대한기계학회 2000년도 춘계학술대회논문집 A pp. 613~618 KSME 00S105

회전 외팔평판의 면외 방향 굽힘진동 해석

김 성 균* • 유 홍 희**

Flapwise Bending Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates

Sung Kyun Kim and Hong Hee Yoo

Key Words : Flapwise Bending Vibration (면외방향 굽힘진동), Rotating Cantilever Plates(회전 외팔평판), Natural Frequency Variation(고유진동수 변화), Natural Frequency Loci Crossing (고유진동수 궤적 교차), Dimensionless Parameters (무차원 매개변수)

Abstract

It is well known that the rotating motion of a blade-like structure induces centrifugal inertia force that causes the variation of the natural frequencies of the structure. Even though most of blade-like structures can be successfully idealized as beams, some behave like plates rather than beams. This paper presents a modeling method for the flapwise bending vibration analysis of rotating cantilever plates. The dependence of natural frequencies and free vibration modes on the angular speed as well as the aspect ratio of a rotating plate is investigated. Particularly, the natural frequency loci crossing is observed and discussed in the present study.

1. 서 론

외팔평판 형태의 구조물은 여러 가지 공학적 예제에서 발견되는 중요한 구조형태이다. 대표적인 것으로는 인공위성의 태양열 전지판, 헬리콥터 블레이드와 같은 것들이 있다. 특히 블레이드형 구조물들은 폭에 비해 길이가 비교적 긴 구조물들이며 회전방향도 면외 방향인 경우가 많다. 따라서 이러한 구조물들에 대한 진동특성의 정확한 예측은 이들의 설계를 위해 필수적이며 진동해석을 위한 모델링 개발을 위한 연구가 필요하다.

회전구조물의 진동에 관한 연구는 일찍이 1920년대 초부터 시작된 것으로 알려져 있으며, 참고문헌[1~6]은 이 분야의 많은 문헌 중 대표적 일부로서 주로 보 형태로 구조물을 이상화하여 다루고 있다. 그러나, 헬리콥터 블레이드와 같이 종횡비가 비교적 작은 구조물들은 평판으로 모델링을 할 때 더 정확한 해석을 할 수 있다. 그러나 이와 같은 회전 외팔 평판에 관한 연구는 보에 비해 그 연구 문헌이 희소한 편이며 (참고문헌[7~10]) 비교적 최근에 그 연구가 진행되고 있다. 특히 외팔평판의 면외 굽힘방향 진동은 기존에 이루어진 연구를 찾아볼 수 없어 이에 관한 연구가 필요한 실정이다.

본 연구의 목적은 외팔평판의 평판면에 수직인 방향의 회전에 따른 고유진동수와 모드의 변화를 조사하기 위한 모델링을 개발하고 해석을 수행하는데 있다. 본 연구는 특별히 평판의 회전 수와 관련된 무차원 매개변수 등 시스템의 특성을 결정하는 무차원 매개변수들의 변화에 따른 고유진동수 변화와 그에 따른 모드형상의 변화에 관찰의 초점을 맞추고 있다.

서론에 이어 2 장에는 참고문헌[9]에 근거한 진동방정식을 제시하고, 무차원화 과정을 보여주었다. 3 장에서는 2 장에서 제시된 진동방정식에 근거하여 Rayleigh-Ritz 가상모드법을 사용해 수치해석을 실시해 얻어진 결과를 설명하였다. 마지막으로 4 장에서는 본 논문의 결론을 수록하였다.

* 한양대학교 대학원 기계설계학과

** 정회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@email.hanyang.ac.kr
TEL : (02)2290-0446 FAX : (02)2293-5070

2. 진동방정식

2.1 회전 평판의 면외 굽힘방향 진동방정식

Fig. 1은 일정두께 h, 가로길이 a, 세로길이 b를 갖는 외팔평판이 일정각속도 Ω로 회전하는 반경 r의 축에 부착되어 있는 형태를 보여주고 있다. 이 평판의 단위면적 당 질량을 ρ라 하고 포아송 비를 ν, 굽힘강성계수 D라 하면 운동방정식은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu}\Bigg[\{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_0^a \rho\phi_i\phi_j dxdy\}\ddot{q}_j + \{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_0^a D(\phi_{i,xx}\phi_{j,xx}+\phi_{i,yy}\phi_{j,yy}+\nu\phi_{i,xx}\phi_{j,yy} + \nu\phi_{i,yy}\phi_{j,xx}+2(1-\nu)\phi_{i,xy}\phi_{j,xy})dxdy\}q_j + r\Omega^2\{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_0^a \rho(a-x)\phi_{i,x}\phi_{j,x}dxdy\}q_j + \Omega^2\{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_0^a \frac{1}{2}\rho(a^2-x^2)\phi_{i,x}\phi_{j,x}dxdy\}q_j + \Omega^2\{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_0^a \frac{1}{2}\rho(\frac{b^2}{4}-y^2)\phi_{i,y}\phi_{j,y}dxdy\}q_j\Bigg] = 0 \quad (i=1,2,\cdots,\mu) \tag{1}$$

여기서 아래첨자 표시중 콤마 뒤에 나타나는 것은 이에 대한 편미분으로 $\phi_{i,xx}$는 ϕ_i를 x로 두번 편미분한 것을 의미한다. ϕ_i와 q_i는 평판의 굽힘방향 변위 w를 표시하기 위해 사용하는 모드함수와 일반좌표이며 상호 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$w(x,y,t)=\sum_{i=1}^{\mu}\phi_i(x,y)q_i(t) \tag{2}$$

여기서 μ는 근사화에 사용된 모드의 개수이다.

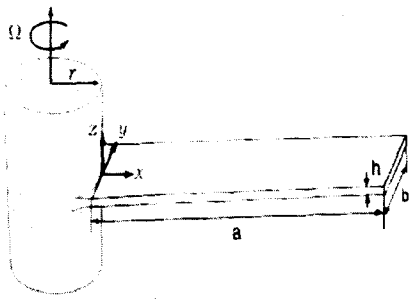


Fig. 1 Configuration of a rotating rectangular plate

식(1)에는 회전 각속도 Ω의 증가에 따라 강성이 증가하는 항들을 보여준다.

2.2 방정식의 무차원화와 무차원 매개변수

식 (1)을 무차원화 하기 위해 무차원 변수와 매개변수, 그리고 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\tau \equiv \frac{t}{T}$$
$$\zeta \equiv \frac{x}{a}$$
$$\eta \equiv \frac{y}{b}$$
$$\vartheta_j \equiv \frac{q_j}{a} \tag{3}$$
$$\delta \equiv \frac{a}{b}$$
$$\gamma \equiv \frac{\Omega}{\Omega_r}$$
$$\psi_i(\zeta,\eta) \equiv \phi_i(x,y)$$

여기서 Ω_r과 T는 다음과 같이 정의된다.

$$\Omega_r \equiv \sqrt{\frac{D}{\rho a^4}} \qquad T \equiv \frac{1}{\Omega_r} \tag{4}$$

식 (3)을 이용하면 식 (1)은 다음과 같이 무차원 형태로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu}\Bigg[\{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 \psi_i\psi_j d\zeta d\eta\}\ddot{\vartheta}_j + \{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 (\psi_{i,\zeta\zeta}\psi_{j,\zeta\zeta}+\delta^4\psi_{i,\eta\eta}\psi_{j,\eta\eta} + \nu\delta^2\psi_{i,\zeta\zeta}\psi_{j,\eta\eta}+\nu\delta^2\psi_{i,\eta\eta}\psi_{j,\zeta\zeta} + 2(1-\nu)\delta^2\psi_{i,\zeta\eta}\psi_{j,\zeta\eta})d\zeta d\eta\}\vartheta_j + \gamma^2\sigma\{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 (1-\zeta)\psi_{i,\zeta}\psi_{j,\zeta}d\zeta d\eta\}\vartheta_j + \frac{\gamma^2}{2}\{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 (1-\zeta^2)\psi_{i,\zeta}\psi_{j,\zeta}d\zeta d\eta\}\vartheta_j + \frac{\gamma^2}{2}\{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 (\frac{1}{4}-\eta^2)\psi_{i,\eta}\psi_{j,\eta}d\zeta d\eta\}\vartheta_j\Bigg] = 0 \tag{5}$$

식 (5)을 이용하여 진동해석을 수행하기 위해서 무차원화 된 일반좌표의 행렬을 다음과 같은 조화함수로 나타낸다.

$$\underline{\vartheta} = e^{j\omega\tau}\underline{\vartheta} \tag{6}$$

여기서 $\underline{\vartheta}$는 ϑ_j를 요소로 갖는 기둥행렬이며, ω는 고유진동수와 Ω_r의 비를 나타내고, $\underline{\Theta}$는 고유진동수에서의 모드형태를 나타내는 기둥행렬이다. 식(6)에서 j는 허수(imaginary number)를 나타내는 기호로 사용된다.

식 (6)을 식 (5)에 대입하면 다음과 같은 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$\omega^2 M\underline{\Theta} = K\underline{\Theta} \tag{7}$$

여기서, M과 K는 $\mu\times\mu$의 크기를 갖는 정방행렬로 그 요소들은 다음과 같다.

$$M_{ij} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 \psi_i\psi_j d\zeta d\eta\ddot{\vartheta}_j \tag{8}$$

$$\begin{aligned} K_{ij} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 & (\psi_{i,\zeta\zeta}\psi_{j,\zeta\zeta} + \delta^4\psi_{i,\eta\eta}\psi_{j,\eta\eta} \\ & + \nu\delta^2\psi_{i,\zeta\zeta}\psi_{j,\eta\eta} + \nu\delta^2\psi_{i,\eta\eta}\psi_{j,\zeta\zeta} \\ & + 2(1-\nu)\delta^2\psi_{i,\zeta\eta}\psi_{j,\zeta\eta})d\zeta d\eta\vartheta_j \\ & + \gamma^2\sigma\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^1(1-\zeta)\psi_{i,\zeta}\psi_{j,\zeta}d\zeta d\eta\vartheta_j \\ & + \frac{\gamma^2}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^1(1-\zeta^2)\psi_{i,\zeta}\psi_{j,\zeta}d\zeta d\eta\vartheta_j \\ & + \frac{\gamma^2}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^1(\frac{1}{4}-\eta^2)\psi_{i,\eta}\psi_{j,\eta}d\zeta d\eta\vartheta_j = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

3. 해석결과 및 토의

본 장에서는 2장에서 유도된 진동방정식에 가상모드법을 사용하여 수치 해석을 수행하였으며 모드함수들은 가로와 세로 방향 보함수들을(beam function) 이용하여서 구성하며 그 상세한 과정은 참고문헌[5-7]에 잘 나타나 있다. 본 논문과 관련되어 사용된 보함수의 개수는 가로방향 5개, 세로방향 7 개며 따라서 총 35 개의 자유도를 갖는다. 본 논문에서는 평판의 가장 낮은 5 개의 고유진동수 및 모드형상만을 관찰하려 하므로, 여기서 사용된 자유도는 수치해석결과 해의 수렴에 충분한 것이라 판단된다. 본 해석에 사용된 포아송비는 $\nu = 0.3$ 이다.

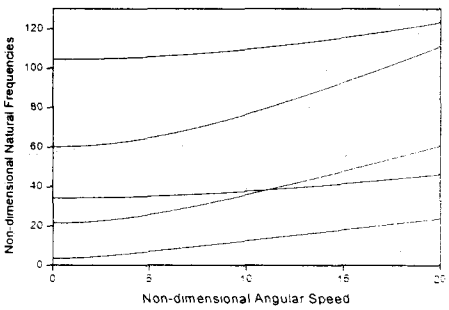
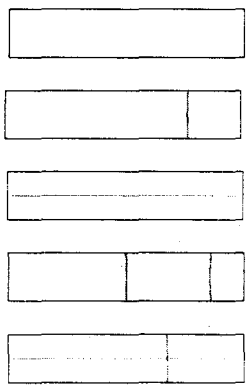
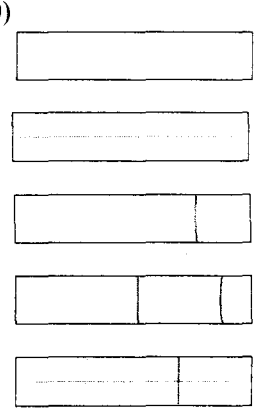


Fig. 2 Variation of the lowest five natural frequencies for rotating plates ($\sigma = 1$ $\delta = 5$)



(a) Lowest five mode shapes without rotation ($\gamma = 0$)



(b) Lowest five mode shapes with rotation ($\gamma = 20$)

Fig. 3 Nodal line patterns of lowest five mode shapes with and without rotating motion

Fig.2 은 축반경비 σ가 1 이고 종횡비 δ가 5 인 평판을 회전 각속도의 증가에 따른 가장 낮은 5 개의 고유진동수 변화를 보여주고 있다. 이 그림에서 흥미로운 것은 2 번째와 3 번째 고유진동수 궤적의 교차(Natural Frequency Loci Crossing)이다. 2 번째, 3 번째 고유진동수 궤적은 γ=11 부근에서 교차가 이루어진다.

Fig.3 (a)는 평판이 회전하기 전의 모드 절선들을 나타내고 있고 (b)는 회전속도 γ=20 일 때의 모드들의 절선들을 나타내고 있다. **Fig.3** (a)에서 첫번째 모드는 1st Bending, 두 번째 모드는 2nd Bending 세 번째 모드는 1st Torsion 네 번째 모드는 3rd Bending 그리고 다섯번째 모드는 Bending 과 Torsion 의 조합 모드이다. 여기서 관찰할 수 있는 사실은 다른 모드들이 거의 변화가 없는데 반해 2 번째와 3 번째의 모드들은 상호 뒤바뀐 모습을 하고 있다. 이것은 **Fig.2** 에서 보듯이 회전각속도의 증가에 따라 비틀림 모드가 두 번째 굽힘 모드보다 더 낮은 고유진동수의 값을 갖는 것이다.

Fig.4 는 축 반경비가 1 이고 종횡비가 10 인 평판을 회전 각속도의 증가에 따라 가장 낮은 5 개의 고유진동수의 변화를 나타내고 있는데 여기서 는 3 번째와 4 번째 고유진동수 궤적이 교차하는 것을 보여준다. **Fig.5** (a)는 **Fig.4** 에 나타난 고유진동수들의 모드절선을 나타낸 그림이며 첫 번째 모드는 1st Bending, 두 번째 모드는 2nd Bending, 세 번째 모드는 3rd Bending, 네 번째 모드는 1st Torsion, 다섯 번째 모드는 4th Bending 이다.

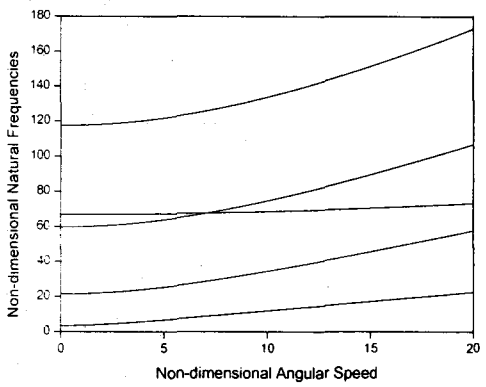
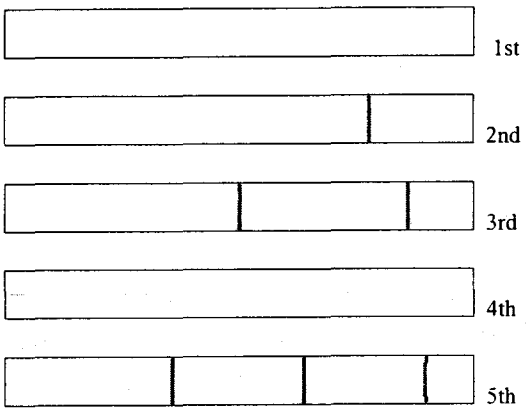
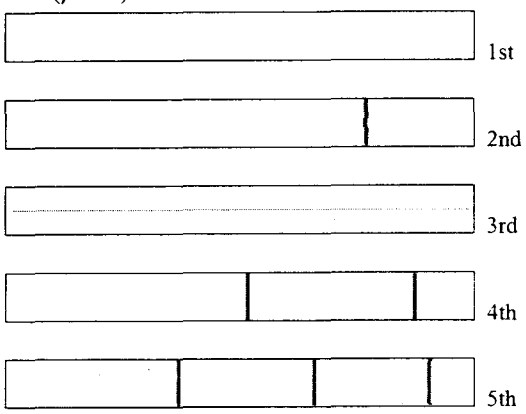


Fig. 4 Variation of the lowest five natural frequencies for rotating plates ($\sigma = 1$ $\delta = 10$)



(a) Lowest five mode shapes without rotation ($\gamma = 0$)



(b) Lowest five mode shapes with rotation ($\gamma = 20$)

Fig. 5 Nodal line patterns of lowest five mode shapes with and without rotating motion

Fig.5(a)와 **Fig.5**(b)를 비교해 보면 3rd Bending 과 1st Torsion 모드가 뒤바뀐 모습을 나타내고 있다. 따라서 종횡비가 큰 구조물이 회전을 할 때 회전 각속도가 증가함에 따라서 점차로 Bending Mode 들의 고유진동수만이 크게 증가를 하므로 Torsion 모드가 더 낮은 고유진동수의 지배적인 모드로 나타나는 것을 알 수 있다. 두 모드들은 그러나 서로 다른 형태들이므로 (Bending 모드는 대칭모드이고 Torsion 모드는 비대칭 모드임) 참고문헌 (10)에서 보여준 고유진동수 궤적간 휨현상은(veering) 발생하지 않는다.

Fig.6 은 회전을 하지 않는 평판이 종횡비에 따라 가장 낮은 5 개의 고유진동수가 어떻게 변화하는지를 나타내고 있으며, **Fig.7** 은 **Fig.6** 에서 종횡비가 20 일때 가장 낮은 5 개 모드들의 절선을 나타내고 있다. 이 그림은 종횡비가 증가함에

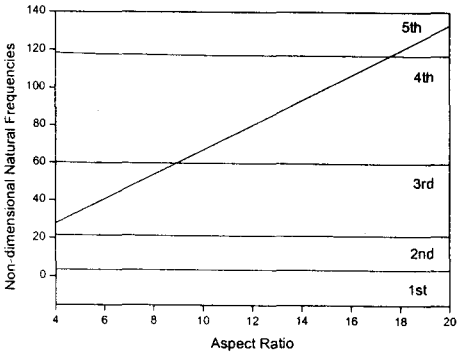


Fig.6 Non-dimensional natural frequencies vs. aspect ratio

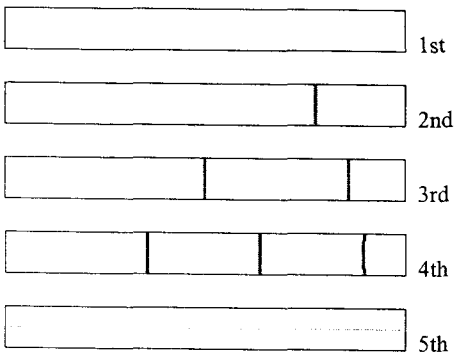


Fig. 7 Nodal lines of the lowest five mode shapes for a rotating rectangular cantilever plate (δ=20)

따라 Bending 모드들의 고유진동수를 기준으로 할 때 Torsion 이 포함된 모드들은 상대적으로 고유진동수가 증가하는 결과로 나타난다. 직관적으로도 폭에 비해서 길이가 긴 평판의 경우 점점 Bending 모드가 낮은 고유진동수를 갖는 지배적인 모드가 된다는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 선행연구에서 제시된 (참고문헌 (9)를 참조할 것) 회전 평판의 운동방정식 유도방법을 이용하여 진동방정식을 유도 기술하고 이에 근거해 수치해석을 수행하였다. 그 결과 평판의 종횡비 및 회전 각속도의 변화에 따른 고유진동수 궤적 변화와 이에 수반되는 모드 형태의 변화를 관찰할 수 있었다. 고유진동수 궤적의 교차는 관련 모드들의 교차로 나타나며 직관적으로 예측할 수 있듯이 종횡비가 증가함에 따라 비틀림 모드보다 굽힘 모드들이 지배적이 되는 것을 알 수 있었으며 대략 종횡비가 10 이상이고 무회전이면 보와 유사하게 굽힘 모드들이 지배적 모드가 되는 것을 확인할 수 있었다. 외팔 평판의 경우 회전에 의해서 비틀림 고유진동수의 변화는 굽힘 모드를 갖는 고유진동수보다 증가율이 훨씬 낮으므로 이들 간에 교차현상이 일어나는 것도 관찰할 수 있었다. 특별히 고유진동수 궤적의 교차현상은 구조물의 설계 시 고유진동수가 이중근을 갖게 되는 것을 의미하며 이는 구조물의 동적 안정 설계를 위해서 일반적으로 피해야 하는 현상이다. 따라서 본 연구결과는 구조물 설계시 유용한 정보를 제공할 수 있다는 점에서도 의미를 지닌다고 할 수 있다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades", British A.R.C. Reports and Memoranda No.766.
(2) Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force", NASA TN No.516.
(3) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam", Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.25, pp.28-30.
(4) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams", J. Sound and Vibration, Vol.56, pp.175-185.
(5) Bhat, R., 1986, "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method", J. Sound and Vibration, Vol.105, No.2, pp.199-210.
(6) Ryan, R.R. and Yoo, H.H., 1989, "Element Specific Linear and Nonlinear Modeling", SDIO NASA

Conference Proceedings, San Diego, California, January.
(7) Dokainish, M. and Rawtani, S., 1971, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.3, pp.233-248.
(8) Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, "Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol.97, No.3, pp.429-449.
(9) 유홍희, 1992, "운동을 하는 탄성 평판의 선형 동적 모델링", 한국항공우주학회지, 제 20 권, 제 4 호, pp.62-70..
(10) 유홍희, 1993, "회전하는 외팔평판의 진동해석," 대한기계학회논문집, 제 17 권, 제 3 호, pp.652-657.
(11) Young, D., 1950, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method." *Journal of Applied Mechanics*, 17(4), pp.448~453.
(12) Barton, M. V., 1951, "Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates," *Journal of the Applied Mechanics*, Vol. 18, No. 1, pp. 129-134.
(13) Leissa, A. W., 1969, Vibration of Plates, NASA SP-160.