

두 파라메타 탄성기초위에 놓인 불균일 Timoshenko보의 안정성과 진동

이종원* · 류봉조** · 이규섭*** · 공용식**** · 오부진****

Stability and Vibration of Non-Uniform Timoshenko Beams resting on Two-Parameter Elastic Foundations

Jong Won Lee, Bong Jo Ryu, Gyu Seop Lee,
Yong Sik Kong and Bu Jin Oh

Key Words: Vibration and Stability(진동과 안정성), Finite Element Method(유한요소법), Two-parameter elastic foundations(두 파라메타 탄성기초), Non-uniform Timoshenko beam(불균일 티모센코 보)

Abstract

The paper presents free vibration and stability analyses of a non-uniform Timoshenko beam resting on a two-parameter elastic soil. The soil parameters can vary along the span, and is assumed to be two-parameter model including the effects of both transverse shear deformation and elastic foundation.

Governing equations related to the vibration and the stability of the beam are derived from Hamilton's principle, and the resulting eigen-value problems can be solved to give natural frequencies and critical force by finite element method.

Numerical results for both vibration and stability of beams under an axial force are presented and compared with other available solutions. Finally, vibration frequencies, mode shapes and critical forces are investigated for various thickness ratios, shear foundation parameter, Winkler foundation parameter, and boundary conditions of tapered Timoshenko beams.

1. 서론

구조역학계에 있어 탄성기초(elastic foundation) 위에 놓인 보 구조물들은 아주 흔한 경우로써, 지반위에 놓인 구조물들의 대부분이 이에 해당된다고 볼 수 있다. 이러한 탄성기초에 대한 초기 가정들은 잘 알려진 Winkler 스프링으로 간주한 가정들이었는데 이것은 서로 근접된 선형 탄성 수직 스프링들의 무한 연결로 이루어진 탄성기초를 의

미한다. 그러나 이러한 모델의 한계는 스프링들 사이의 연속매체의 특성을 재현하는데 다소 부적합한 것으로 최근 알려져 왔다. 이러한 문제점들을 극복하기 위해 소위 Pasternak 모델이라 불리는 두 파라메타 탄성기초 모델에 대한 연구들이 이루어져 왔다^[1]. 위의 연구들이 Euler-Bernoulli 보 이론에 근거한 연구들이라면, 보의 회전관성과 전단변형의 효과를 고려한 Timoshenko 보 이론에 근거하여 해를 구하려는 노력도 많이 이루어져 왔다^[2-3]. 이러한 연구들과 병행하여 공학적 많은 문제들에 있어서, 보의 길이방향을 따라 단면형상이 변하는 불균일 보에 대한 연구들이 하중과 강도의 최적분포를 달성시키기위해 이루어져 왔다. Rossi와

* 정회원, 충남대학교 기계공학과 대학원
** 정회원, 대전산업대학교 기계설계공학과
*** 정회원, 국방과학연구소
**** 대전산업대학교 기계설계공학과 대학원

그의 공동연구자들^[4]은 집중질량을 갖는 외팔 불균일 Timoshenko보에 대한 진동특성 연구를 하였고, 최근, Hou와 그의 공동연구자들^[5]은 두 파라메타 탄성기초위에 놓인 불균일 Timoshenko보의 진동특성을 전단탄성기초 및 Winkler탄성기초 파라메타 값의 변화에 따라 해석하였다. 그러나 그들이 접근한 보의 형태는 다양한 형태의 불균일 Timoshenko보였으나, 진동문제에만 국한시켜 연구를 하였다. 따라서 본 연구에서는 축력을 받고 두 파라메타 탄성기초위에 놓인 불균일 Timoshenko보의 안정성과 진동특성을 유한요소법을 사용한 수치해석적 방법으로 연구하는데 그 목적이 있다.

2. 이론해석

2.1 수학적 모델과 지배방정식

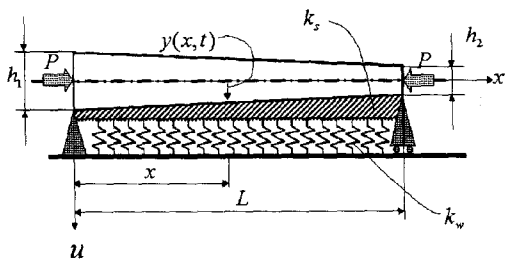


Fig. 1 A tapered Timoshenko beam resting on two - layer elastic foundations under a axial force.

Fig. 1에서, P 는 축력을 나타내고, L 은 보의 길이, k_w 는 Winkler 탄성계수(Winkler foundation modulus), k_s 는 전단기초계수(shear foundation modulus), x 와 u 는 각각 축방향과 횡방향 좌표를 나타낸다. 한편, h_1 과 h_2 는 불균일 테이퍼진 보의 굵은쪽과 가는쪽의 두께를 나타내며, $y(x, t)$ 는 x 와 시간 t 에 있어서의 수직변위를 의미한다.

Fig. 1 모델에 대한 지배방정식을 얻기위해 계의 탄성 포텐셜에너지 U , 운동에너지 T , 축력에 의한 일 W 를 나타내면 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \phi_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L kA(x) G (y_x - \phi)^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L k_w y^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k_s y_x^2 dx \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) y_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I(x) \phi_t^2 dx \quad (2)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L P y_x^2 dx \quad (3)$$

식(1)에서 (3)을 해밀톤 원리에 대입한 후, 변분을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_0^L \left\{ \rho A_1 \left(D + (1-D) \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right) y_{tt} \delta y + \rho I_1 \left(D + (1-D) \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right)^3 \phi_{tt} \delta \phi + EI_1 \left(D + (1-D) \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right)^3 \phi_x \delta \phi_x + kA_1 G \left(D + (1-D) \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right) (y_x - \phi) \delta (y_x - \phi) + k_w y \delta y + k_s y_x \delta y_x - P y_x \delta y_x \right\} dx = 0 \quad (4)$$

여기서, D 는 h_2/h_1 이고, A_1 과 I_1 은 각각 테이퍼진 보의 두꺼운쪽 단면적과 단면의 2차 모멘트를 나타낸다.

2.2 유한요소 해석

식(4)에 유한요소법을 적용시키기위해 보를 균일 길이 l 인 N 개의 요소로 분할하며, i 번째 요소에 대한 nodal 좌표를 Fig. 2와 같이 정의한다.

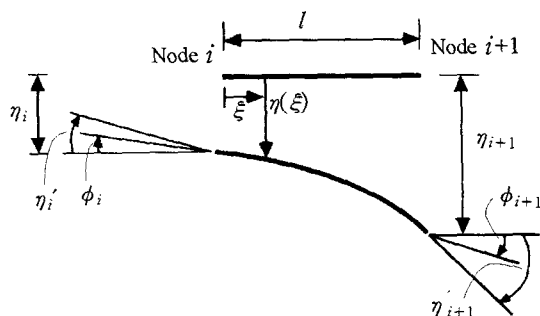


Fig. 2 Nodal coordinates of i th element.

한편, 계산상의 편리를 위해 다음과 같은 국부좌표와 무차원 좌표들을

$$\xi = \frac{x'}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad x' = x - (i-1)l \quad (5)$$

을 이용하고, i 번째 요소에 대한 변위와 굽힘기울기를 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \eta(\xi)^{(i)} &= a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3, \\ \phi(\xi)^{(i)} &= b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 \end{aligned} \quad (6)$$

유한 요소들간의 적합조건을 만족시키는 식(6)의 계수를 찾고, 다음의 관계

$$\eta(\xi)^{(i)} = \{N_w\}^T \{H\}^{(i)}, \quad \phi(\xi)^{(i)} = \{N_w\}^T \{\Phi\}^{(i)} \quad (7)$$

를 이용하면, 식(4)는 최종적으로 다음과 같은 행렬형태의 고유치 문제로 귀결된다.

$$[[K] - \Omega^2[M]]\{q\} = \{0\} \quad (8)$$

식(8)의 고유치문제의 계산에 사용되는 무차원 파라메타들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{PL^2}{EI_1}, \quad D = \frac{h_2}{h_1}, \quad R = \frac{I_1}{A_1L^2}, \quad S = \frac{kA_1GL^2}{EI_1}, \\ \Omega^2 &= \frac{\rho A_1 L^4}{EI_1} \omega^2, \quad K_s = \frac{k_s L^2}{EI_1}, \quad K_w = \frac{k_w L^4}{EI_1} \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)에서, Ω 는 진동수 파라메타, K_s 는 전단기초 파라메타, K_w 는 Winkler 기초 파라메타, Q 는 축력 파라메타를 나타내며, D 는 테이퍼진 보의 두께비, S 는 보의 전단변형 파라메타, R 은 보의 회전관성 파라메타를 나타낸다.

3. 수치해석 결과 및 검토

본 연구의 수치해석 결과들은 보 길이를 20개의 유한요소로 나누어 얻어진 결과들이며, 수치해의 타당성 검토를 위하여 다양한 경계조건을 갖는 균일 Timoshenko보의 경우인 참고문헌[2]와 [3]의 결과들과의 비교를 Table 1에 나타내었으며, 비교결과 근사한 일치를 보였다. Table 1에서 알 수 있듯이 참고문헌[2]의 엄밀해(exact solution)와의 비교에서는 최대 0.2%의 오차를 보이고, 참고문헌[3]의 16요소를 사용한 유한요소 근사해 결과와는 최대 0.09%의 오차를 보임을 알 수 있다. 물론 본 연구에서 사용한 요소수는 20개로서 참고문헌[3]에 비해 약간 더

많은 요소수로 분할하였지만, 엄밀해와의 근접한 결과를 위해서는 본 연구에서와 같이 적어도 20개의 요소수로 분할함이 타당하다고 본다.

Table 1. Comparison present results with other available results for the lowest three natural frequencies.

		Exact Ref. (2)	16 element Ref. (3)	20 element Present
Both Hinged	$K_w/\pi^4=0.0$	8.21	8.22	8.21469
	$K_s/\pi^2=0.0$	24.23	24.31	24.2281
	$Q/\pi^2=0.0$	41.54	41.96	41.5417
	$K_w/\pi^4=0.6$	8.21	8.22	8.21469
	$K_s/\pi^2=0.0$	20.59	20.67	20.5896
	$Q/\pi^2=0.6$	35.86	36.25	35.8568
Hinged Clamped	$K_w/\pi^4=0.0$	10.63	10.63	10.6266
	$K_s/\pi^2=0.0$	25.62	25.71	25.6160
	$Q/\pi^2=0.0$	42.03	42.46	42.0314
	$K_w/\pi^4=0.6$	10.46	10.49	10.4806
	$K_s/\pi^2=0.0$	22.20	22.30	22.2068
	$Q/\pi^2=0.6$	36.50	36.90	36.5041

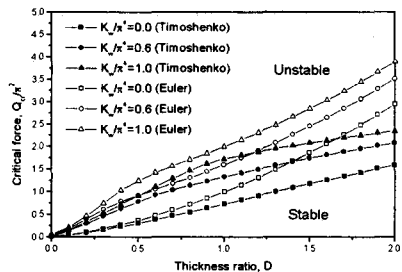


Fig. 3 Critical force depending on thickness ratio and Winkler foundation parameter for both-hinged boundary condition.

Fig. 3에서 Fig. 5는 각각 양단힌지 테이퍼진 Euler-Bernoulli보와 Timoshenko보의 경우에 대해, Winkler 기초 파라메타만이 존재할 때(Fig. 3), 전단기초 파라메타만이 존재할 때(Fig. 4), 두 탄성기초 파라메타가 모두 존재할 때(Fig. 5)에 대해, 테이퍼 두께비와 기초 파라메타 값의 변화에 따른 임계 축력값의 변화를 나타낸 그림들이다.

이들 세 그림들에 있어서의 특징은 첫째, 기초 파라메타 값이 증가하거나 테이퍼 두께비가 증가할수록 임계 축력 값은 증가된다는 것이고, 둘째, 동일한

테이퍼 두께비나 기초 파라메타 값에 대해 Timoshenko보의 경우가 Euler-Bernoulli보의 경우에 비해 임계 축력값이 작은값을 나타낸다는 것이다.

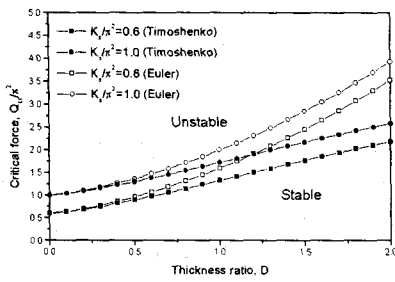


Fig. 4 Critical force depending on thickness ratio and shear foundation parameter for both-hinged boundary condition.

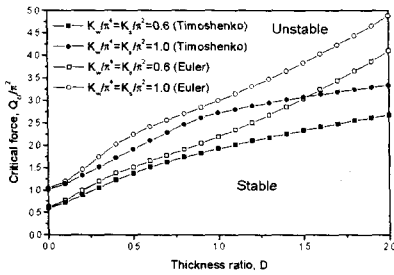


Fig. 5 Critical force depending on thickness ratio and two-layer foundation parameter for both-hinged boundary condition.

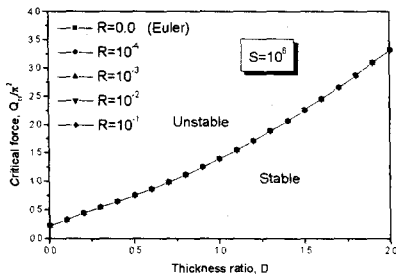


Fig. 6 Critical force depending on rotary inertia parameter and thickness ratios of the beams.

Fig. 6은 보의 회전관성 파라메타 R 값의 변화에 따른 임계 축력값의 변화를 나타낸 그림으로, 어떤 고정된 테이퍼 두께비에 대해, R 값의 변화가 임계 축력값의 변화에 미치는 영향은 전혀 없

다는 것을 보여준다. Fig. 7은 보의 전단변형 매개변수 S 값의 변화에 따른 임계 축력값의 변화를 나타낸 그림이다. 이 그림을 통하여 알 수 있는 것은 첫째, 어떤 고정된 테이퍼 비에 대해서도 보의 전단변형 파라메타 값이 증가함에 따라 임계 축력값은 증가된다는 것이고, 둘째, 보의 전단변형 매개변수 S 값이 $S \geq 10^3$ 일 경우는 S 값의 변화가 임계값의 변화에 미치는 영향은 거의 없다는 것이다.

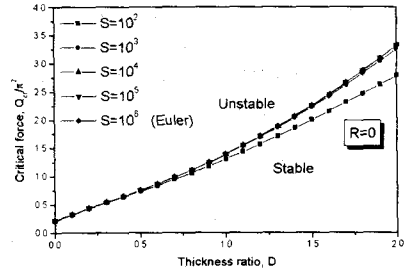


Fig. 7 Critical force depending on shear deformation parameter and thickness ratios of the beams.

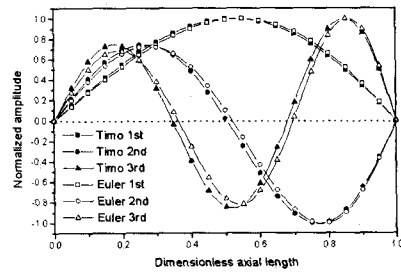


Fig. 8 The first three lowest mode shapes depending on Winkler foundation parameter for thickness ratios $D=0.5$. ($K_w/\pi^4=1.0, K_s/\pi^2=0.0$)

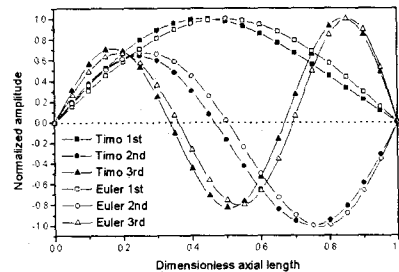


Fig. 9 The first three lowest mode shapes depending on Winkler foundation parameter for thickness ratios ($D=0.5, K_w/\pi^4=5.0, K_s/\pi^2=0.0$).

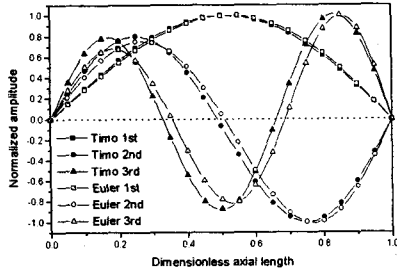


Fig. 10 The first three lowest mode shapes depending on shear foundation parameter for thickness ratios ($D=0.5, K_w/\pi^4=0.0, K_s/\pi^2=1.0$).

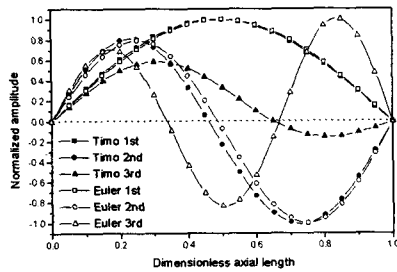


Fig. 11 The first three lowest mode shapes depending on shear foundation parameter for thickness ratios ($D=0.5, K_w/\pi^4=0.0, K_s/\pi^2=5.0$).

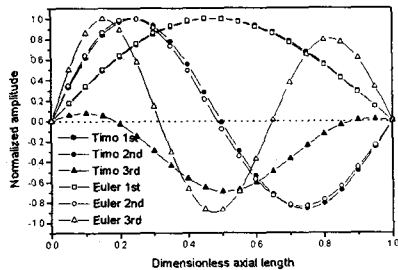


Fig. 12 The first three lowest mode shapes depending on Winkler foundation parameter for thickness ratios ($D=1.5, K_w/\pi^4=1.0, K_s/\pi^2=0.0$).

Fig. 8에서 Fig. 9는 테이퍼 두께비 D 값이 $D=0.5$ 일 때, Winkler 기초만이 존재하는 경우에 있어서 Winkler 기초 파라메타 값의 변화에 따른 처음 3개의 규준화된(normalized) 고유 모드들(natural modes)을 Euler-Bernoulli보와 Timoshenko보의 각

각에 대해 나타낸 그림들이다. 이들 그림들에서 Winkler 기초 파라메타 값이 증가됨에 따라 Euler-Bernoulli보와 Timoshenko보의 모드 형상값의 변화가 커짐을 알 수 있다.

Fig. 10에서 Fig. 11은 테이퍼 두께비 D 값이 $D=0.5$ 일 때, 전단기초 파라메타 값만이 존재하는 경우에 있어서 전단기초 파라메타 값의 변화에 따른 처음 낮은 3개의 규준화된(normalized) 고유 모드들을 Euler-Bernoulli보와 Timoshenko보의 각각에 대해 나타낸 그림들이다. 이들 그림들에 있어서도 전단기초 파라메타 값이 증가함에 따라 Euler-Bernoulli보와 Timoshenko보의 모드 형상은 비슷하나 값에 있어서 차이가 있음을 알 수 있다. 또한, $K_s/\pi^2=5.0$ 의 3차 모드에 있어서는 Euler-Bernoulli보와 Timoshenko보의 모드 형상 자체가 아주 다르게 나타남을 알 수 있다.

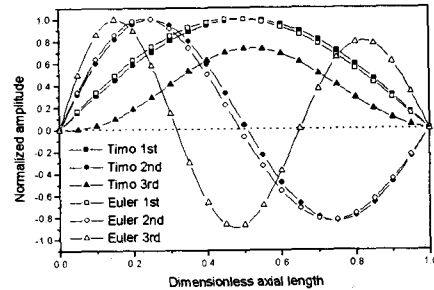


Fig. 13 The first three lowest mode shapes depending on Winkler foundation parameter for thickness ratios ($D=1.5, K_w/\pi^4=5.0, K_s/\pi^2=0.0$).

Fig. 12부터 Fig. 13은 테이퍼 두께비 $D=1.5$ 의 경우, Winkler 기초 파라메타 값의 변화에 따른 규준화된 모드 형상을 보여주고 있다. 테이퍼 두께비 $D=1.5$ 의 경우는 $D=0.5$ 의 경우와 달리, Winkler 기초 파라메타 $K_w/\pi^4=1.0$ 에 있어서도 Timoshenko보의 3차 모드 형상이 Euler-Bernoulli보와는 아주 상이한 형상이 나타남을 알 수 있었다.

따라서 테이퍼 두께비와 기초 파라메타 값의 변화는 동일조건하에서 Euler-Bernoulli보와 Timoshenko보의 모드 형상변화에 커다란 영향을 준다는 것을 알 수 있다.

Table 2는 Timoshenko보의 경우에 대해 테이퍼 두께비 D , 전단기초 파라메타 K_s/π^2 , Winkler기

초 파라메타 K_w/π^4 , 축력 파라메타 Q/π^2 값의 변화에 따른 처음 낮은 3개의 고유진동수(first three lowest natural frequencies) 변화를 나타낸 표이며, 이 표에 나타난 특징들은 다음과 같다.

첫째, 축력과 2층 기초층이 전혀없는 보의 고유진동수는 전단기초층이 없고 축력과 Winkler 기초 파라메타값이 동일한 경우의 고유진동수와 완전히 일치한다는 점이다. 둘째, 축력과 2층 기초층이 전혀없는 보의 고유진동수는 전단기초층이 없고 축력과 Winkler 기초 파라메타값이 동일한 경우의 고유진동수와 상이한 값을 가지게 되나 테이퍼 두께비 $D=1.0$ 의 균일보의 경우는 1차 고유진동수만에 있어서는 동일한 값을 갖는다.

Table 2. First three lowest natural frequencies Ω_i for the change of thickness ratios and boundary conditions(Timoshenko beam ; $S=26.6667$, $R=0.01$).

Thickness ratios	Boundary conditions	Both	Clamped	Hinged	Both
		Hinged	-Free	-Clamped	Clamped
0.5	$K_w/\pi^4=0.0$	6.35876	3.82378	9.53188	11.4234
	$K_s/\pi^2=0.0$	20.8811	18.3171	22.9061	24.5733
	$Q/\pi^2=0.0$	37.6321	47.2650	38.5748	39.9218
	$K_w/\pi^4=0.1$	6.33314	4.40112	9.40142	11.3655
	$K_s/\pi^2=0.0$	19.9093	12.0718	21.9955	23.7495
	$Q/\pi^2=0.1$	36.2267	26.1076	37.2159	38.6240
	$K_w/\pi^4=0.0$	6.35876	3.82378	9.53188	11.4234
	$K_s/\pi^2=0.1$	20.8811	18.3171	22.9061	24.5733
	$Q/\pi^2=0.1$	37.6321	47.2650	38.5748	39.9218
1.0	$K_w/\pi^4=0.0$	8.21469	3.18869	10.6266	13.0748
	$K_s/\pi^2=0.0$	24.2281	13.8755	25.6160	26.6924
	$Q/\pi^2=0.0$	41.5417	29.9222	42.0314	42.6488
	$K_w/\pi^4=0.1$	8.21469	3.92884	10.6081	13.0615
	$K_s/\pi^2=0.0$	23.6615	13.3792	25.0802	26.1740
	$Q/\pi^2=0.1$	40.6514	29.1827	41.1659	41.7968
	$K_w/\pi^4=0.0$	8.21469	3.18869	10.6266	13.0748
	$K_s/\pi^2=0.1$	24.2281	13.8755	25.6160	26.6924
	$Q/\pi^2=0.1$	41.5417	29.9222	42.0314	42.6488

4. 결론

축방향 압축력을 받고 두 파라메타 탄성기초위에 놓인 불균일 Timoshenko보의 안정성과 자유진동에 관한 수치해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 기초 파라메타 값과 테이퍼 두께비가 증가함

에 따라 임계 축력값은 증가된다.

(2) 축력과 2층 기초층이 전혀없는 보의 고유진동수는 전단기초층이 없고 축력과 Winkler 기초 파라메타값이 동일한 경우의 고유진동수와 완전히 일치하고, 전단기초층이 없고 축력과 Winkler 기초 파라메타값이 동일한 경우의 고유진동수와는 상이한 값을 가지게 되나 균일보의 경우는 1차 고유진동수만에 있어서는 동일한 값을 갖는다.

(3) 어떤 고정된 테이퍼비두께에 대해, 보의 전단 변형파라메타 S 값이 증가함에 따라 임계축력값은 증가되나 $S \geq 10^3$ 에서 S 값의 증가가 임계축력값의 변화에 미치는 영향은 거의 없다.

(4) 고정된 테이퍼 두께비에 대해 보의 회전관성 파라메타 R 값의 변화가 임계축력값의 변화에 미치는 영향은 전혀 없다.

(5) 테이퍼 두께비와 기초파라메타 값의 변화는 Euler-Bernoulli 보와 Timoshenko 보의 모드형상 및 모드 값의 변화에 큰 영향을 미칠 수 있다.

참고문헌

1. Eisenbenger, EM. and Clastornik, J., 1987, "Beams on Variable Two-Parameter Elastic Foundation", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.113, pp.1454 ~ 1466.
2. Cheng, F. Y. and Pantelides, C. P., 1988, "Dynamic Timoshenko Beam-Columns on Elastic Media", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.114, pp.1524 ~ 1556.
3. Yokoyama, T., 1996, "Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations", *Computers and Structures*, Vol.61, pp.995 ~ 1007.
4. R. E. Rossi, P. A. A. Laura and R. H. Gutierrez, 1990, "A Note on Transverse Vibrations of a Timoshenko Beam of Non-Uniform Thickness Clamped at One End and Carrying a Concentrated Mass at the Other", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.143, pp.491 ~ 502.
5. Y. C. Hou, C. H. Tseng and S. F. Ling, 1996, "A New High-Order Non-Uniform Timoshenko Beam Finite Element on Variable Two-Parameter Foundations for Vibration Analysis", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.191, pp.91 ~ 106.