타낸다.
- (4) 상첨자 「 t 」는 전치(transpose)를 의미한다.

2. 1 운동방정식

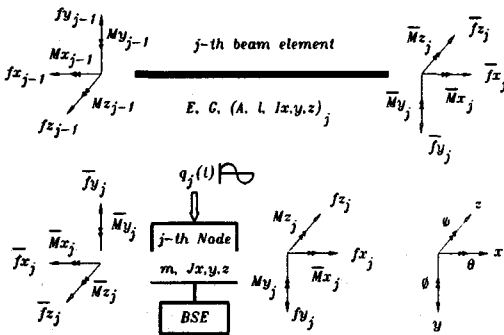


Fig. 1 Positive direction of state vector

Fig. 1은 절점 j 와 j 번째 부재에서의 변위와 힘의 정방향을 나타낸다. 해석모델의 전체계는 이런 기본요소들의 직렬결합으로 구성된다.

$$\begin{aligned} d_j(t) &= [x \ \theta \ y \ \phi \ z \ \phi]^t_j \\ \bar{f}_j(t) &= [\bar{f}_x \ \bar{M}_x \ \bar{f}_y \ \bar{M}_y \ \bar{f}_z \ \bar{M}_z]^t_j \\ f_j(t) &= [f_x \ M_x \ f_y \ M_y \ f_z \ M_z]^t_j \end{aligned} \quad (1)$$

식(1)은 시간의 함수인 변위벡터 $d_j(t)$ 및 힘 벡터 $f_j(t)$ 을 나타낸다. x, y, z 및 θ, ϕ, ψ 는 XYZ축에서의 변위 및 각변위를 나타내고, f_x, f_y, f_z 및 M_x, M_y, M_z 는 각 방향의 힘 및 모멘트를 나타낸다. Fig. 1에서 E, G, I_j, I_y, A_j 는 j 번째 부재의 종탄성계수, 횡탄성계수, 단면2차 모멘트, 길이 및 면적을 나타낸다. q_j 는 강제력벡터를 나타내며, 기초지지요소(BSE ; Base support element) 전단과 회전의 스프링 및 감쇠기로 이루어져 있다.

이상으로부터 절점 j 에서의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_j \ddot{d}_j(t_k) + C_j \dot{d}_j(t_k) + K_j d_j(t_k) \\ + \bar{f}_j(t_k) - f_j(t_k) = q_j(t_k) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서

$$\begin{aligned} K_j &= \text{diag}[k_x \ K_x \ k_y \ K_y \ k_z \ K_z]^t_j \\ C_j &= \text{diag}[c_x \ C_x \ c_y \ C_y \ c_z \ C_z]^t_j \\ M_j &= \text{diag}[m \ J_x \ m \ J_y \ m \ J_z]^t_j \\ q_j(t) &= [q_x \ Q_x \ q_y \ Q_y \ q_z \ Q_z]^t_j \end{aligned} \quad (3)$$

2. 2 시간적분법

본 연구에서 시간적분법으로는 Newmark 법을 사용하였다. 시간 t_k 에서의 가속도 벡터 $\ddot{d}_j(t_k)$ 및 속도 벡터 $\dot{d}_j(t_k)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{d}_j(t_k) &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} d_j(t_k) - \frac{1}{\beta \Delta t^2} d_j(t_{k-1}) \\ &\quad - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{d}_j(t_{k-1}) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{d}_j(t_{k-1}) \\ \dot{d}_j(t_k) &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} d_j(t_k) - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} d_j(t_{k-1}) \\ &\quad - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \dot{d}_j(t_{k-1}) - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \ddot{d}_j(t_{k-1}) \end{aligned} \quad (4)$$

식(4)에서 β, γ 는 차분상수, Δt_k 는 k 번째 시간스텝을 의미한다.

2. 3 강성계수 및 보정벡터의 전달식

시간 t_k 에서의 절점 j 에서의 변위벡터 및 힘벡터 사이의 관계는 다음식으로 정의한다.

$$\begin{aligned}\bar{f}_j(t_k) &= \bar{S}_j d_j(t_k) + \bar{e}_j(t_k) \\ f_j(t_k) &= S_j d_j(t_k) + e_j(t_k)\end{aligned}\quad (5)$$

여기서 \bar{S}_j , S_j 및 $\bar{e}_j(t_k)$, $e_j(t_k)$ 는 시간 t_k 에서의 강성계수 및 힘 보정벡터를 나타낸다. 식(2)와 식(4)로부터

$$P_j d_j(t_k) = Q_j(t_k) + f_j(t_k) - \bar{f}_j(t_k) \quad (6)$$

여기서

$$P_j = \frac{1}{\beta \Delta t^2} M_j + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \widehat{C}_j + \widehat{K}_j \quad (7)$$

$$Q_j(t_k) = a_j(t_k) - M_j H a_j(t_k) - \widehat{C}_j H v_j(t_k)$$

식(7)에서 $H a_j(t_k)$ 및 $H v_j(t_k)$ 는 시간스텝 t_{k-1} 에서의 변위, 속도, 가속도로 결정되는 벡터이고, 시간스텝 t_k 에서는 이미 알고 있는 양이 된다.

$$\begin{aligned}H a_j(t_k) &= -\frac{1}{\beta \Delta t^2} \cdot \{ d_j(t_{k-1}) \\ &\quad + \Delta t \dot{d}_j(t_{k-1}) + (\frac{1}{2} - \beta) \Delta t^2 \ddot{d}_j(t_{k-1}) \}\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}H v_j(t_k) &= \dot{d}_j(t_{k-1}) + \Delta t \cdot \{ (1 - \gamma) \ddot{d}_j(t_{k-1}) \\ &\quad + \gamma H a_j(t_k) \}\end{aligned}$$

j 번째 부재 양단에서의 힘과 변위의 관계는 다음식과 같다.

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_j(t_k) \\ f_{j-1}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} d_j(t_k) \\ d_{j-1}(t_k) \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서

$$\begin{aligned}A_j &= F_j, & B_j &= -F_j L_j^t \\ C_j &= L_j F_j, & D_j &= -L_j F_j L_j^t \\ L_j &= \text{diag}[1 \ 1 \ L' \ L']_j\end{aligned}\quad (10)$$

$$F_j = \left(\text{diag} \left[\frac{l}{EA}, \frac{l}{Glx}, F_z, F_y \right]_j \right)^{-1}$$

$$L'_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix}_j, \quad F_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{3EI} & \frac{\beta}{2EI} \\ \frac{\beta}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix}_j$$

($i=y$ or z)

식(5)와 식(9)의 관계로부터 절점 $j-1$ 의 우측에서 절점 j 의 좌측으로 강성계수 및 보정벡터를 전달하는 필드 전달식을 구한다.

$$\begin{aligned}\bar{S}_j &= A_j + B_j V_j \\ \bar{e}_j(t_k) &= -B_j G_j^{-1} e_{j-1}(t_k) \\ (j &= 1, 2, \dots, n)\end{aligned}\quad (11)$$

여기서

$$\begin{aligned}G_j &= S_{j-1} - D_j \\ V_j &= G_j^{-1} C_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)\end{aligned}\quad (12)$$

절점 j 의 좌측에서 절점 j 의 우측으로 강성계수 및 보정벡터를 전달하는 포인트 전달식을 구하기 위해 식(5)와 식(6)의 관계로부터

$$\begin{aligned}S_j &= \bar{S}_j + P_j \\ e_j(t_k) &= \bar{e}_j(t_k) - Q_j(t_k) \\ (j &= 1, 2, \dots, n)\end{aligned}\quad (13)$$

계산의 효율을 위하여 필드 전달식과 포인트 전달식을 통합한 필드·포인트 전달식은 식(11)과 식(13)의 관계에 의해

$$\begin{aligned}S_j &= A_j + B_j V_j + P_j \\ e_j(t_k) &= -B_j G_j^{-1} e_{j-1}(t_k) - Q_j(t_k) \\ (j &= 1, 2, \dots, n)\end{aligned}\quad (14)$$

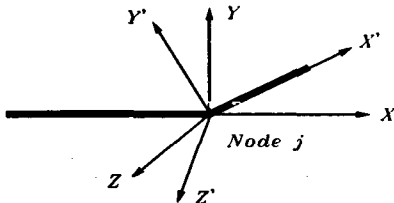
강성계수 및 보정 벡터의 식은 전달식의 형태이므로, 계산을 시작하는 절점 0에서의 강성계수 및 보정벡터 S_0 와 $e_0(t_k)$ 를 구해야 한다.

Fig. 1에서와 같이 계의 좌단의 경계조건 ($\bar{f}_0 = 0$)과 식(5)와 식(6)의 관계로부터

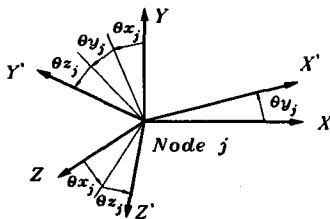
$$\begin{aligned} S_0 &= P_0 \\ e_0(t_k) &= -Q_0(t_k) \end{aligned} \quad (15)$$

2. 4 좌표변환

식(15)를 시작으로 식(14)를 이용하여 연속적으로 S_j 와 $e_j(t_k)$ 를 전달계산하면서 Fig. 2(a)와 같이 굴곡부등이 존재하는 경우, 요소들 사이의 좌표계가 다르게 된다.



(a) Crooked point



(b) Euler angle

Fig. 2 Coordinate transformation at node j

Fig. 2(b)와 같이 요소들이 오일러 각 ($\theta_a, \theta_b, \theta_c$)만큼 회전되어 있다면, 좌표변환 매트릭스 R_j 를 사용하여 XYZ 좌표계에서 $X'Y'Z'$ 좌표계로 변환해야 된다.

$$\begin{aligned} d_j'(t_k) &= R_j d_j(t_k) \\ f_j'(t_k) &= R_j f_j(t_k) \end{aligned}$$

$$R_j = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} & 0 & r_{15} & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 & r_{24} & 0 & r_{26} \\ r_{31} & 0 & r_{33} & 0 & r_{35} & 0 \\ 0 & r_{42} & 0 & r_{44} & 0 & r_{46} \\ r_{51} & 0 & r_{53} & 0 & r_{55} & 0 \\ 0 & r_{62} & 0 & r_{64} & 0 & r_{66} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

식(16)에서

$$\begin{aligned} r_{11} &= r_{22} = \cos(\theta_b), & r_{13} &= -r_{26} = \cos(\theta_a)\sin(\theta_b) \\ r_{15} &= r_{24} = \sin(\theta_a)\sin(\theta_b) \\ r_{31} &= -r_{62} = -\sin(\theta_b)\cos(\theta_c) \\ r_{33} &= r_{66} = \cos(\theta_a)\cos(\theta_b)\cos(\theta_c) - \sin(\theta_a)\sin(\theta_c) \\ r_{35} &= -r_{64} = \sin(\theta_a)\cos(\theta_b)\cos(\theta_c) + \cos(\theta_a)\sin(\theta_c) \\ r_{42} &= r_{51} = \sin(\theta_b)\sin(\theta_c) \\ r_{44} &= r_{55} = -\sin(\theta_a)\cos(\theta_b)\sin(\theta_c) + \cos(\theta_a)\cos(\theta_c) \\ r_{46} &= -r_{53} = \cos(\theta_a)\cos(\theta_b)\sin(\theta_c) + \sin(\theta_a)\cos(\theta_c) \\ r_{62} &= \sin(\theta_b)\cos(\theta_c) \end{aligned} \quad (17)$$

식(16)과 식(5)의 관계로부터 다음식을 구한다.

$$\begin{aligned} S_j' &= R_j S_j R_j^t \\ e_j'(t_k) &= R_j e_j(t_k) \end{aligned} \quad (18)$$

식(15)를 계산의 시작으로 식(14)와 식(18)을 이용하여 계의 좌단에서 우단으로 강성계수와 보정 벡터를 연속적으로 전달 계산할 수 있다.

2. 5 응답계산

강성계수 및 보정벡터를 좌단에서 우단으로 연속적으로 전달 계산한 후, 계의 우단의 경계조건 ($f_n(t_k) = 0$)과 식(5)로부터 우단의 변위벡터는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$d_n(t_k) = -S_n^{-1} e_n(t_k) \quad (19)$$

식(19)로부터 구한 $d_n(t_k)$ 과 식(5), 식(6), 식(9)로부터 다음식을 구한다.

$$d_{j-1}(t_k) = V_j d_j(t_k) - G_j^{-1} e_{j-1}(t_k) \quad (20)$$

$(j = 1, 2, \dots, n)$

식(19)에서 계의 우단에서의 변위벡터를 계산한 후, 식(20)을 이용하게 되면 계의 우단에서 좌단으로, 전체 절점의 변위벡터를 연속적으로 계산할 수 있다.

3. 수치실험

본 해석기법의 신뢰성 및 유효성을 알아보기 위해 Fig. 3과 같은 간단한 3차원 모델을 대상으로 수치실험을 하였다. 계산 모델은 각 부재의 길이가 1 m이고, 중실단면(외경 : 0.05 m)인 총 4개의 부재로 구성되고, 또한 각 부재는 2⁴개의 집중질량으로 등분할하여 계산하였다. 구조물의 밀도($\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$)와 종 및 횡탄성계수 ($E = 2.06 \times 10^{11} \text{ [N/m}^2\text{]}$, $G = 7.92 \times 10^{10} \text{ [N/m}^2\text{]}$)는 연강의 물성치를 사용하였다.

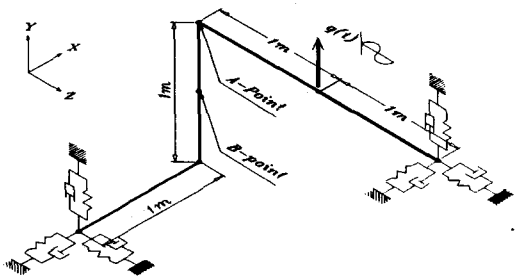
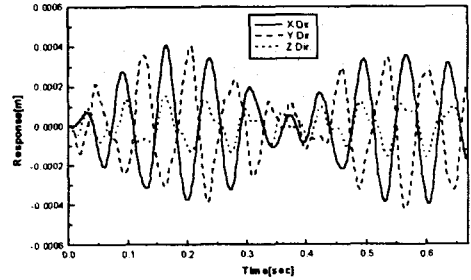


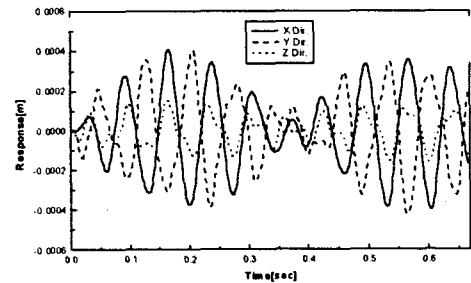
Fig. 3 Numerical model

양단은 동일한 크기의 전단 및 회전 스프링 ($k_x = k_y = k_z = 10^{12} \text{ [N/m]}$, $K_x = K_y = K_z = 10^{12} \text{ [Nm/rad]}$) 및 감쇠기 ($c_x = c_y = c_z = 1 \text{ [Ns/m]}$, $C_x = C_y = C_z = 1 \text{ [Nms/rad]}$)로 이루어진 기초 지지요소가 존재하고, 그림에서와 같이 우단으로부터 1m인 지점에 조화 강제력 $q_y(t) = q \cos \omega t$ ($q = 100 \text{ [N]}$, $\omega/2\pi = 15 \text{ [Hz]}$)가 작용하고 있는 계산모델로서, 이후의 계산은 10주기까지 하였다. 계산에 대입한 차분상수는 $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ 이고, 각 절점의 초기변위 및 초기속도는 모두 0으로 하였다. Fig. 4는 Fig. 3에 나타나 있는 두번째

부재의 중간지점인 B-Point에서의 시간응답을 외력의 1주기를 시간분할수(NDT : Number of division time)를 50등분으로 분할한 경우($\Delta t = 1.33 \times 10^{-3} \text{ [sec]}$)의 TSCM과 TMM의 응답을 나타낸 그림으로서 두 기법이 일치하는 결과를 나타내고 있다.



(a) TSCM



(b) TMM

Fig. 4 Time response(NDT : 50)

해석기법의 신뢰성을 확인하기 위하여 NDT를 증가시켰다. NDT가 300인 경우($\Delta t = 2.22 \times 10^{-4} \text{ [sec]}$)로 하여 계산한 결과, Fig. 5와 같이 TMM의 결과는 응답이 시간의 경과에 따라 발산하여 계산 불능상태가 되었다.

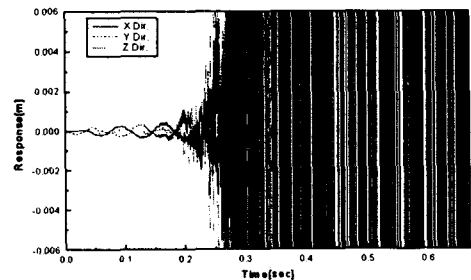


Fig. 5 Time response TMM(NDT : 300)

반면에 TSCM의 경우는 Fig. 6의 결과에서 알 수 있듯이 NDT를 400($\Delta t = 1.66 \times 10^{-4}$ [sec])으로 증가를 시켜도 Fig. 4의 결과와 동일한 경향의 응답을 구할 수 있었다.

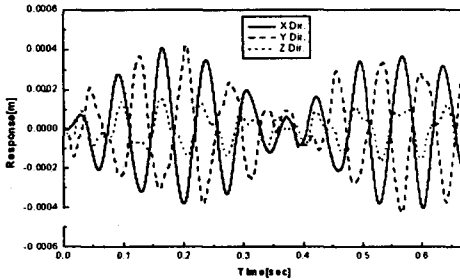


Fig. 6 Time response of TSCM(NDT : 400)

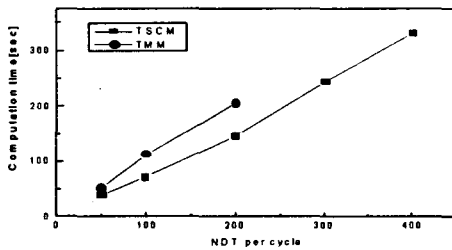


Fig. 7 Comparison of computation time

Fig. 7은 NDT 증가에 대한 두 기법의 계산시간을 비교한 그림으로서, TMM의 경우, ●표시가 없는 부분은 Fig. 5와 같이 계산이 발산한 상태를 의미한다.

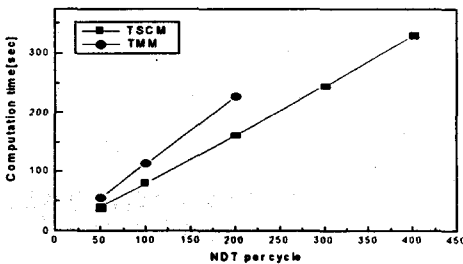


Fig. 8 Comparison of computation time

Fig. 8는 Fig. 7의 계산조건과 동일한 조건으로 하고, Fig. 3의 A-Point에 탄성지지($k_x = k_y = k_z = 10^{12}$ [N/m], $K_x = K_y = K_z = 10^{12}$ [Nm/rad]))가 존재하는 경우, NDT 증가에 따른 두 기법의 계

산시간을 비교한 결과로서, Fig. 7과 비교해 보면 TMM의 계산시간이 더 늘어난 것을 알 수 있고, ●표시가 없는 부분은 계산이 발산한 경우이다.

이상의 결과로부터 엄밀한 응답을 구하기 위해 NDT를 증가시키는 경우와 구조물에 중간에 탄성 지지 등이 있는 경우, TMM은 응답을 계산하는 과정에 오차가 발생하여 불안정한 계산결과를 나타냈지만, 본 해석기법은 안정한 계산을 수행하였다.

4. 결 론

본 연구는 3차원 구조물의 중·굽힘·비틀림 연성 강제진동에 대한 동적응답의 해석 알고리즘을 정식화하였다.

전달강성계수법에 Newmark 법을 도입하여 해석알고리즘을 정식화 한 후, 간단한 계산모델에 대한 시간스텝의 증가 및 중간지지의 변화에 따른 수치실험을 수행하여 전달매트릭스법과 비교한 결과, 본 해석기법의 수치적 안정성을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- (1) 浪田方郎, 川畑淳一, 市橋一郎, 福田俊彦, "彈塑性ダンバ支持配管系の耐震設計手法の開発", 日本機械學會論文集(C編), 61卷, 590号, pp. 3881~3888, 1995
- (2) H. Yamakawa, T. Ohinishi, "Dynamic Response Analysis of Structure with Large Degrees of Freedom by Step-by-step Transfer Matrix Method", Bull. of JSME, Vol. 26, No. 211, pp. 109~116, 1983
- (3) A. S. Kumar, T. S. Sankar, "A New Transfer Matrix Method for Response Analysis of Large Dynamic Systems", Computers & Structures, Vol. 23, No. 4, pp. 545~552, 1986
- (4) 문덕홍의 2인, "강성계수의 전달에 의한 보형 구조물의 진동해석기법", 한국소음진동공학회 춘계학술대회 논문집, pp. 316~321
- (5) 문덕홍의 3인, "강성계수의 전달에 의한 격자형 구조물의 자유진동 해석", 한국소음진동공학회 춘계학술대회 논문집, pp. 169~175, 1997